تحلیل مهندسی مدار

ویراست هفتم - ۲۰۰۷

ویلیام هیت

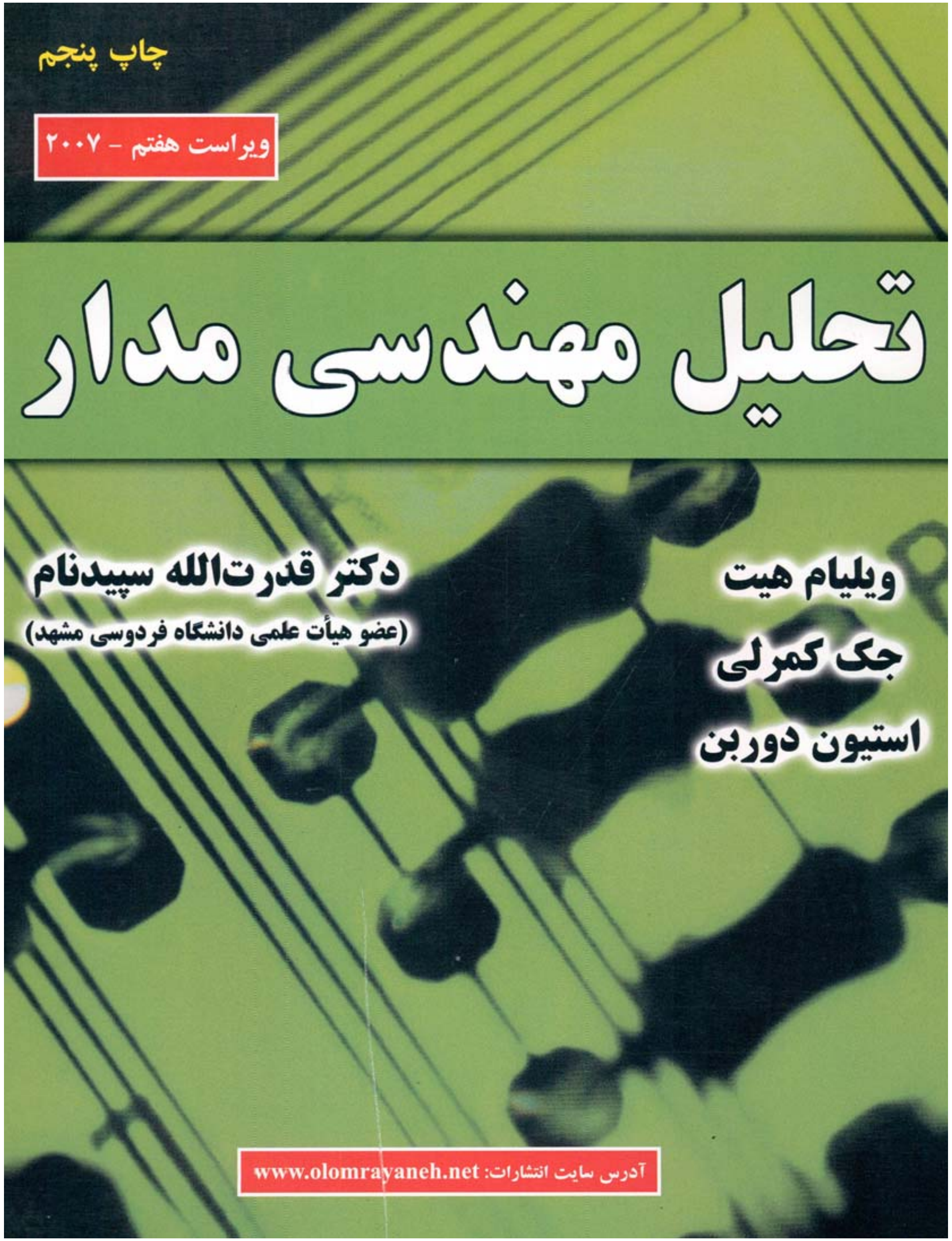
جک کمرلی

استیون دوربن

دکتر قدرت الله سپیدنام

(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

علوم رایانه



سرشناسه	:	هیت، ویلیام هارت، ۱۹۲۰ ـ م. Hoyt, William Hart
عنوان و نام پدیدآور	:	تحلیل مهندسی مدار / ویلیام هیت، جک کمرلی، استیون دوربن؛ [مترجم] قدرت‌الله سپیدنام.
مشخصات نشر	:	بابل: علوم رایانه، ۱۳۸۶.
مشخصات ظاهری	:	۶۴۰ ص.: مصور (رنگی)، جدول، نمودار.
شابک	:	978-964-8996-43-2
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	عنوان اصلی: Engineering circuit analysis, 7th ed < c2006.
یادداشت	:	کتاب حاضر قبلاً توسط ناشرین متفاوت به چاپ رسیده است.
موضوع	:	مدارهای برقی -- تجزیه و تحلیل.
موضوع	:	برقی -- شبکه‌ها -- تجزیه و تحلیل.
شناسه افزوده	:	کمرلی، جک‌الزورث، ۱۹۲۴ - م.
شناسه افزوده	:	Kemmerly, Jack Ellsworth
شناسه افزوده	:	دوربن، استیون
شناسه افزوده	:	Durbin, Steven M
شناسه افزوده	:	سپیدنام، قدرت‌الله، ۱۳۲۴ - مترجم.
رده‌بندی کنگره	:	TK ۴۵۴ / ه۹ ت ۳ ۱۳۸۶ الف
رده‌بندی دیویی	:	۶۲۱/۳۱۹۲
شماره کتابشناسی ملی	:	۱۰۹۳۷۹۱

www.olomrayaneh.net

علوم رایانه بابل، صندوق پستی: ۴۷۱۳۵-۸۹۱ تلفن: ۰۱۱۱-۳۲۶۰۷۷۲

تحلیل مهندسی مدار (ویراست هفتم ـ ۲۰۰۷)

تألیف: ویلیام هیت ـ جک کمرلی ـ استیون دوربن

ترجمه: دکتر قدرت‌الله سپیدنام (عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

ناشر: علوم رایانه

چاپ پنجم (ویراست هفتم - چاپ دوم): پاییز ۱۳۸۸

۲۰۰۰ جلد

شابک: ۲-۴۳-۸۹۹۶-۹۶۴-۹۷۸

حروفچینی و صفحه‌آرایی: علوم رایانه

قیمت: ۱۱۰۰۰ تومان

تهران، خیابان انقلاب، خیابان اردیبهشت، نبش وحید نظری، شماره ۱۴۲ تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴

فهرست مطالب

فصل اول: تحلیل مدار و مهندسی برق

۱-۱ پیشگفتار ۹
۱-۲ مروری بر این کتاب ۱۰
۱-۳ رابطه تحلیل مدار با مهندسی ۱۲
۱-۴ تحلیل و طراحی ۱۲
۱-۵ تحلیل به‌کمک کامپیوتر ۱۳
۱-۶ استراتژی موفق حل مسئله ۱۴
۱-۷ خواندنی‌های کمکی ۱۵

فصل دوم: قطعات اساسی و مدارهای الکتریکی

۲ـ۱ واحدها و مقیاس‌ها ۱۷
۲ـ۲ بار الکتریکی، جریان، ولتاژ و توان ۱۹
۲ـ۳ منابع ولتاژ و جریان ۲۴
۲ـ۴ قانون اهم ۲۸
۲ـ۵ خلاصه فصل و مرور ۳۲
۲ـ۶ خواندنی‌های کمکی ۳۲
مسائل ۳۳

فصل سوم: قوانین ولتاژ و جریان

۳ـ۱ گره‌ها، حلقه‌ها، مسیرها و شاخه‌ها ۳۷
۳ـ۲ قانون جریان کیرشهف ۳۸
۳ـ۳ قانون ولتاژ کیرشهف ۴۰
۳ـ۴ مدار تک‌حلقه‌ای ۴۲
۳ـ۵ مدار زوج تک‌گره ۴۵
۳ـ۶ منابع مستقل سری و موازی ۴۷
۳ـ۷ مقاومت‌های سری و موازی ۴۹
۳ـ۸ تقسیم ولتاژ و جریان ۵۳
۳ـ۹ خلاصه فصل و مرور ۵۵
۳ـ۱۰ خواندنی‌های کمکی ۵۷
مسائل ۵۷

فصل چهارم: تحلیل گره‌ای و مش

۴ـ۱ تحلیل گرهی ۶۷
۴ـ۲ اَبَرگره ۷۴
۴ـ۳ تحلیل مش ۷۷
۴ـ۴ اَبَرمش ۸۲
۴ـ۵ تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه ۸۴
۴ـ۶ تحلیل کامپیوتری مدار ۸۵
۴ـ۷ خلاصه فصل و مرور ۸۹
۴ـ۸ خواندنی‌های کمکی ۹۰
مسائل ۹۰

فصل پنجم: تکنیک‌های مفید تحلیل مدار

۵ـ۱ خطی‌بودن و تجمیع ۹۹
۵ـ۲ تبدیل منابع ۱۰۶
۵ـ۳ مدارهای معادل تونن و نورتن ۱۱۲
۵ـ۴ حداکثر انتقال توان ۱۱۹
۵ـ۵ تبدیل ستاره ـ مثلث ۱۲۱
۵ـ۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها ۱۲۳
۵ـ۷ خلاصه فصل و مرور ۱۲۴
۵ـ۸ خواندنی‌های کمکی ۱۲۵
مسائل ۱۲۵

فصل ششم: تقویت‌کننده عملیاتی

۶ـ۱ پیش‌زمینه ۱۳۵
۶ـ۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل ۱۳۶
۶ـ۳ طبقات پی‌درپی ۱۴۳
۶ـ۴ مدارهای منابع ولتاژ و جریان ۱۴۵
۶ـ۵ ملاحظات عملی ۱۴۸
۶ـ۶ مقایسه‌گرها و تقویت‌کننده‌های وسایل اندازه‌گیری ۱۵۷
۶ـ۷ خلاصه فصل و مرور ۱۵۹
۶ـ۸ خواندنی‌های کمکی ۱۶۰
مسائل ۱۶۰

فصل هفتم: خازن‌ها و القاگرها

۷ـ۱ خازن ۱۶۹
۷ـ۲ القاگر ۱۷۵
۷ـ۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها ۱۸۲

۷_۴ نتایج خطی‌بودن ... ۱۸۵
۷_۵ مدارهای op amp ساده با خازن ... ۱۸۶
۷_۶ دوگانگی ... ۱۸۸
۷_۷ مدل‌سازی خازن‌ها و القاگرها با PSpice ... ۱۹۰
۷_۸ خلاصه فصل و مرور ... ۱۹۲
۷_۹ خواندنی‌های کمکی ... ۱۹۳
مسائل ... ۱۹۳

فصل هشتم: مدارهای RL و RC

۸_۱ مدار RL بدون منبع ... ۲۰۱
۸_۲ خواص پاسخ نمایی ... ۲۰۶
۸_۳ مدار RC بدون منبع ... ۲۰۹
۸_۴ تعمیم دیدگاه ... ۲۱۱
۸_۵ تابع پله واحد ... ۲۱۷
۸_۶ مدارهای RL واداشته ... ۲۲۰
۸_۷ پاسخ طبیعی و واداشته ... ۲۲۲
۸_۸ مدارهای RC واداشته ... ۲۲۷
۸_۹ پیش‌بینی پاسخ مدارهای سوئیچ‌شده متوالی ... ۲۳۱
۸_۱۰ خلاصه فصل و مرور ... ۲۳۶
۸_۱۱ خواندنی‌های کمکی ... ۲۳۷
مسائل ... ۲۳۷

فصل نهم: مدار RLC

۹_۱ مدار موازی بدون منبع ... ۲۴۹
۹_۲ مدار RLC موازی فوق میرا ... ۲۵۳
۹_۳ میرای بحرانی ... ۲۵۷
۹_۴ مدار RLC موازی زیرمیرا ... ۲۶۰
۹_۵ مدار RLC سری بدون منبع ... ۲۶۵
۹_۶ پاسخ کامل مدار RLC ... ۲۶۹
۹_۷ مدار LC بدون اتلاف ... ۲۷۵
۹_۸ خلاصه فصل و مرور ... ۲۷۶
۹_۹ خواندنی‌های کمکی ... ۲۷۷
مسائل ... ۲۷۷

فصل دهم: تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

۱۰_۱ ویژگی‌های توابع سینوسی ... ۲۸۳
۱۰_۲ پاسخ واداشته به توابع سینوسی ... ۲۸۵
۱۰_۳ تابع تحریک مختلط ... ۲۸۸
۱۰_۴ فیزور ... ۲۹۲
۱۰_۵ روابط فیزوری برای R، L و C ... ۲۹۴
۱۰_۶ امپدانس ... ۲۹۸
۱۰_۷ ادمیتانس ... ۳۰۱
۱۰_۸ تحلیل گرهی و مش ... ۳۰۲
۱۰_۹ تجمیع، تبدیل منبع و قضیه تونن ... ۳۰۵
۱۰_۱۰ نمودارهای فیزوری ... ۳۰۹
۱۰_۱۱ خلاصه فصل و مرور ... ۳۱۲
۱۰_۱۲ خواندنی‌های کمکی ... ۳۱۳
مسائل ... ۳۱۳

فصل یازدهم: تحلیل منابع انرژی AC

۱۱_۱ توان لحظه‌ای ... ۳۲۳
۱۱_۲ توان متوسط ... ۳۲۵
۱۱_۳ مقادیر ولتاژ و جریان موثر ... ۳۳۳
۱۱_۴ توان ظاهری و ضریب توان ... ۳۳۷
۱۱_۵ توان مختلط ... ۳۳۹
۱۱_۶ مقایسه واژه‌های توان ... ۳۴۳
۱۱_۷ خلاصه فصل و مرور ... ۳۴۵
۱۱_۸ خواندنی‌های کمکی ... ۳۴۵
مسائل ... ۳۴۵

فصل دوازدهم: مدارهای چندفاز

۱۲_۱ سیستم‌های چند فاز ... ۳۵۱
۱۲_۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم ... ۳۵۳
۱۲_۳ اتصال سه فاز Y-Y ... ۳۵۶
۱۲_۴ اتصال مثلث یا دلتا (D) ... ۳۶۱
۱۲_۵ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز ... ۳۶۵
۱۲_۶ خلاصه فصل و مرور ... ۳۷۲
۱۲_۷ خواندنی‌های کمکی ... ۳۷۳
مسائل ... ۳۷۳

فصل سیزدهم: مدار با کوپل مغناطیسی

۱۳_۱ القای متقابل ... ۳۷۷
۱۳_۲ ملاحظات انرژی ... ۳۸۳
۱۳_۳ ترانسفورماتورهای خطی ... ۳۸۶
۱۳_۴ ترانسفورماتور ایده‌آل ... ۳۹۱
۱۳_۵ خلاصه فصل و مرور ... ۳۹۹
۱۳_۶ خواندنی‌های کمکی ... ۳۹۹
مسائل ... ۳۹۹

فصل چهاردهم: فرکانس مختلط و تبدیل لاپلاس

۱۴_۱ فرکانس مختلط ... ۴۰۷
۱۴_۲ تابع تحریک سینوسی میرا ... ۴۱۰

۱۴_۳ تعریف تبدیل لاپلاس ... ۴۱۳
۱۴_۴ تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده ... ۴۱۵
۱۴_۵ تکنیک‌های عکس تبدیل لاپلاس ... ۴۱۷
۱۴_۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس ... ۴۲۴
۱۴_۷ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی ... ۴۳۰
۱۴_۸ خلاصه فصل و مرور ... ۴۳۲
۱۴_۹ خواندنی‌های کمکی ... ۴۳۳
مسائل ... ۴۳۳

فصل پانزدهم: تحلیل مدار در حوزه s

۱۵_۱ Z(s) و Y(s) ... ۴۳۹
۱۵_۲ تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s ... ۴۴۴
۱۵_۳ تکنیک‌های دیگر در تحلیل مدار ... ۴۴۸
۱۵_۴ قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل ... ۴۵۱
۱۵_۵ کانولوشن ... ۴۵۱
۱۵_۶ صفحه فرکانس مختلط ... ۴۶۰
۱۵_۷ پاسخ طبیعی و صفحه s ... ۴۶۵
۱۵_۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها $H(s) = V_{out}/V_{in}$ ... ۴۷۰
۱۵_۹ خلاصه فصل و مرور ... ۴۷۲
۱۵_۱۰ خواندنی‌های کمکی ... ۴۷۲
مسائل ... ۴۷۳

فصل شانزدهم: پاسخ فرکانس

۱۶-۱ تشدید موازی ... ۴۷۹
۱۶-۲ عرض باند و مدارهای Q بالا ... ۴۸۶
۱۶-۳ تشدید سری ... ۴۹۰
۱۶-۴ دیگر فرم‌های تشدید ... ۴۹۲
۱۶-۵ تغییر مقیاس ... ۴۹۸
۱۶-۶ نمودار بُود ... ۵۰۱
۱۶-۷ فیلترها ... ۵۱۲
۱۶-۸ خلاصه فصل و مرور ... ۵۱۸
۱۶_۹ خواندنی‌های کمکی ... ۵۱۹
مسائل ... ۵۱۹

فصل هفدهم: شبکه‌های دودرگاهی

۱۷_۱ شبکه‌های یک‌درگاهی ... ۵۲۷
۱۷_۲ پارامترهای ادمیتانس ... ۵۳۰
۱۷_۳ چند شبکه معادل ... ۵۳۶
۱۷_۴ پارامترهای امپدانس ... ۵۴۲
۱۷_۵ پارامترهای هیبرید ... ۵۴۶
۱۷_۶ پارامترهای انتقال ... ۵۴۸
۱۷_۷ خلاصه فصل و مرور ... ۵۵۱
۱۷_۸ خواندنی‌های کمکی ... ۵۵۲
مسائل ... ۵۵۲

فصل هجدهم: تحلیل فوریه مدار

۱۸-۱ فرم مثلثاتی سری فوریه ... ۵۵۹
۱۸-۲ استفاده از تقارن ... ۵۶۵
۱۸-۳ پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب ... ۵۶۹
۱۸-۴ فرم مختلط سری فوریه ... ۵۷۱
۱۸-۵ تعریف تبدیل فوریه ... ۵۷۵
۱۸-۶ بعضی از خواص تبدیل فوریه ... ۵۷۸
۱۸-۷ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده ... ۵۸۱
۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی ... ۵۸۵
۱۸-۹ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس ... ۵۸۶
۱۸-۱۰ اهمیت فیزیکی تابع سیستم ... ۵۹۰
۱۸-۱۱ خلاصه فصل و مرور ... ۵۹۵
۱۸_۱۲ خواندنی‌های کمکی ... ۵۹۵
مسائل ... ۵۹۵

پیوست ۱ مقدمه‌ای بر توپولوژی شبکه ... ۶۰۱

پ ۱_۱ درخت‌ها و تحلیل گرهی کلی ... ۶۰۱
پ ۱_۲ تحلیل حلقوی ... ۶۰۵

پیوست ۲ حل معادلات همزمان ... ۶۱۱

پیوست ۳ اثبات قضیه تونن ... ۶۱۵

پیوست ۴ آموزش PSpice ... ۶۱۷

پیوست ۵ اعداد مختلط ... ۶۲۱

پ ۵-۱ عدد مختلط ... ۶۲۱
پ ۵-۲ اتحاد اولر ... ۶۲۳
پ ۵-۳ فرم نمایی ... ۶۲۴
پ ۵-۴ فرم قطبی ... ۶۲۵

پیوست ۶ آموزش مختصر متلب ... ۶۲۷

پیوست ۷ قضایای اضافی در تبدیل لاپلاس ... ۶۳۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ... ۶۳۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ... ۶۳۷

بسم الله الرحمن الرحیم

یکی از پایه‌های توسعه فرهنگی و رشد و شکوفایی استعدادها، مقوله کتاب و کتابخوانی است. نیاز به کتاب به سرعت در حال رشد است و انتشارِ نتیجهٔ مطالعات پژوهشگران و اندیشمندان پاسخگوی این نیاز خواهد بود.

جهت تحقق این امر و گام برداشتن به سمت خودکفایی، چاپ کتب علمی، به‌خصوص در زمینه فنّاوری جدید، یعنی کامپیوتر، که توسعه سایر فنّاوری‌ها نیز به آن وابسته است، ضروری است.

عین اله جعفرنژاد قمی

انتشارات علوم رایانه

مقدمه

توکل بر الطاف بی‌بدیل یکتای بی‌همتا و سلام بر دوستاران اهل علم و قلم. هرچند که به نظررسید نوشتن مقدمه‌ای بر این مکتوب جایگاهی نداشته باشد، و اهل فن، بر علم و توانمندی نویسنده کتاب و دستیارانش وقوف کامل دارند ولی نگاشت چند سطر در راستای آشنایی تازه‌واردان به عرصه مهندسی مدار دریغ نشد.

اعمال دقت وافر و وسواس در انتخاب و معرفی کتاب اولین گام در راستای تهیه این مکتوب بود که مورد پسند عامه و استفاده علاقمندان و اهل فن در این رشته بوده است. دقت در ترجمه متون و بیان آن‌ها با زبانی ساده گام دیگری است که در فرآیند نشر آن برداشته شده است، ضمن آن‌که پایین‌بودن بهای کتاب نیز فراموش نشده است.

در این نسخه از کتاب همچون نسخ اصلی قبل، خواننده با مدارهای dc و ac آشنا شده در راستای تحلیل و طراحی شبکه‌های الکتریکی با قوانین و قضایای موجود آشنا می‌گردد. به‌کارگیری فنون و شگردهای مختلف رایج در تحلیل و طراحی شبکه‌های الکتریکی خواننده را با شیبی ملایم به اوج دانش و فن می‌رساند. مطالب هر فصل و فصول مختلف گام‌به گام و زنجیروار به هم پیوند شده‌اند و بدین ترتیب عواملی چون ناپیوستگی در متن یا در موضوع ذهن خواننده را مشوش نمی‌کنند.

در این ویرایش علاوه بر افزودن اصلاح بر موضوع و متن‌های قبل، خواننده با نرم‌افزار متلب نیز آشنا می‌شود. تمرینان و مسائلی هم در این باب ارائه شده است. مثال‌ها و مسائل متعدد در متن و انتهای هر فصل به درک موضوع تحلیل و طراحی کمک شایانی نموده است. مسائلی که در آخر هر فصل با علامت "ط" (به معنی مسائل طراحی) معرفی شده‌اند می‌توانند به‌وسیله کاربر در طراحی مسائل نمونه به‌کارگرفته شوند.

مع‌الوصف از خوانندگان عزیزی که این کتاب را مطالعه می‌نمایند تقاضا می‌شود هرگونه ارشاد و راهنمایی را دریغ ننمایند و ما را در این امر فرهنگی راهنمایی نمایند.

دکتر قدرت‌الله سپیدنام

(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

فصل اول

تحلیل مدار و مهندسی برق

مفاهیم کلیدی

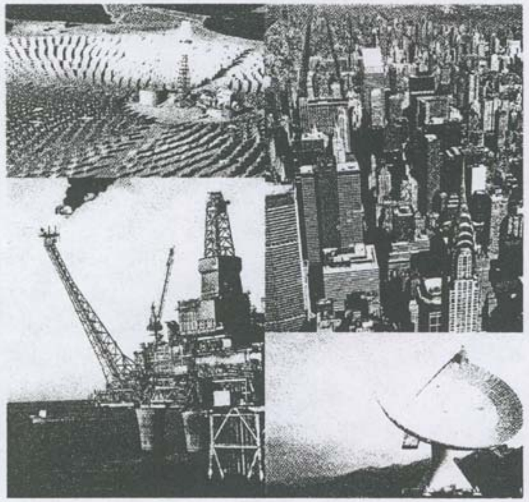
- جنبه‌های تحلیل مدار: تحلیل dc، تحلیل گذرا، تحلیل ac، و تحلیل فرکانس
- تحلیل و طراحی
- تحلیل به کمک کامپیوتر
- استراتژی موفق حل مسئله

۱-۱ پیشگفتار

امروزه فارغ‌التحصیلان مهندسی، تنها به خاطر کار بر روی جنبه‌های طراحی فنیِ مسائل مهندسی، استخدام نمی‌شوند. تلاش آن‌ها اکنون، از خلق کامپیوترها و سیستم‌های مخابراتی بهتر، فراتر رفته و در راستای حل مسائل اقتصادی ـ اجتماعی مانند آلودگی آب و هوا، برنامه‌ریزی شهری، حمل و نقل عمومی، کشف منابع انرژی جدید، نگهداری منابع طبیعی به‌خصوص نفت و گاز طبیعی جهت یافته است.

برای ایفای نقشی موثر در حل این مسائل، مهارت‌های بسیاری لازم است که یکی از آن‌ها، دانش تحلیل مدار الکتریکی می‌باشد. اگر از قبل وارد این‌گونه برنامه‌ها شده باشید یا بخواهید وارد یک برنامه در زمینه مهندسی برق شوید، تحلیل مدار مقدمه‌ای بر این رشته است. اگر با بخش‌های دیگری از مهندسی سروکار دارید، آنگاه تحلیل مدار بخش عمده مطالعات شما را در مهندسی برق شامل می‌شود؛ به‌هرحال، این بحث شما را قادر می‌سازد تا در زمینه‌های الکترونیک، ابزار اندازه‌گیری دقیق و دیگر زمینه‌های مشابه به‌طور موثر کار کنید. مهم‌تر از همه، این امکان فراهم می‌شود تا اطلاعات شما گسترش یافته و در تیمی که بکارِ ساخت دستگاه‌های الکتریکی و سیستم‌های برقی مشغولند، عضو موثری باشید. تبادل اطلاعات موثر در چنین تیمی هنگامی حاصل می‌شود که زبان و مفاهیم به‌کاررفته، برای همگان آشنا باشد.

در این فصل مروری بر عناوین مطرح‌شده در این کتاب خواهیم داشت، و به‌طور خلاصه رابطه بین تحلیل و طراحی و نقشی که ابزارهای کامپیوتری امروزی در تحلیل مدارهای مدرن بازی می‌کنند، بررسی خواهد شد.



۱-۲ مروری بر این کتاب

موضوع اصلی این کتاب درباره **تحلیل مدار خطی** است که بلافاصله برای بعضی از خوانندگان ممکن‌است این سوال را مطرح کند:

"آیا تحلیل مدار غیرخطی وجود دارد؟"

بلی، ما همه روزه با مدارهای غیرخطی مواجه هستیم: این مدارها سیگنال‌ها را برای TV و رادیو گرفته و دیکد می‌نمایند، میلیون‌ها محاسبه را در هر ثانیه در داخل ریزپردازنده انجام می‌دهند، و صدا را برای انتقال از طریق خطوط تلفن به سیگنال‌های الکتریکی تبدیل می‌کنند، و چندین عمل را در بیرون انجام می‌دهند که از دید ما خارج است. در طراحی، تست و پیاده‌سازی چنین مدارهای غیرخطی تحلیل دقیق اجتناب‌ناپذیر است. اکنون ممکن‌است بپرسید:

"پس چرا ما مدارهای خطی را مطالعه می‌کنیم؟"

سوال خوبی است. واقعیتی مسلم از موضوع این‌است‌که هیچ سیستم فیزیکی (از جمله مدارهای الکتریکی) به‌طور ایده‌آل خطی نیست. با این وجود خوشبختانه تعداد زیادی از سیستم‌ها در گستره‌ای محدود رفتاری تقریباً **خطی** دارند و این به ما اجازه می‌دهد تا آن‌ها را به عنوان سیستم‌های خطی با حفظ محدودیت‌ها مدل‌سازی کنیم.

مثلاً تابع آشنای زیر را درنظربگیرید:

$$f(x) = e^x$$

یک تقریب خطی برای این تابع عبارتست‌از:

$$f(x) \approx 1 + x$$

اجازه بدهید ببینیم این چگونه است. جدول ۱-۱ هم مقدار دقیق و هم مقدار تقریبی $f(x)$ را برای محدوده‌ای از x نشان می‌دهد. جالب است، تقریب خطی استثنا تا حدود $x = 0.1$ دقیق است، و خطای نسبی هنوز کمتر از 1% است. گرچه بسیاری از مهندسین با داشتن یک ماشین حساب می‌توانند خیلی سریع عمل کنند ولی مشکل است بتوان ادعا کرد که هر روشی سریعتر از فقط افزودن یک عدد 1 به x می‌باشد.

جدول ۱-۱ مقایسه یک مدل خطی برای e^x با مقدار دقیق.

x	f(x)*	1 + x	**خطای نسبی
0.0001	1.0001	1.0001	0.0000005%
0.001	1.0010	1.001	0.00005%
0.01	1.0101	1.01	0.005%
0.1	1.1052	1.1	0.5%
1.0	2.7183	2.0	26%

* تا چهار رقم اعشار بیان شده است

** خطای نسبی $\triangleq \left|100 \times \frac{e^x - (1 + x)}{e^x}\right|$

مسائل خطی ذاتاً ساده‌تر از نوع غیرخطی‌شان حل می‌شوند. بنابراین به‌عنوان یک مهندس، اغلب به دنبال یافتن روش‌های تقریبی خطی دقیقی (یا مدل‌ها) برای موارد فیزیکی هستیم. علاوه‌برآن مدل‌های خطی ساده‌تر دستکاری شده و درک می‌شوند و لذا طراحی را سرراست‌تر می‌نمایند.

همه مهندسین برق به‌طور روزمره تحلیل مدار را انجام نمی‌دهند، ولی تحلیل‌ها و راهکارها و مهارت‌های حل مسائل آموخته‌شده را از اول حرفه به یاد می‌آورند. یک دوره تحلیل مدار یکی از ابتدایی‌ترین نمایش‌ها برای این مفاهیم است (Solar Mirrors: © Corbis; Skyline: © Getty © Getty Images/J.Luke/PhotoLink)

دستگاه تلویزیون دارای مدارهای متعدد غیرخطی است. بخش عمده‌ای از آن‌ها را می‌توان درک کرده و به کمک مدارهای خطی تحلیل نمود.

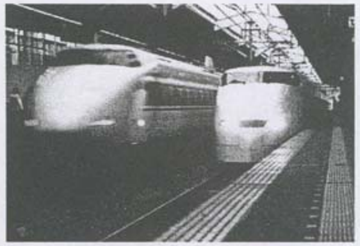
مدارهایی که در فصل‌های بعد با آن‌ها مواجه خواهیم شد، همگی تقریب‌های خطی را برای مدارهای الکتریکی فیزیکی ارائه می‌دهند. هر جه که لازم باشد از کمی دقت و یا محدودیت‌ها برای این مدل‌ها صحبت خواهیم کرد، اما به‌طورکلی، به نظر می‌رسد که آن‌ها دقت مناسبی را برای بسیاری از کاربردها دارا هستند. در مواردی که در عمل، دقت بیشتر لازم باشد، از مدل‌های غیرخطی استفاده می‌شود که این خود پیچیدگی قابل توجهی را در حل مسائل دربر خواهد داشت. بحث دقیق‌تر از آنچه که یک مدار الکتریکی خطی را می‌سازد در فصل ۲ آمده است.

تحلیل مدارهای خطی را می‌توان به چهار بخش تقسیم کرد: **تحلیل مدارهای مقاومتی یا dc**، **تحلیل گذرا**، **تحلیل ac** و **تحلیل حوزه فرکانس**. مطالعه خود را با عنوان مدارهای مقاومتی یا dc آغاز می‌کنیم که می‌تواند مسئله ساده چراغ‌قوه یا یک توستر باشد. بدین ترتیب فرصت خوبی برای آموختن تکنیک‌های متعدد تحلیل مدار مانند تحلیل گره‌ای، تحلیل مش یا تک‌حلقه‌ای، تجمیع، تبدیل منبع، قضیه تونن و قضیه نورتن، همراه با روش‌های جایگزینی قطعاتی از مدار که به صورت سری یا موازیند به‌دست خواهد آمد. مهم‌ترین ویژگی مدارهای مقاومتی این‌است‌که هر کمیت وابسته به زمان موردنظر در این مدارها، نمی‌تواند روال تحلیل را تحت تأثیر قرار دهد. بنابراین اگر مقدار پارامتری در یک لحظه از زمان خواسته شود، نیازی به تحلیل مدار در همه لحظات وجود ندارد. بنابراین ما بیشترین تلاش را در بررسی مدارهای dc خواهیم داشت. در این مدارها پارامترهای الکتریکی با زمان تغییر نمی‌کنند.

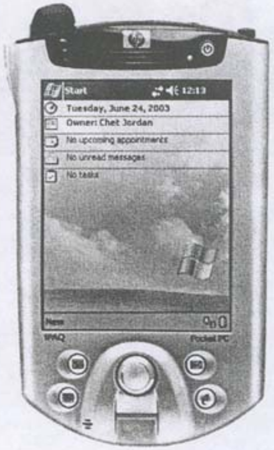
گرچه مدارهای dc مانند چراغ‌قوه یا چراغ مه‌شکن پنجره عقب خودرو در تمام روزهای زندگی اهمیت دارند ولی موارد جالب‌تر هنگامی است که چیزی ناگهان رخ دهد (تصور کنید که چه می‌شد اگر ترقه‌ای ۱۰۰ سال طول می‌کشید تا از وضعیتی آرام به حالت ترق و تروق می‌رفت!). در نحوه تحلیل مدار، منظور ما از تحلیل گذرا[1]، اشاره به روش‌های به‌کاررفته در مطالعه مدارهایی است که ناگهان تحریک می‌شوند یا از کار می‌افتند. برای این‌که این مدارها مورد توجه قرار گیرند ما باید عناصری به مدار اضافه کنیم که به تغییر کمیت‌های الکتریکی واکنش نشان دهد. که این منجر به معادلات مداری می‌شود که در آن‌ها مشتق و انتگرال وجود دارد. خوشبختانه ما می‌توانیم اینگونه معادلات را با استفاده از روش‌های ساده‌ای که در بخش اول مطالعه خود آموخته‌ایم، به دست آوریم.

البته همه مدارهای متغیر با زمان ناگهان خاموش و روشن نمی‌شوند. تهویه هوا، فن‌ها و لامپ‌های فلورسنت تنها چند نمونه از آنچه که روزانه می‌بینیم هستند. در این موارد یک روش مبتنی بر حساب دیفرانسیل برای هر تحلیل می‌تواند خسته‌کننده و وقت‌گیر باشد. خوشبختانه راه‌حل بهتری برای مواردی وجود دارد که به امکانات اجازه داده شده در آن‌ها اثر گذرا طولانی‌تر باشد و به این مورد با تحلیل ac اشاره شده است و گاهی به آن تحلیل فیزور[2] می‌گویند.

بخش آخر مربوط به موضوعی تحت عنوان پاسخ فرکانس است. کار مستقیم با معادلات دیفرانسیل که در حوزهٔ زمان به‌دست آمد به ما کمک می‌کند تا درک سریعی برای عملکرد مدارهای حاوی عناصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی داشته باشیم (به‌عنوان مثال خازن‌ها و القاگرها). با این وجود همان‌طور که خواهیم دید حتی مدارهایی که دارای تعداد نسبتاً کمی از عناصر هستند، می‌توانند به‌هنگام تحلیل مشکل‌زا باشند و بنابراین باید راه مستقیم و مقاوم‌تری یافت. این مطالب مبنای تحلیل در حوزهٔ فرکانس است که به ما اجازه می‌دهد تا معادلات دیفرانسیل را به فرم ساده‌تر معادلات جبری درآوریم. چنین روش‌هایی ما را قادر می‌کنند تا مدارهایی طراحی کنیم که به طریقی خاص، به فرکانس‌های مشخصی پاسخ دهند. ما همه روزه مدارهای وابسته به فرکانس را وقتی که ایستگاه رادیویی خود را انتخاب می‌کنیم، یا از تلفن سکه‌ای استفاده می‌نماییم، و یا به اینترنت وصل می‌شویم به کار می‌بریم.



ترن‌های مدرن به وسیله موتورهای الکتریکی انرژی می‌گیرند. سیستم الکتریکی آن‌ها با روش‌های فیزوری یا ac بهتر تحلیل می‌شود.



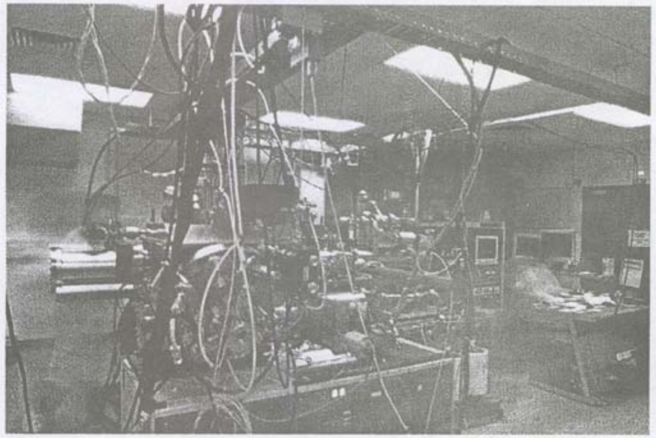
مدارهای وابسته به فرکانس در قلب بسیاری از وسایل الکترونیک قرار دارند و می‌توانند سرگرمی‌های زیادی را در طراحی به وجود آورند.

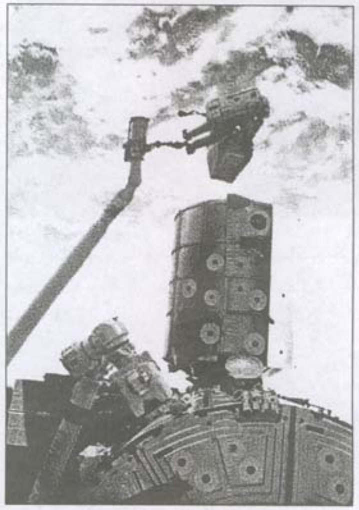
1. transient analysis   2. phasor analysis

۱-۳ رابطه تحلیل مدار با مهندسی

خواه بخواهیم که در تکمیل این بحث تحلیل مدار بیشتری را دنبال کنیم یا نکنیم، ارزشمند است که بدانیم چندین لایه برای مفاهیم تحت مطالعه وجود دارد. ورای پیچ و مهره‌های تکنیک‌های تحلیل مدار فرصت‌هایی وجود دارد که با آن یک روش متدلوژیک برای حل مسئله ایجاد می‌شود، توانمندی تعیین هدف یا اهداف برای یک مسئله خاص معین می‌گردد، مهارت در جمع‌آوری اطلاعات لازم برای یک حل کسب می‌شود و شاید با همان اهمیت، فرصت برای تمرین و آزمایش تصدیق دقت در حل پیش می‌آید.

دانشجویانی که با مطالعه دیگر عناوین مهندسی مانند حرکت سیالات، سیستم‌های تعلیق، طراحی پل، مدیریت‌های تهیه و توزیع، و دیگر فرآیندهای کنترلی آشنا هستند فرم کلی معادلات دیفرانسیلی را که ما برای توصیف رفتار مدارهای مختلف ارائه می‌کنیم تشخیص خواهند داد. ما فقط کافی است متغیرهای مختلف را تبدیل کنیم (به‌عنوان‌مثال، ولتاژ را با نیرو، بار را با فاصله، مقاومت را با ضریب اصطکاک، و غیره جایگزین نمائیم) تا به این ترتیب بدانیم چگونه با یک مسئله جدید کار کنیم. اغلب اگر از کارهای قبلی خود تجربه‌ای اندوخته‌ایم درک شهودی می‌تواند راهنمای ما در حل یک مسئله کاملاً جدید باشد.





مثالی از یک مانیپ‌لاتور (عملگر) روباتی. می‌توان سیستم کنترل پسخوردی را با عناصر مدار خطی برای تعیین شرایط بی‌ثباتی مدل‌سازی کرد.

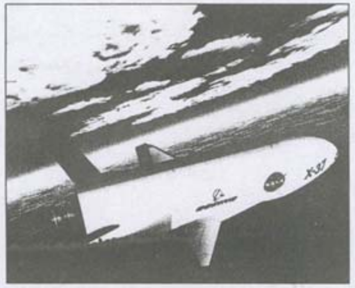
آنچه را که ما در رابطه با تحلیل مدار خطی قصد آموختن آن را داریم، مبنای بسیاری از دوره‌های بعدی مهندسی برق را تشکیل می‌دهد. مطالعه الکترونیک مبتنی است بر تحلیل مدارهای دیودی و ترانزیستوری که در ساخت منابع تغذیه، تقویت‌کننده‌ها و مدارهای دیجیتال به کار می‌روند. این مهارت‌ها که ما در حال پی‌ریزی آن‌ها هستیم قابل استفاده سریع و روش‌مند به وسیله هر مهندس الکترونیک است و نامبرده می‌تواند یک مدار پیچیده را بدون حتی دست‌زدن به یک قلم حل کند! فصل‌های مربوط به حوزه زمان و حوزه فرکانس این کتاب مستقیماً به بحث‌هایی دربارهٔ پردازش سیگنال، خطوط انتقال نیرو، تئوری کنترل، و مخابرات منتهی می‌شود. خواهیم دید که تحلیل حوزه فرکانس به خصوص تکنیکی بسیار قوی است و به سادگی به هر سیستم فیزیکی تحت نیروی وابسته به زمان قابل اعمال است.

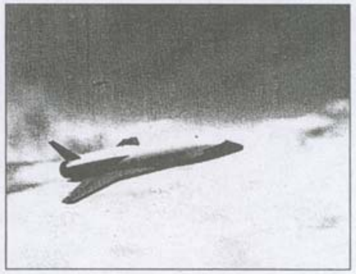
۱-۴ تحلیل و طراحی

مهندسین درکی بنیادی را از اصول دانشمندان کسب می‌کنند، و از ترکیب آن با دانش عملی خود که اغلب به صورت جملات ریاضی بیان می‌شود و با خلاقیت‌های قابل ملاحظه مکرر به

راه‌حلی برای یک مسئله مفروض می‌رسند. **تحلیل** فرآیندی است که از طریق آن ما دیدگاه یک مسئله را فراهم می‌کنیم، اطلاعات لازم را برای درک آن کسب می‌کنیم، و پارامترهای موردنظر را محاسبه می‌نماییم. **طراحی** فرآیندی است که به وسیله آن ما چیزی جدید را به عنوان بخشی از حل مسئله خلق می‌کنیم. کلی‌تر بگوییم این انتظار می‌رود که هر مسئله‌ای که نیاز به طراحی داشته باشد، راه‌حل منحصربه‌فردی ندارد، درحالی‌که فاز تحلیل چنین نیست. بنابراین آخرین گام در طراحی همیشه تحلیل نتیجه است تا مشاهده شود که آیا با مشخصات تطبیق می‌کند یا خیر.

این کتاب بر توسعه توانمندی ما برای تحلیل و حل مسائل توجه دارد زیرا نقطه شروع هر موضوع مهندسی است. فلسفه این کتاب این است‌که ما نیاز به توضیح واضح، مثال‌های به موقع، و تمرینات زیادی برای گسترش چنین توانایی داریم. بنابراین عناصر طراحی در انتهای مسائل آخر فصل و فصل‌های بعدی طوری جمع‌آوری شده است که مسرت‌بخش باشد تا ملال‌آور.



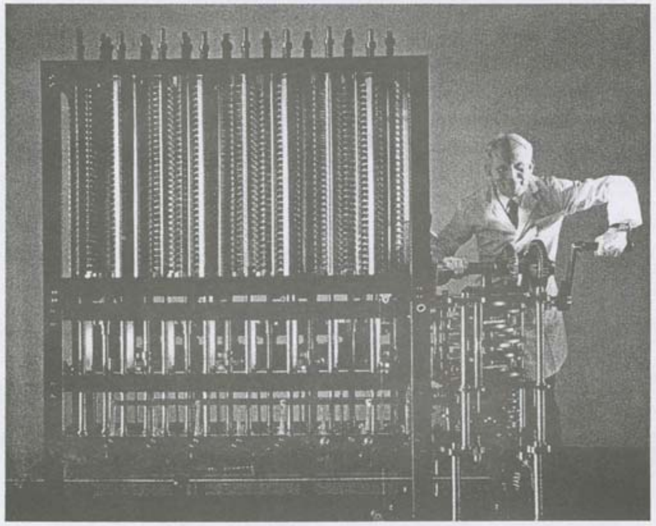


دو طرح پیشنهادی برای نسل بعد فضاپیمای شاتل. گرچه هر دو حاوی اجزای مشابه‌اند، هر کدام منحصربه‌فرد است.

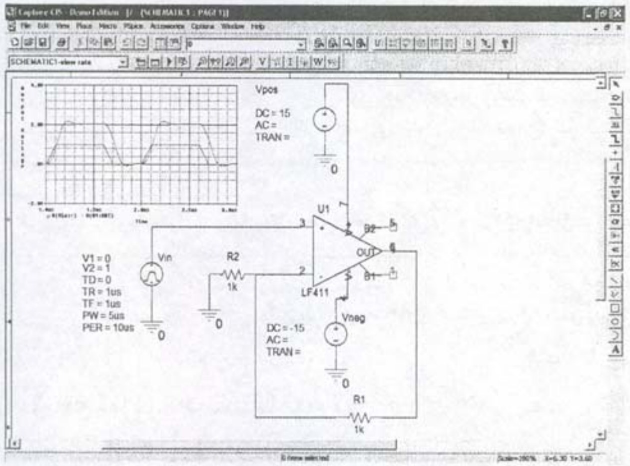
۱-۵ تحلیل به کمک کامپیوتر

حل انواع معادلات که از تحلیل مدارها به دست می‌آیند اغلب حتی برای مدارهای نسبتاً پیچیده مشکل است. البته این احتمال بروز خطا را علاوه‌بر صرف زمان زیاد محاسبات، افزایش می‌دهد. میل به یافتن ابزاری برای کمک به این فرآیند در واقع به قبل از دوره کامپیوترهای الکترونیک برمی‌گردد، که در آن کامپیوترهای کاملاً مکانیکی مانند موتور تحلیل طراحی‌شده به وسیله چارلز ببیج در سال ۱۸۸۰ به عنوان حل‌های ممکن پیشنهاد شد. شاید قدیمی‌ترین کامپیوتر الکترونیک موفق که برای حل معادلات دیفرانسیل طراحی شد، کامپیوتر انیاک در دهه ۱۹۴۰ بود که لامپ‌های الکترونیکی آن یک اطاق بزرگ را پر می‌کرد. با اختراع کامپیوترهای شخصی تحلیل مدار به کمک کامپیوتر به صورت ابزاری ارزشمند نه فقط در تحلیل بلکه در طراحی درآمد.

یکی از ویژگی‌های مهم طراحی به کمک کامپیوتر اجتماع چند برنامه به صورت شفاف برای کاربر است. این امکان اجازه می‌دهد که مدار به‌صورت شماتیک و با سرعت روی صفحه نمایش ظاهر شده و به‌طور خودکار به قالبی که برای برنامه تحلیل لازم است کاهش یابد (مانند



ماشین تفاضلی شماره ۲ چارلز ببیج که در سال ۱۹۹۱ در موزه لندن جمع‌آوری و تکمیل شد.



یک تقویت‌کننده که با بسته نرم‌افزاری اخذ شماتیک تجاری ترسیم شده است. خروجی شبیه‌سازی‌شده وابسته به زمان است.

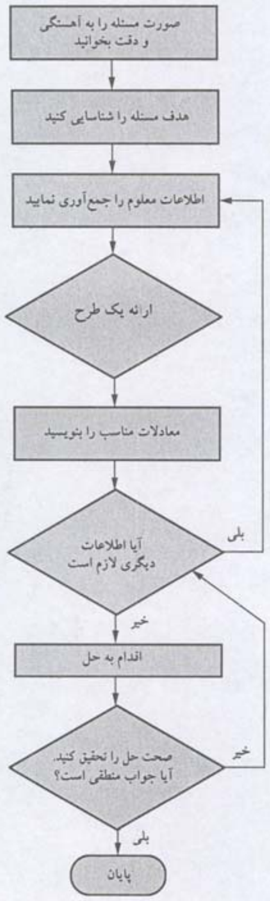
SPICE که در فصل ۴ معرفی شده است). نتایج حاصل به آرامی به برنامه سومی منتقل می‌گردد تا در آن‌جا کمیت‌های مطلوب در مدار موردنظر رسم شود. به محض این‌که مهندس با رفتار ناشی از شبیه‌سازی راضی شد همان نرم‌افزار می‌تواند مدار چاپی را تولید کند و برای اجرای آن از پارامترهای هندسی موجود در کتابخانه استفاده می‌نماید. این سطح از مجتمع کاری سطور پیوسته در حال افزایش است تا جایی که یک مهندس خواهد توانست یک شماتیک را ترسیم کند، چند دکمه را بفشارد و به سمت دیگر میز رفته تا نوع تولیدشده صنعتی مدار را که آماده تست است بردارد.

با این وجود به خواننده گوشزد می‌شود که: به دلایل متعدد نرم‌افزارهای تحلیل مدار به هیچ وجه جایگزین تحلیل دستی قدیمی نمی‌گردند. ما باید درک منسجمی از چگونگی کار مدار داشته باشیم تا بتوانیم آن‌ها را طراحی کنیم. رفتن به سراغ یک بسته نرم‌افزاری خاص و اجرای آن ممکن‌است به ما در رسیدن به یک پاسخ برای سوالی ساده کمک کند، ولی این مشابه یک بازی لاتاری است: با خطاهای تولیدشده انسانی، پارامترهای پنهان پیش‌فرض در منوهای فراوان قابل انتخاب و کمبودهای گهگاه کد نوشته‌شده به وسیله انسان جایگزینی برای داشتن حداقل ایده از رفتار موردنظر مدار وجود ندارد. آن وقت اگر نتایج شبیه‌سازی با آنچه انتظار می‌رود همخوانی نداشته باشد، می‌توان خطا را زودتر از آنکه دیر شود پیدا کنیم. تحلیل کامپیوتری هنوز ابزاری قوی است. این ابزار اجازه می‌دهد تا مقادیر پارامترها تغییر کند و تغییر رفتار مدار ارزیابی شود، و چندین تغییر برای یک طراحی به روشی سرراست مورد ملاحظه قرار گیرد. در نتیجه کارهای تکراری کاهش یافته و فرصت بیشتری برای پرداختن به جزئیات مهندسی وجود خواهد داشت.

۶-۱ استراتژی موفق حل مسئله

هنگامی‌که مأیوس‌کننده‌ترین بخش تحلیل مدار از دانشجویان سوال شود عده زیادی از آن‌ها خواهند گفت، نقطه شروع کجاست. دومین بخشی که مشکل به‌نظر می‌رسد، یافتن مجموعه کاملی از معادلات و سازمان‌دهی آن‌ها می‌باشد به نحوی که قابل مدیریت باشد.

حرکت اصولی در این مورد خواندن سریع صورت مسئله است و سپس باید بلافاصله برای یافتن معادلات مناسب اقدام کرد. در این میان آرزوی زمانی را داریم که قطر دایره‌ای داده‌شده و محیط آن خواسته می‌شد، یا ابعاد یک هرمی را می‌داشتیم و حجم آن را محاسبه می‌کردیم.



گرچه جست‌وجو برای یافتن حل سریع وسوسه‌انگیز است، ولی پافشاری در دنبال‌کردن روشی با قاعده در درازمدت به حل بهتری منجر می‌شود.

چارتی که ملاحظه می‌کنید، برای کمک به حل دو مشکل رایج طراحی شده است: یکی **شروع مسئله** و دیگری **هدایت در راستای حل**. گرچه بعضی از مراحل کاملاً واضح به‌نظر می‌رسد، ولی ترتیب پیشروی و انجام هر مرحله عامل موفقیت در رسیدن به هدف است.

در هر صورت کلید واقعی موفقیت در تحلیل مدار ممرست است. تجربه بهترین معلم است و آموختن از اشتباهات همیشه بخشی از فرآیندی است که فرد یک مهندس موفقی باشد.

۷-۱ خواندنی‌های کمکی

G polya, How to solve it, Princeton University Press, 1971. ISBN: 0691023565. کتابی است ارزان‌قیمت، پرفروش و مشهور و به خواننده چگونگی ایجاد یک استراتژی در حل مسئله را برای مسائل ظاهراً ناممکن می‌آموزد.

فصل دوم

قطعات اساسی و مدارهای الکتریکی

مفاهیم کلیدی

- کمیت‌های اصلی الکتریکی و واحدهای مربوطه: بار، جریان، ولتاژ و توان
- جهت جریان و قطب‌های ولتاژ
- قرارداد علامت غیرفعال برای محاسبه توان
- منابع جریان ولتاژ ایده‌آل
- منابع وابسته
- مقاومت و قانون اهم

مقدمه

موضوع اصلی در این کتاب تحلیل مدارهای الکتریکی و سیستم‌ها است. در ارتباط با یک تحلیل خاص، ما اغلب به دنبال یافتن جریان‌ها، ولتاژها، یا توان‌های خاص هستیم، لذا ما با توصیف خلاصه‌ای از این کمیت‌ها آغاز می‌کنیم. به لحاظ تعداد قطعات مورد استفاده در ایجاد مدارهای الکتریکی، محدودیت زیادی در انتخاب داریم. بنابراین بدون هرگونه غرق‌شدن، ما ابتدا بر **مقاومت**، که قطعه‌ای غیرفعال است، و گستره‌ای از منبع فعال ایده‌آل از ولتاژ و جریان، توجه خواهیم کرد. به تدریج که جلوتر برویم، قطعات جدیدی اضافه خواهند شد، تا مدارهای پیچیده‌تر و مفیدتری مورد بررسی قرار گیرند.

مضمون یک نصیحت سریعی قبل از شروع به بررسی چنین است: به نقش علامت‌های "+" و "−" به هنگام برچسب‌زنی ولتاژها به دقت توجه کنید، و به اهمیت جهت فلش (پیکان) جریان دقت نمایید؛ آن‌ها اغلب پاسخ‌های غلط و صحیح را از هم متمایز می‌کنند.

۲ـ۱ واحدها و مقیاس‌ها

برای بیان هر کمیت قابل اندازه‌گیری باید یک عدد و یک واحد برای آن مشخص کنیم، مانند "۳اینچ". خوشبختانه همه ما از یک سیستم اعداد استفاده می‌کنیم. ولی در سیستم آحاد چنین نیست و برای آشنایی با یک سیستم مناسب باید کمی وقت صرف کرد. ما باید در مورد یک واحد استاندارد به توافق برسیم و از بقاء پذیرش آن توسط عامه مطمئن باشیم. مثلاً واحد استاندارد برای طول نمی‌تواند برحسب فاصله بین دو علامت روی یک نوار لاستیکی تعریف شود، زیرا این تعریف دوام ندارد و علاوه بر آن دیگران هم استاندارد خود را به کار خواهند برد.

در مورد انتخاب سیستم آحاد، دستمان چندان باز نیست. سیستمی که به کار خواهیم برد در سال ۱۹۶۴ به وسیله موسسه ملی استاندارد پذیرفته شد و اکثر جوامع علمی نیز آن‌را به‌کار می‌برند و امروزه کتاب‌ها نیز با زبان آن نوشته می‌شوند. این **سیستم بین‌المللی آحاد** است (که در تمام زبان‌ها با نام اختصاری **SI** خوانده می‌شود). سیستم مذکور در کنفرانس بین‌المللی اوزان و مقادیر در سال ۱۹۶۰ پذیرفته شد. SI بر اساس هفت واحد بنیادی **متر**، **کیلوگرم**، **ثانیه**، **آمپر**، **کلوین**، **مول** و **شمع** پایه‌ریزی شده است (جدول ۲ـ۱ ملاحظه شود). این سیستم که یک سیستم متری است، علی‌رغم این‌که هنوز به‌طور گسترده در ایالات متحده به‌کار نمی‌رود، در بسیاری از کشورهای پیشرفته متداول است. واحد کمیات دیگر مانند حجم، نیرو، انرژی و غیره از این هفت واحد اصلی به‌دست می‌آیند.

واحد اصلی کار یا انرژی **ژول** است (J). یک ژول (یک کیلوگرم متر بر مجذور ثانیه در واحد SI) معادل است با 0.7376 فوت پوند نیرو (ft-lb-f). دیگر واحدهای انرژی از جمله

جدول ۲ـ۱ واحدهای بنیادی SI.

کمیت	نام	نماد
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
جریان الکتریکی	آمپر	A
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K
مقدار ماده	مول	mol
شدت نور	شمع	cd

برای واحدهایی که از نام دانشمندان استفاده شده حروف کوچک به کار رفته، ولی با حروف بزرگ خلاصه شده است.

کالری متعلق به مواد غذایی و نوشیدنی‌ها است و در عمل از کیلوکالری که برابر 4187 ژول است استفاده می‌شود.

کالری (CAL)، معادل است با 4.187 ژول (J): واحد گرمایی انگلیسی (BTU) که برابر است با 1055 ژول و کیلووات ساعت (kWh)، معادل است با 3.6×10^6J . توان به صورت میزان کار انجام‌شده یا انرژی تلف‌شده تعریف می‌شود. واحد اصلی توان با وات (W) تعریف می‌شود که برابر است با یک ژول بر ثانیه. یک وات برابر است با 0.7376 فوت نیرو بر ثانیه (ft-lbf/s) یا معادل است با $\frac{1}{745.7}$ اسب بخار (hp).

SI از سیستم دهدهی برای ارتباط واحدهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر به واحد اصلی استفاده می‌کند و برای نشان‌دادن آن‌ها توان‌هایی از 10 را به‌عنوان پیشوند به کار می‌گیرد. پیشوند و نماد آن‌ها در جدول ۲ـ۲ آمده است. واحدهایی که بیشتر در مهندسی رایج هستند در درون جدول سایه زده شده‌اند.

جدول ۲ـ۲ پیشوندهای SI.

ضریب	نام	نماد	ضریب	نام	نماد
10^{-24}	یوکتو	y	10^{24}	یوتا	Y
10^{-21}	زپتو	z	10^{21}	زتا	Z
10^{-18}	آتو	a	10^{18}	اکسا	E
10^{-15}	فمتو	f	10^{15}	پتا	P
10^{-12}	پیکو	p	10^{12}	ترا	T
10^{-9}	نانو	n	10^{9}	گیگا	G
10^{-6}	میکرو	μ	10^{6}	مگا	M
10^{-3}	میلی	m	10^{3}	کیلو	k
10^{-2}	سانتی	c	10^{2}	هکتو	h
10^{-1}	دسی	d	10^{1}	دکا	da

به‌خاطرسپردن این پیشوندها ارزش دارد زیرا به دفعات در این کتاب و دیگر مقالات تکنیکی به‌کار رفته‌اند. ترکیب چندین پیشوند مانند میلی میکروثانیه پذیرفته نیست. همچنین بهتر است از میکرون (μm) به‌جای میکرومتر و آنگستروم (Å) برای 10^{-10}m استفاده کنیم. بالاخره در تحلیل مدار و به‌طور کلی مهندسی بهتر است اعداد برحسب واحدهای مهندسی بیان شوند. در نمایش مهندسی، یک کمیت به‌وسیله عددی بین 1 و 999 و واحد متریک مناسبی نمایش داده می‌شود. بنابراین برای کمیت 0.048 W به‌جای نمایش آن به‌صورت 4.8 cW یا 4.8×10^{-2} W یا 48000μW می‌نویسیم 48 mW.

تمرین

۲ـ۱ یک لیزر کریپتون فلوراید، نوری با طول موج 248 nm منتشر می‌کند. این مقدار برابر است با:

الف. 0.0248mm ب. 2.48 μm ج. 0.248 μm د. 24,800 Å

۲ـ۲ در یک مدار مجتمع دیجیتال معین، یک گیت منطقی از حالت "روشن" در مدت 1ns به حالت خاموش سوئیچ می‌کند. این زمان برابر است با:

الف. 0.1 ps ب. 10 ps ج. 100 ps د. 1000ps

۲ـ۳ یک لامپ مطالعه با 60 W کار می‌کند. اگر به‌طور ثابت رها شود، هر روز چقدر انرژی مصرف می‌کند (برحسب ژول (J))، و اگر انرژی با میزان هر کیلووات 12.5 سنت محاسبه شود، مصرف هفتگی‌اش چقدر است؟

جواب: ۲ـ۱ (ج)، ۲ـ۲ (د) و ۲ـ۳ (5.18 MJ و $1.26).

۲ـ۲ بار الکتریکی، جریان، ولتاژ و توان

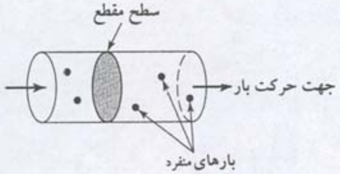
بار

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در تحلیل یک مدار الکتریکی اصل بقاء بار الکتریکی است. با توجه به فیزیک مقدماتی می‌دانیم دو نوع بار وجود دارد: مثبت (مربوط به یک پروتون) و منفی (مربوط به یک الکترون). در بیشتر بخش‌های این کتاب فرض بر این‌است‌که در مدار فقط جریان الکترون وجود دارد. در بسیاری از وسایل یا دستگاه‌ها مانند باطری‌ها، دیودها و ترانزیستورها حرکت بار مثبت برای درک عملکرد درونی مهم است، ولی از دیدگاه بیرونی معمولاً بر حرکت الکترون‌ها از سیم‌های رابط توجه داریم. گرچه بارها دائماً بین بخش‌های مختلف یک مدار انتقال می‌یابند، ولی در مجموع کل بار تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر هنگام به‌کاراندازی یک مدار الکتریکی، ما نه الکترون‌ها (پروتون‌ها) را از بین می‌بریم و نه آن‌ها را ایجاد می‌کنیم. بار الکتریکی متحرک نمایانگر یک **جریان** است.

در سیستم SI واحد اصلی بار **کولن** (C) است. کولن برحسب **آمپر** با شمارش بار کلی که از یک سطح مقطع دلخواه در فاصله زمانی یک ثانیه عبور می‌کند، تعریف می‌شود. یک کولن مقدار بار مربوط به جریان یک آمپر در هر ثانیه است (شکل ۱ـ۲). در این سیستم آحاد یک الکترون دارای بار -1.602×10^{-19} C و یک پروتون دارای بار $+1.602 \times 10^{-19}$ C است.

کمیتی از بار که در طول زمان تغییر نکند با Q نشان داده می‌شود. مقدار بار لحظه‌ای (که ممکن‌است با زمان تغییر کند یا نکند) معمولاً به وسیله q(t) و یا فقط با q نشان داده می‌شود. این قرارداد در سرتاسر مطالب این کتاب رعایت خواهد شد: حروف بزرگ برای کمیت‌های ثابت (ثابت در طول زمان) به کار می‌رود، درحالی‌که حروف کوچک نمایشگر حالات لحظه‌ای است. بنابراین یک بار ثابت را ممکن‌است با Q یا q نشان داد، ولی مقدار باری که در طول زمان تغییر کند حتماً باید با حرف q نشان داده شود.

همان‌طور که از جدول ۱ـ۲ ملاحظه می‌شود واحدهای اصلی SI از کمیات فیزیکی به دست نمی‌آیند در عوض بر اساس اندازه‌گیری منجر به تعاریفی می‌شوند که از گذشته پذیرفته شده‌اند. مثلاً اگر به‌طور فیزیکی آمپر را بر اساس بار الکتریکی تعریف کنیم معقولتر است.



شکل ۱ـ۲ بار جاری در مدار، که تعریف کولن را نشان می‌دهد.

جریان

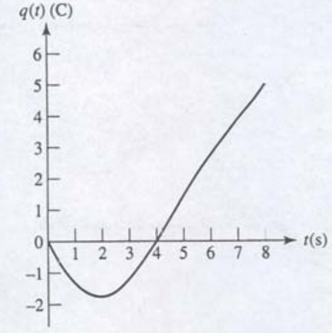
ایدهٔ انتقال بار یا "بار متحرک" اهمیت بسیاری در مطالعه مدارهای الکتریکی دارد زیرا ما در حرکت بار از یک مکان به مکان دیگر، ممکن‌است انرژی را از یک جا به جای دیگری انتقال دهیم. خطوط آشنای انتقال نیروی الکتریکی در سرتاسر کشور مثالی عملی از یک وسیله انتقال انرژی است. تغییر آهنگ انتقال بار برای مبادلهٔ اطلاعات از اهمیت مشابهی برخوردار است. این فرآیند مبنای سیستم‌های مخابراتی، مانند رادیو ـ تلویزیون و تله‌متری (سنجش از راه دور) را تشکیل می‌دهد.

جریان موجود در یک مسیر مجزا مانند یک سیم فلزی، علاوه بر **مقدار عددی**، **جهت** هم دارد. جریان، آهنگ عبور بار از یک نقطه مرجع در یک جهت خاص است.

پس از مشخص‌کردن جهت مرجع، جریان کلی که از $t = 0$ به بعد از یک نقطه مرجع در آن جهت عبور کرده را q(t) می‌نامیم. اگر بار منفی در جهت مرجع و یا باری مثبت در خلاف آن حرکت کند از بار کل کم می‌شود. شکل ۲ـ۲ تاریخچه بار کل q(t)، که از یک نقطه مرجع مفروض در یک سیم عبور کرده است را نشان می‌دهد (مثل آن‌چه در شکل ۱ـ۲ دیدیم).

ما جریان در یک نقطه خاص و جهتی خاص را به‌صورت تغییرات لحظه‌ای بار مثبت کلی که نقطه مذکور در آن جهت عبور می‌کند تعریف می‌کنیم. متأسفانه این جهت مثبت جنبه تاریخی دارد و قبل از این‌که مشخص شود جریان در یک سیم در واقع به دلیل بار منفی است نه مثبت، مورد توجه قرار گرفت. جریان را با I یا i نشان می‌دهیم بنابراین

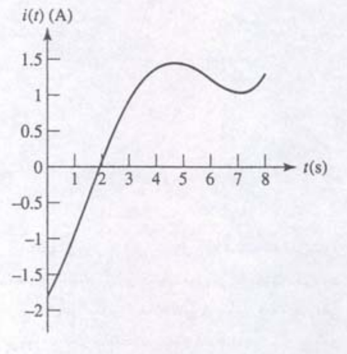
$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$



شکل ۲ـ۲ نمودار مقدار لحظه‌ای کل بار q(t) که از نقطه مرجع از $t = 0$ به بعد عبور می‌کند.

واحد جریان آمپر (A) است، که پس از فیزیکدان فرانسوی ای.ام.آمپر[1] انتخاب شد. امروزه آن را به صورت خلاصه‌تر "amp" نشان می‌دهند هرچند که استفاده از این اختصار رسمیت ندارد.

با استفاده از معادله (۱)، جریان لحظه‌ای را محاسبه کرده و شکل ۲ـ۳ را به‌دست می‌آوریم. استفاده از حرف کوچک i به دلیل مقدار لحظه‌ای آن و حرف بزرگ I به معنی ثابت‌بودن کمیت جریان است.



شکل ۲ـ۳ جریان لحظه‌ای $i = dq/dt$، متناظر با q در شکل ۲ـ۲.

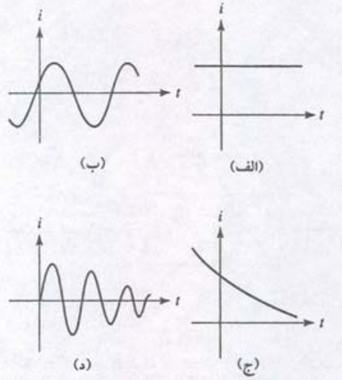
بار انتقالی بین زمان t_0 و t می‌تواند به‌صورت انتگرال معین زیر تعریف شود:

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^{t} i\, dt'$$

بار کل انتقال‌یافته در یک فاصله زمانی با جمع $q(t_0)$ و بار انتقال‌یافته از لحظه t_0 تا t از عبارت زیر حاصل می‌گردد:

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i\, dt' + q(t_0) \qquad (۲)$$

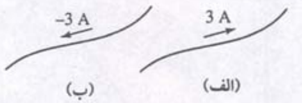
چند نمونه جریان مختلف در شکل ۲ـ۴ نمایش داده شده است. جریانی که در طول زمان ثابت باشد را جریان مستقیم یا ساده‌تر بگوییم dc نامیده و بـا شکـل ۲ـ۴ (الف) نشـان مـی‌دهیم. در بسیاری از موارد عملی تغییرات جریان را نسبت بـه زمـان مطابق شکـل ۲ـ۴ (ب) سینوسی می‌یابیم؛ اینگونه جریان‌ها در مدارهای خـانگی دیـده می‌شوند. جریان‌هایی از ایـن نـوع را جریان متناوب یا ac می‌نامیم. با جریان‌های نمایی و سینوسی میرا (شکـل ۲ـ۴ ج و د) بـعداً مواجه خواهیم شد.



شکل ۲ـ۴ انواع جریان‌ها: (الف) جریان مستقیم (dc)؛ (ب) جـریان سـینوسی (ac)؛ (ج) جـریان نمایی و (د) جریان سینوسی میرا.

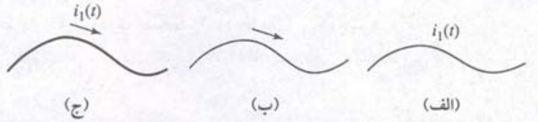
برای نمایش وجود جریان از یک پیکان در کنار حامل آن استفاده می‌کنیم. بنابرایـن در شکل ۲ـ۵ (الف) جهت پیکان و مقدار "۳ آمپر" به این معنی است که بار مثبت ۳+کولن بر ثانیه (C/s) به سمت راست یا بار منفی 3- C/s به سمت چپ حرکت می‌کند. در شکل ۲ـ۵ (ب) هم دو امکان وجود دارد: یا این‌که 3A- به سمت چپ و یا 3A+ به سمت راست حرکت می‌نماید. چهار حالت فوق جریان‌هایی را نشان می‌دهند که آثار الکتریکی آن‌ها یکسان است. یعنی این جریان‌ها برابرند. یک بحث مشابه غیر الکتریکی که ساده‌تر قابل تجسم است حساب پس‌انداز شخصی می‌باشد: مثلاً در یک حساب پس‌انداز می‌توان تصور کرد که جریان نقدینگی منفی به خارج از حساب شما و جریان مثبت به داخل حساب شما می‌آید.

هر چند در رساناها یا هادی‌های فلزی جریان از حرکت الکترون ناشی می‌شود ولی بهتر است که جریان را نتیجه حرکت بـارهای مثبت بـدانیم. در گـازهای یـونیزه، در محلول‌های الکترولیت و در بعضی از مواد نیمه‌هادی بارهای مثبت در حال حرکت، بخشی از جـریان یـا تمام آن را تشکیل می‌دهند. بنابراین هر تعریفی از جریان بر طبیعت فـیزیکی رسـانا مـنطبق است. تعاریف و سمبل‌های معرفی‌شده همگی استاندارد هستند.



شکل ۲ـ۵ دو نمایش از یک جریان.

در این صورت باید توجه کنیم که پیکان جریان نشانگر جهت واقعی نیست بـلکه فـقط بخشی از یک قرارداد است که به ما اجازه می‌دهد درباره "جریان در سیم" بدون ابهام صحبت کنیم. پیکان جزء اصلی جریان است! بنابراین صحبت از $i_1(t)$ بـدون مشخص‌کردن پیکان، بحثی مبهم خواهد بود. به‌عنوان‌مثال شکل‌های ۲ـ۶ (الف و ب) نـمایش‌های نـامفهوم $i_1(t)$ می‌باشند درحالی‌که شکل ۲ـ۶ (ج) روش صحیح نمایش آن است.



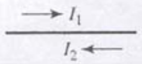
شکل ۲ـ۶ (الف و ب) تعاریف ناقص، غیرصحیح و نامناسب یک جریان. (ج) تعریف صحیح $i_1(t)$.

1. A.M. Ampere

تمرین

۲ـ۴ در سیم شکل ۲ـ۷ الکترون‌ها از چپ به راست برای ایجاد جریان 1 میلی‌آمپر حرکت می‌کنند. I_1 و I_2 را معین کنید.

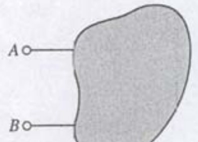
جواب: $I_1 = -1\ \text{mA}$ و $I_2 = +1\ \text{mA}$



شکل ۲ـ۷

ولتاژ

ما اکنون به یک عنصر مداری یعنی چیزی که به‌طورکلی بهترین نقطه شروع است، مـراجـعه می‌کنیم. وسایل الکتریکی مانند فیوز، لامپ، مقاومت، باطری، خازن، مولد و کویل اتومبیل را می‌توان با ترکیب عناصر ساده مداری نشان داد. بحث را با یک عنصر کلی مداری و به‌صورت شیئی نامشخص با دو پایانه قابل اتصال به عناصر دیگر آغاز می‌کنیم (شکل ۲ـ۸).



شکل ۲ـ۸ یک عنصر مداری کلی دو پایانه.

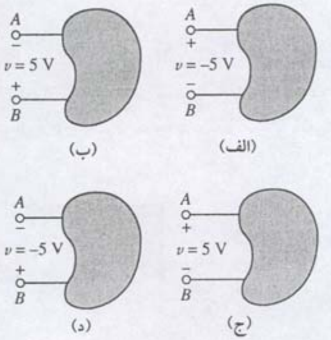
برای ورود یا خروج از این عنصر دو مسیر وجود دارد. در بحث‌های بعد، هـر عـنصر را برای مدار با توصیف مشخصات الکتریکی مشاهده‌شده از این دو پایانه تعریف می‌کنیم.

فرض کنید که در شکل ۲ـ۸ یک جریان dc به پایانه A وارد شده، از عنصر گذشته، و از پایانه B خارج شده است. همچنین فرض کنید که عبور بار از طریق عنصر نیاز به صرف انرژی دارد. آنگاه می‌گوییم بین دو پایانه یک ولتاژ الکتریکی برقرار است **(یا اختلاف پتانسیل)**، و یا این‌که می‌گوییم ولتاژی در دو سر عنصر موجود است: بنابراین ولتـاژ بـین یک جـفت پـایانه معیاری از کار لازم برای عبور بار از عنصر است. واحد ولتاژ ولت، و 1 ولت برابر 1 j/C است. ولتاژ را با V یا v نمایش می‌دهند.

ممکن‌است بین دو پایه الکتریکی، ولتاژ یا اختلاف پتانسیلی موجود باشد، خواه جریان از آن بگذرد یا نگذرد. برای مثال بین پایانه‌های باطری اتومبیل، هر چند کـه بـهم وصـل نـشده باشند، 12 ولت اختلاف پتانسیل وجود دارد.

بنابر اصل بقاء انرژی، انرژی مصرف‌شده برای عبور بارها از عنصر باید در جایی ظـاهر گردد. بعداً ضمن برخورد با عناصر مداری خاص خواهیم دید کـه ایـن انـرژی یـا در عـنصر ذخیره می‌شود، که در این صورت می‌توان آن را باز هم به صورت یک انرژی الکتریکی باز پس گرفت، و یا به‌طور برگشت‌ناپذیر به گرما، انرژی صوتی یا یک انرژی غیر الکتریکی دیگر تبدیل می‌گردد.

اکنون باید قراری را بنیان بگذاریم که بر اساس آن بـتوان انـرژی کـه بـه یک عـنصر داده می‌شود را از انرژی که به وسیله عنصر تولید می‌گردد تفکیک کرد. ما این کار را بـا تـخصیص علامت ولتاژ برای پایانه A نسبت به پایانه B انجام می‌دهیم. اگر جریان مثبتی وارد پـایانه A بشود، و منبع انرژی برای عبور آن انرژی مصرف کند، آنگاه پایانه A نسبت به پایانه B مثبت خواهد بود. برعکس می‌توان گفت پایانه B نسبت به پایانه A منفی است.

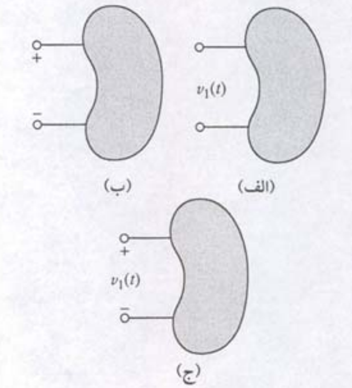


شکل ۲ـ۹ (الف و ب) پایانه B نسبت به پایانه A، 5 ولت مثبت است. (ج و د) پایانه A نسبت به پایانه B، 5 ولت مثبت است.

جهت ولتاژ با یک جفت علامت جبری مثبت و منفی نمایش داده می‌شود. به‌عنوان‌مثال در شکل ۲ـ۹ (الف) استقرار علامت مثبت در پایانه A به این معنی است که پایانه A بـه انـدازه v ولت نسبت به پایانه B مثبت است. اگر بعداً دریابیم که v دارای مقدار عـددی 5V- مـی‌باشد، آنگاه می‌توانیم بگوییم که A به اندازهٔ 5V- نسبت به B مثبت ست و یا این‌که B نسبت به اندازه 5V نسبت به A مثبت می‌باشد. دیگر حالات در شکل ۲ـ۹ (ب، ج و د) دیده می‌شوند.

همان‌طور که در مورد تعریف جریان اشاره شد، لازم است بدانیم که علامت جبری مثبت یا منفی، پلاریته واقعی ولتاژ را مشخص نمی‌کند بلکه ما را توانامی‌سازد تا در مورد ولتاژ دو سر جفت

پایانه‌ها بدون ابهام صحبت کنیم. توجه: **تعریف هر ولتاژ باید همراه با جفت علامت مثبت و منفی باشد!** استفاده از کمیت $v_1(t)$ بدون این‌که علامت مثبت و منفی آن مشخص باشد به معنی استفاده از یک کمیت تعریف نشده است. شکل‌های ۱۰ـ۲ (الف و ب) ولتاژ v_1 را تعریف نمی‌کنند ولی شکل ۱۰ـ۲ (ج) این ولتاژ را تعریف می‌نماید.

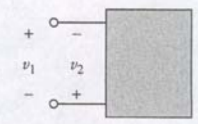


شکل ۱۰ـ۲ (الف و ب) این‌ها تعاریف نامناسبی از یک ولتاژاند. (ج) تعریف صحیح شامل هر دو سمبل برای متغیر و یک جفت علامت مثبت ـ منفی.

تمرین

۵ـ۲ برای عنصر شکل ۱۱ـ۲، $v_1 = 17V$ است. v_2 را معین کنید.

جواب: $v_2 = -17V$



شکل ۱۱ـ۲

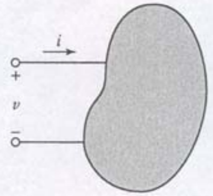
توان

اکنون می‌خواهیم توان جذب‌شده در هر عنصر را برحسب ولتاژ و جریان آن عنصر معین کنیم. ولتاژ را قبلاً برحسب انرژی مصرفی تعریف کردیم و توان میزان تغییرات انرژی مصرفی بود. با این وجود راجع‌به مصرف انرژی در چهار حالت شکل ۹ـ۲ هیچ صحبتی نمی‌توان کرد، مگر این‌که ابتدا جهت جریان مشخص شود. تصور کنید پیکان جریان در امتداد هر یک از سیم‌های بالایی به سمت راست با "+2A" رسم شده باشد. سپس، چون در دو حالت (ج) و (د) پایانه A، ۵ولت نسبت به پایانه B مثبت‌تر است، و چون یک جریان مثبت وارد پایانه A می‌شود، انرژی به عنصر **تحویل** شده است. در دو حالت باقیمانده عنصر انرژی را به بعضی از وسایل متصل به آن منتقل می‌سازد.

قبلاً توان را تعریف کردیم و از این پس آن را با P یا p نشان خواهیم داد. اگر در انتقال یک کولن بار از یک وسیله، یک ژول انرژی در یک ثانیه مصرف شود، در این‌صورت انرژی مصرفی یک وات است. توان جذب‌شده باید با جریان (تعداد بار جابه‌جایی در یک ثانیه) و با ولتاژ (انرژی لازم برای انتقال یک کولن بار از عنصر) متناسب باشد. بنابراین

$$p = vi \qquad (۳)$$

از لحاظ بُعد، سمت راست این معادله حاصل‌ضرب ژول بر کولن ضربدر کولن بر ثانیه است که بُعد مورد انتظار ژول بر ثانیه یا وات را تولید می‌کند. توافق‌های مربوط به جریان، ولتاژ، توان در شکل ۱۲ـ۲ دیده می‌شود.



شکل ۱۲ـ۲ توان جذب‌شده به وسیله عنصر با حاصل‌ضرب $p = vi$ داده می‌شود. برعکس می‌توان گفت که عنصر توان $-vi$ را تولید می‌نماید.

ما اکنون عبارتی برای توان داریم که به وسیله عنصر مدار جذب می‌شود و برحسب ولتاژ دو سر آن و جریان عبوری از آن است. ولتاژ برحسب انرژی هزینه‌شده تعریف شد و توان میزان تغییر انرژی هزینه شده است. با این وجود نمی‌توان عباراتی را در هر یک از چهار حالت در شکل ۹ـ۲ ارائه کرد، مگر این‌که مثلاً جهت جریان مشخص گردد. اجازه بدهید که پیکان (جهت) جریان در راستای هر سیم فوقانی و به سمت راست بوده و با "+2 A" برچسب خورده باشد. ابتدا حالت شکل ۹ـ۲ (ج) را درنظربگیرید. اگر پایانه A برابر 5 V مثبت نسبت به پایانه B باشد، به این معنی است که 5 J انرژی برای حرکت هر کولن بار مثبت به پایانه A لازم است، سپس به داخل شیء رفته و از پایانه B خارج می‌گردد. چون ما جریان +2 A را به پایانه A تزریق می‌کنیم (جریان 2کولن بار در هر ثانیه)، پس ما $(5\ J/C) \times (2\ C/s) = 10\ J$ کار را روی شیء انجام می‌دهیم. به بیان دیگر، شیء 10 W توان را از هر چیزی که جریان را تزریق می‌کند، جذب می‌نماید.

از بحث قبل می‌دانیم که تفاوتی میان شکل ۹ـ۲ (ج) و شکل ۹ـ۲ (د) وجود ندارد، بنابراین انتظار داریم که شکل ترسیم‌شده در ۹ـ۲ (د) هم 10 W انرژی را جذب کند. ما می‌توانیم به سادگی این را چک کنیم: ما +2 A جریان را در پایانه A تزریق کرده‌ایم، بنابراین +2 A جریان از پایانه B خواهیم داشت. راه دیگر بیان این مطلب این‌است‌که بگوییم −2 A جریان به پایانه B تزریق شده است. باید −5 J/C را صرف حرکت بار از پایانه B به پایانه A نمود، بنابراین شیء $(-5\ J/C) \times (-2\ C/c) = 10\ W$ انرژی را همان‌طور که انتظار می‌رود، جذب کرده

است. تنها مشکل در توصیف این حالت خاص نگه‌داشتن علامت منفی است، ولی با کمی دقت می‌بینیم که پاسخ صحیح جدا از انتخاب پایانه مرجع مثبت حاصل می‌گردد (پایانه A در شکل ۹ـ۲ (ج) و پایانه B در شکل ۹ـ۲ (د)).

اکنون اجازه بدهید تا به وضعیت شکل ۹ـ۲ (الف) با +2 A بازگردیم که به پایانه A تزریق شده است. چون برای حرکت بار از پایانه A به B، −5 J/C انرژی لازم است، شیء $(-5\ J/C) \times (2\ C/s) = -10\ W$ را جذب می‌نماید. راستی این به چه معنی است؟ چگونه یک شیء توان منفی جذب می‌نماید؟ اگر ما در این مورد برحسب انتقال انرژی صحبت کنیم، −10 J در هر ثانیه از طریق پایانه A با جریان 2 A، −10 J به شیء انتقال می‌یابد. در واقع شیء انرژی را از دست می‌دهد و سرعت آن 10 J/s است. به بیان دیگر، 10 J/s (یعنی 10 W) را به چند شیء دیگر که در شکل نشان داده نشده تحویل می‌دهد. پس توان منفی جذب‌شده معادل با توان مثبت تحویل‌شده است.

شکل ۱۲ـ۲ نشان می‌دهد که اگر یک پایانه عنصر v ولت مثبت‌تر از پایانه دیگر باشد، و اگر جریان i از طریق آن پایانه وارد عنصر شود، آن‌گاه توانی برابر با $p = vi$ به‌وسیله عنصر جذب می‌شود. همچنین می‌توان گفت که توان $p = vi$ به این عنصر انتقال یافته است. اگر پیکان جریان در پایانه با علامت مثبت و به طرف داخل عنصر باشد، **قرارداد علامت عناصر غیرفعال** رعایت شده است. این قرارداد را باید خوب مطالعه کرد، فهمید و به‌خاطر سپرد. به عبارتی دیگر این قرارداد چنین می‌گوید که اگر پیکان جریان ورود آن را به پایانه مثبت نشان دهد، حاصل‌ضرب مقدار جریان و مقدار ولتاژ تعیین‌شده با توجه به این علائم، **توان داده‌شده به عنصر** خواهد بود. اگر علامت این حاصل‌ضرب منفی باشد عنصر توان منفی جذب کرده و یا در واقع توان تولید نموده است. مثلاً در شکل ۱۲ـ۲، $v = 5V$ و $i = -4A$، عنصر ممکن‌است به‌عنوان جذب‌کننده -20W و یا تولیدکننده +20W توصیف گردد.

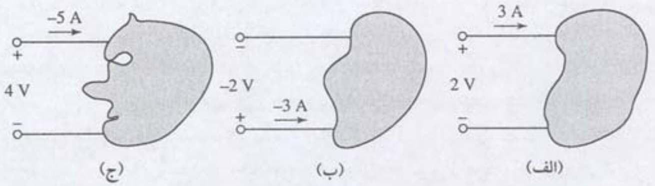
اگر پیکان جریان به سمت پایانه "+" عنصر باشد، آنگاه $p = vi$ توان مصرفی است. مقدار منفی درواقع بیانگر توان تولیدشده به وسیله آن عنصر می‌باشد. بهتر است جهت جریان را به صورت جریان خارج‌شده از پایانه "+" تعریف کنیم.

اگر پیکان جریان به سمت خارج پایانه + یک عنصر باشد، آنگاه $p = vi$ توان تولیدی است. یک مقدار منفی در این حالت بیانگر توان جذب‌شده می‌باشد.

توافق‌ها موقعی مورد لزومند که برای انجام کاری بیش از یک راه وجود داشته باشد، و اگر دو گروه مختلف سعی در انجام آن کنند دوگانگی پیش می‌آید. مثلاً نوشتن "شمال" در بالای یک نقشه امری است اختیاری و عقربه قطب‌نما هم در هر صورت رو به بالا نیست. اکنون فکر کنید اگر با کسانی که قرارداد مخالفی را انتخاب کرده و "جنوب" را در بالای نقشه خود قرار می‌دهند صحبت کنیم چه پیش خواهد آمد! به نحوی مشابه انجمن مهندسین برق والکترونیک IEEE [1] قرارداد کرده‌اند که همیشه پیکان جریان را به سمت پایانه ولتاژ مثبت نشان دهند خواه عنصر جاذب و یا تولیدکننده توان باشد. این قرارداد غلط نیست ولی گاهی در جهت مخالف جریان‌هایی است که روی نمودار مدار مشخص شده‌اند. دلیل این‌است‌که انتخاب جهت مثبت جریان به بیرون از منبع ولتاژ یا جریانی که توان مثبتی را به یک یا چند عنصر مدار می‌رساند طبیعی‌تر است.

مثال ۱ـ۲

توان جذب‌شده به وسیله هر بخش از شکل ۱۳ـ۲ را محاسبه کنید.



شکل ۱۳ـ۲ مثال‌هایی از عناصر دو پایانه.

1. Institute of Electrical and Electronic Engineers

در شکل ۱۳ـ۲ (الف) می‌بینیم که جریان مرجع با قرارداد علامت عناصر غیرفعال تطابق دارد و لذا فرض می‌شود که عنصر جاذب توان است. با جریانی معادل 3A+ به داخل پایانه مرجع مثبت چنین محاسبه می‌کنیم.

$$P = (2\ \text{V})(3\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$

که میزان توان جذب‌شده به وسیله عنصر است.

شکل ۱۳ـ۲ (ب) تصویر نسبتاً متفاوتی را نشان می‌دهد. اکنون جریان 3A- را بـه داخـل پایانه مرجع مثبت داریم. ولی ولتاژ هم به‌صورت منفی تعریف شده است. این انـتخاب تـوان جذب‌شده زیر را خواهد داد.

$$P = (-2\ \text{V})(-3\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$

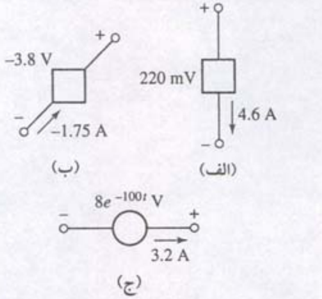
پس در واقع این دو حالت معادلند. ما جای پایانه مثبت را عوض کرده‌ایم پس باید ولتاژ اصلی را در 1- ضرب کنیم. جریان 3A+ که به داخل پایانه بالایی وارد می‌شود هـمان جـریان 3A+ خارج‌شده از پایانه پایینی است، یا به‌طور معادل این آخری برابر است با جـریان 3A- کـه بـه داخل پایانه پایینی وارد می‌شود.

در شکل ۱۳ـ۲ (ج) باز قرارداد عناصر غیرفعال رعـایت شـده است. تـوان جـذب‌شده را به‌دست می‌آوریم.

$$P = (4\ \text{V})(-5\ \text{A}) = -20\ \text{W}$$

چون توان جذب‌شده منفی است، پس در واقع عنصر شکـل ۱۳ـ۲ (ج)، 20W+ تـوان تـولید می‌کند (یعنی منبع انرژی است).

تمرین



شکل ۱۴ـ۲

۶ـ۲ توان جذب‌شده به‌وسیله عنصر مدار شکل ۱۴ـ۲ (الف) را پیدا کنید.

۷ـ۲ توان تولیدشده به وسیله عنصر مدار شکل ۱۴ـ۲ (ب) را به‌دست‌آورید.

۸ـ۲ توان انتقال‌یافته به عنصر مدار شکل ۱۴ـ۲ (ج) در t = 5 ms چقدر است؟

جواب: 1.012 W، 6.65 W و 15.53 W-

۳ـ۲ منابع ولتاژ و جریان

اکنون می‌توان با استفاده از مفاهیم جریان و ولتاژ، تعریف دقیق‌تری از عنصر مداری ارائه نمود.

تفکیک یک عنصر فیزیکی از مدل ریاضی آن بسیار مهم است. به کمک این مدل ریاضی رفتار عنصر را در یک مدار تحلیل می‌کنیم. مدل فقط یک تقریب است.

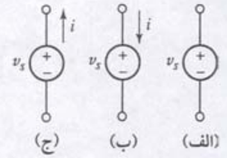
از این به بعد عبارت "عنصر مداری" را تنها برای مدل ریاضی به‌کار خواهیم برد. انتخاب یک مدل خاص برای هر وسیله واقعی باید بر اساس داده‌های آزمـایشی یـا تـجربه بـاشد. در این‌جا فرض می‌کنیم که این انتخاب قبلاً انجام شده است. در آغاز به‌خاطر سادگی، مدارهایی را بررسی خواهیم کرد که اجزای ایده‌آل دارند و با مدل‌های ساده نمایش داده می‌شوند.

بنا بـه تـعریف، یک عـنصر مـداری سـاده، مـدل ریاضی یک وسیله الکتریکی دو پایانه است و کاملاً با رابطه ولتاژ ـ جریان خود مشخص می‌شود و نمی‌توان آن را به اجزای جزئی‌تر دو پایانه تجزیه کرد.

همه عناصر یک مـدار سـاده بـر طـبق رابـطه جـریان درون آن بـه ولـتاژ دو سـرش قـابل دسته‌بندی است. مثلاً اگر ولتاژ دو سر عنصر به‌طور خطی با جریان درون آن متناسب باشد آن عنصر را یک مقاومت می‌خوانیم. دیگر انواع عناصر مداری ساده مـمکن‌است دارای ولـتاژی متناسب با **مشتق** جریان نسبت به زمان باشند (مثل یک القاگر) یا ممکن‌است متناسب با **انتگرال** جریان نسبت به زمان باشد (مثل یک خازن). همچنین عناصری وجود دارند که به‌کلی ولـتاژ آن‌ها از جریانشان مستقل است و یا این‌که جریان مستقل از ولتاژ می‌باشد که بـه آن‌هـا **مـنابع مستقل** می‌گویند. به‌علاوه گاهی لازم است انواع خاصی از منابع را تعریف کـنیم کـه در آن‌هـا ولتاژ یا جریان منبع به ولتاژ یا جریان بخش دیگری از مدار وابسته است. چنین منابعی را منابع

وابسته می‌خوانند. **منابع وابسته** به میزان قابل توجهی در الکترونیک برای مدل‌سازی dc و ac رفتار ترانزیستورها به‌خصوص در مدارهای تقویت‌کننده به کار می‌روند.

منابع ولتاژ مستقل



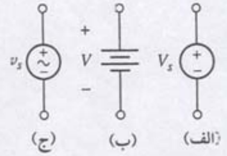
شکل ۱۵ـ۲ سمبل مداری یک منبع ولتاژ مستقل.

اولین عنصر مورد بررسی، **منبع ولتاژ مستقل** می‌باشد. سمبل مداری منبع ولتـاژ مـستقل در شکل ۱۵ـ۲ (الف) نشان داده شده است، زیرنویس s نشان می‌دهد که این ولتاژ، ولتاژ یک منبع می‌باشد و به کارگیری آن فقط متداول است ولی الزامی نیست. مشخصه یک **منبع ولتاژ مستقل این‌است‌که ولتاژ پایانه‌اش کاملاً مستقل از جریان عبوری از آن است.** بنابراین اگر منبع ولتاژ مستقلی مفروض باشد و مشخص گـردد کـه ولـتاژ پـایانه 12 V دارد، آن‌گـاه هـمواره فـرض خواهیم کرد این ولتاژ، مستقل از جریان جاری شده در آن است.

منبع ولتاژ مـستقل منبعی ایده‌آل است و هیچ وسیله فیزیکی واقعی را نمایش نمی‌دهد زیرا منبع ایده‌آل به‌طور تئوری مقدار انرژی بی‌نهایتی را به پایانه‌هایش منتقل می‌سازد. با این وجود این منبع ولتاژ ایده‌آل تعبیر خوبی برای انواع منابع ولتاژ عملی است. مثلاً باطری یک اتومبیل دارای ولتاژ پایانه 12 V است و مادامی که جریان آن از چـند آمـپر تـجاوز نکـند ثـابت بـاقی می‌ماند. در باطری ممکن‌است جریان از هر دو جهت عبور کند. اگر جریان مثبت باشد و بـه خارج از پایانه مثبت جریان یابد، آن‌گاه باطری به‌عنوان مثال توانی را به چراغ‌ها ارسال می‌دارد. اگر جریان مثبت به داخل پایانه مثبت وارد شود در این‌صورت باطری با جذب انرژی از دینام در حال شارژشدن است. یک پریز برق خانگی نیز یک منبع ولتاژ مـستقل را بـه‌طور تـقریبی نشان می‌دهد و ولتاژی برابر با $v_s = 115\sqrt{2}\cos 2\pi 60t$ V را فراهم می‌سازد. مشروط بر این‌که جریان کمتر از 20A و نظایر آن باشد.

آیا هرگز توجه کرده‌اید که وقتی دستگاه تـهویه مطبوع روشن مـی‌شود، لامپ اتـاق کـم‌نور مـی‌گردد. دلیل این‌است‌که تغییر جریان بزرگ ناگهانی منجر بـه افت ولتاژ می‌گردد. پس از راه‌افـتادن مـوتور، جـریان کمتری برای حفظ گردش آن لازم است. در ایـن حـال، جریان مورد تقاضا کاهش می‌یابد و ولتـاژ بـه مـقدار اولیه‌اش باز می‌گردد و مجدداً به عنوان یک منبع ولتاژ ایده‌آل عمل خواهد کرد. پریز برق تقریب خوبی از یک منبع ولتاژ ایده‌آل است.

بیان نکته‌ای ارزشمند این‌است‌که علامت مثبت در انتهای بالایی فاز در شکل ۱۵ـ۲ (الف) لزوماً به معنی مثبت‌تربودن پایانه بالایی نسبت به پایینی نیست، بلکه به این معنی است که پایانه بالایی نسبت به پایینی v_s ولت مثبت‌تر می‌باشد. اگر در یک لحظه v_s منفی شود، آن‌گـاه پـایانه بالایی در واقع نسبت به پایینی در آن لحظه منفی‌تر است.



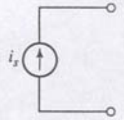
شکل ۱۶ـ۲ (الف) سمبل منبع ولتاژ، (ب) سمبل باطری و (ج) سمبل منبع ولتاژ ac.

پیکان جریان "i" را که در کنار هادی بالایی منبع طق شکل ۱۵ـ۲ (ب) قرار دارد، ملاحظه کنید. جریان i وارد پایانه‌ای می‌شود که علامت مثبت روی آن گذاشته شـده، قـرارداد عـلامت عـناصر غیرفعال در مورد آن صادق بوده و منبع، توان $p = v_s i$ را جذب می‌کند. اغلب انتظار داریم که یک منبع توانی را به یک شبکه انتقال دهد و نه آن‌که آن را جذب نماید. درنتیجه ما ممکن‌است پیکان را طبق شکل ۱۵ـ۲ (ج) انتخاب کنیم به‌نحوی که $v_s i$ توان تأمین‌شده به‌وسیله منبع باشد. معمولاً هر جهتی برای پیکان قابل انتخاب است. ما در ایـن کـتاب بـرای مـنابع جـریان و ولـتاژ قـرارداد شکل ۱۵ـ۲ (ج) را انتخاب می‌کنیم زیرا معمولاً آن‌ها وسایل غیرفعال درنظرگرفته نمی‌شوند.

عبارت‌هایی مانند "ولتاژ dc" و "منبع جریان dc" زیاد به‌کار می‌روند. در مقالات از آن‌ها به ترتیب با نام مـنبع ولتـاژ، ولتـاژ مسـتقیم، مـنبع جـریان و جـریان مستقیم یاد می‌شود. گـرچـه ایـن جـملات مـمکن‌است غـیرعادی و حـتی بـیخود بـه‌نظربرسند ولی ایـن اصطلاحات به‌طورگسترده به‌کاررفته و دلیـلی بـرای مقابله با آن‌ها نیست.

یک منبع ولتاژ مستقل با ولتاژ پایانه ثابت اغلب به‌نام منبع ولتاژ dc مستقل خوانده می‌شود و مـی‌توانـد بـه‌وسیله هـر یک از نـمادهای شکـل ۱۶ـ۲ (الف و ب) نـمایش داده شـود. در شکل ۱۶ـ۲ (ب) دقت کنید. ساختار فـیزیکی جـوشن بـاطری تـداعـی‌شده و در آن جـوشن بزرگ‌تر به پایانه مثبت متعلق است، در این حـالت عـلامت‌های مـثبت و مـنفی دیگـر نـقشی ندارند، ولی معمولاً در شکل لحاظ می‌شوند. در خاتمه و به منظور تکمیل مـطلب، نـماد یک منبع ولتاژ ac مستقل هم در شکل ۱۶ـ۲ (ج) نشان داده شده است.

منابع جریان مستقل



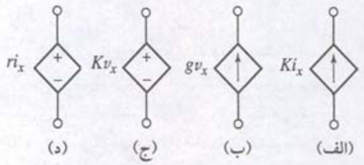
شکل ۱۷ـ۲ سمبل مداری برای منبع جریان مستقل.

منبع ایده‌آل بعدی که نیاز داریم **منبع جریان مستقل** است. در این‌جا جریان عبوری از عنصر کاملاً مستقل از ولتاژ دو سر آن است. نماد یک منبع جریان مستقل در شکل ۱۷ـ۲ دیده می‌شود

اگر i_s ثابت باشد، ما منبع را منبع جریان dc مستقل خواهیم خواند. منبع جریان ac اغلب با یک نشانه پیکان مشابه با منبع ولتاژ شکل ۱۶ـ۲ (ج) نشان داده می‌شود. همچون منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل هم برای یک عنصر فیزیکی به‌طور تقریب بیان می‌شود. به‌صورت تئوری، منبع می‌تواند بی‌نهایت انرژی را از پایانه‌هایش منتقل کند، زیرا ولتاژ دو سرش هر چه‌قدر بزرگ باشد، جریان ثابتی را تولید می‌نماید. در هر صورت این تعریف، تقریب خوبی برای بسیاری از مدارهای عملی خصوصاً در مدارهای الکتریکی است.

گرچه بسیاری از دانشجویان با داشتن یک منبع ولتاژ مستقل که ولتاژ ثابتی تهیه کند خوشحال به نظر می‌رسند، ولی در واقع این اشتباه است که یک منبع جریان با ولتاژ صفر در دو سرش که جریان ثابتی می‌دهد را مستقل فرض کرد. در واقع ما پیشاپیش نمی‌دانیم که ولتاژ دو سر آن چه خواهد بود ـ یعنی این کلاً به مدار متصل به آن مربوط است.

منابع وابسته



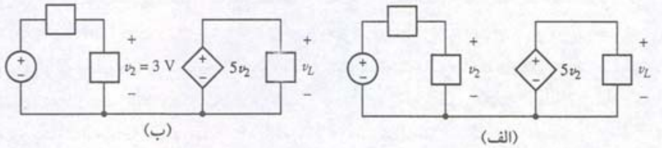
شکل ۱۸ـ۲ چهار نوع منبع وابسته متفاوت. (الف) منبع جریان کنترل‌شده با جریان. (ب) منبع جریان کنترل‌شده با ولتاژ. (ج) منبع ولتاژ کنترل‌شده با ولتاژ. (د) منبع ولتاژ کنترل‌شده با جریان.

دو نوع منبع ایده‌آلی که تاکنون در مورد آن‌ها بحث کردیم منابع **مستقل** نام داشتند زیرا مقدار کمیت منبع به هیچ‌وجه تحت تأثیر تحولات بقیه مدار نیست. این منبع برخلاف نوع ایده‌آل، **منبع وابسته یاکنترل‌شده** می‌باشد، و در آن کمیت منبع به وسیله ولتاژ یا جریان موجود در دیگر نقاط مدار تحت بررسی، معین می‌شود. اینگونه مدارها در مدل‌های الکتریکی معادل برای قطعات الکترونیک مانند ترانزیستورها، تقویت‌کننده‌های عملیاتی و مدارهای مجتمع ظاهر می‌گردند. برای تفکیک منابع وابسته و مستقل ما سمبل‌های لوزی‌شکل را طبق شکل ۱۸ـ۲ انتخاب می‌کنیم و در شکل ۱۸ـ۲ (الف و ج)، K ثابتی بدون بُعد است. در شکل ۱۸ـ۲ (ب)، g ضریب مقیاس با واحد A/V می‌باشد. در شکل ۱۸ـ۲ (د)، r ضریب مقیاس با واحد V/A می‌باشد. جریان کنترلی i_x و ولتاژ کنترلی v_x باید در مدار تعریف شده باشد.

ابتدا داشتن منبع جریانی که مقدارش به یک ولتاژ وابسته باشد یا منبع ولتاژی که به وسیله جریانی جاری در عنصری دیگر وابسته باشد، غیرعادی به نظر می‌رسد. حتی منبع ولتاژی که به یک ولتاژ دوردست بستگی داشته باشد عجیب به نظر می‌رسد. چنین منابعی برای مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده بی‌ارزش‌اند، با این وجود، تحلیل جبری سرراست است. مثال‌ها شامل جریان درین (drain) در یک ترانزیستور اثر میدان به صورت تابعی از ولتاژ گیت، یا ولتاژ خروجی یک مدار مجتمع به صورت تفاضل ولتاژهای ورودی است. ضمن مواجهه در هنگام تحلیل، ما تمام عبارات کنترل‌کننده را برای منابع وابسته می‌نویسیم، درست مثل این‌که عدد متعلق به یک منبع مستقل نوشته می‌شود. نتیجه اغلب به صورت نیاز به یک معادله اضافی برای تکمیل تحلیل است، مگر این‌که ولتاژ کنترل‌کننده و یا جریان یکی از مجهولات مشخص‌شده در سیستم معادلات ما باشد.

مثال ۲ـ۲

در مدار شکل ۱۹ـ۲ (الف) اگر v_2 مساوی 3V باشد، v_L را پیدا کنید.



شکل ۱۹ـ۲ (الف) مثال‌هایی از یک مدار حاوی منبع ولتاژ کنترل‌شده با ولتاژ. (ب) اطلاعات اضافی روی نمودار تهیه شده است.

آن‌چه در اختیار ما قرار دارد نمودار مداری است که تا حدی مقدارگذاری شده و نیز $v_2 = 3V$ می‌باشد. بد نیست این کمیت را طبق شکل ۱۹ـ۲ (ب) به نمودار اضافه کنیم.

اکنون به عقب بازگشته و اطلاعات جمع‌آوری شده را نگاه می‌کنیم. با بررسی نمودار مدار درمی‌یابیم که ولتاژ مطلوب v_L همان ولتاژ دو سر منبع وابسته است. بنابراین:

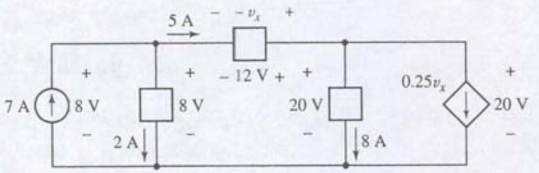
$$v_L = 5v_2$$

در این‌جا، به‌شرطی مسئله قابل حل است که ما مقدار v_2 را بدانیم!

به نمودار باز می‌گردیم، می‌بینیم که در واقع v_2 را می‌دانیم یعنی $v_2 = 3V$. اگر مقدار منبع وابسته را در شکل ۱۹ـ۲ (ب) قرار دهیم، $v_L = 15V$ خواهد بود. زمانی که طول می‌کشد تا نمودار مدار تکمیل گردد هدر نرفته است. تستی سریع نشان می‌دهد که پاسخ ما صحیح است.

تمرین

۹ـ۲ توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر مدار شکل ۲۰ـ۲ را پیدا کنید.



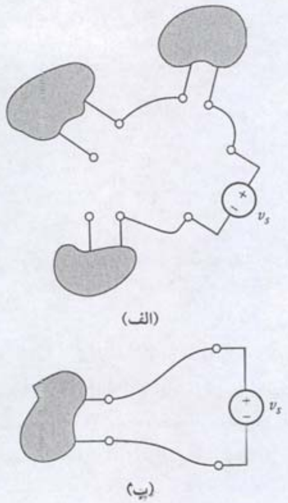
شکل ۲۰ـ۲

جواب: (-56W ، 16W ، -60W ، 160W و -60W)

منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته عناصر **فعال** هستند. این منابع می‌توانند به بعضی از عناصر دیگر توان بدهند. در حال حاضر ما دربارهٔ عناصر غیرفعال که قادر به دریافت توان هستند صحبت می‌کنیم. با این وجود بعداً خواهیم دید که چند نوع عنصر وجود دارد که می‌توانند مقدار معینی از انرژی را ذخیره کرده و سپس آن را به وسایل دیگر مختلفی باز گردانند. چون ما هنوز اصرار داریم آن‌ها را عناصر غیرفعال بنامیم اصلاحی برای دو تعریف فوق لازم است که بعداً ارائه می‌شود.

شبکه‌ها و مدارها

اتصالات درونی دو یا چند عنصر سادهٔ یک مدار یک **شبکه** الکتریکی را به‌وجود می‌آورد. اگر شبکه حداقل دارای یک مسیر بسته باشد آن را یک **مدار الکتریکی** می‌نامیم. **توجه:** هر مدار یک شبکه است ولی همه شبکه‌ها لزوماً مدار نیستند (شکل ۲۱ـ۲ ملاحظه شود)!

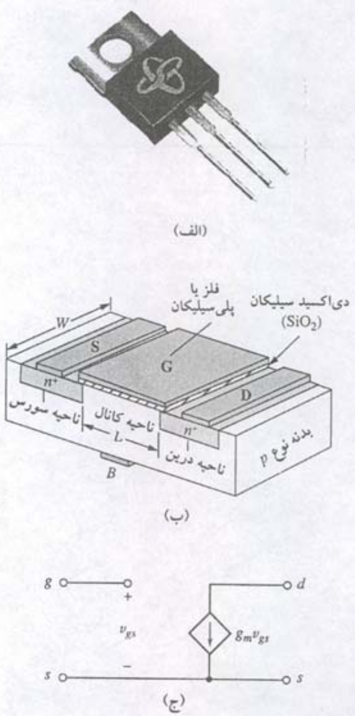


شکل ۲۱ـ۲ (الف) شبکه‌ای که یک مدار نیست. (ب) شبکه‌ای که مدار هست.

شبکه‌ای که حداقل یک عنصر فعال مانند یک منبع جریان یا ولتاژ مستقل داشته باشد یک شبکه **فعال** است. شبکه‌ای که هیچ عنصر فعالی ندارد شبکه **غیرفعال** خوانده می‌شود.

اکنون مقصود ما از عبارت **عنصر مداری** روشن شده است و تعاریف چند عنصر مداری خاص مانند منابع جریان و ولتاژ مستقل و وابسته را ارائه نموده‌ایم. در بقیه کتاب ما فقط پنج عنصر مداری دیگر را تعریف می‌کنیم: یعنی مقاومت، القاگر، خازن، مبدل و تقویت‌کننده‌های عملیاتی (که به‌طور خلاصه آن‌ها op amp می‌گویند). همه آن‌ها عناصر ایده‌آل هستند. اهمیت آن‌ها در این است که می‌توان با ترکیب آن‌ها مدل خوبی از عناصر فیزیکی واقعی به‌دست‌آورده و تا حد دلخواه آن را دقیق کنیم. بنابراین ترانزیستور شکل ۲۲ـ۲ (الف) و (ب) را می‌توان با ولتاژ پایانه‌ای v_{gs} و یک منبع جریان وابسته مانند شکل ۲۲ـ۲ (ج) مدل‌سازی کرد. توجه کنید که منبع جریان وابسته جریانی تولید می‌کند که به ولتاژی در نقطه دیگری از مدار وابسته است. پارامتر g_m، که به آن رسانایی انتقالی (transconductance) می‌گویند با توجه به مشخصات ترانزیستور و نیز نقطه کار تعیین‌شده به وسیله مدار متصل به ترانزیستور محاسبه می‌گردد. این پارامتر معمولاً مقدار کوچکی است از مرتبه 10^{-2} و شاید 10 A/V. این مدل مادامی که فرکانس منبع سینوسی متصل به آن نه خیلی بزرگ نه خیلی کوچک باشد به خوبی کار می‌کند. می‌توان مدل را برای لحاظ وابستگی فرکانس با افزودن عناصر مداری ایده‌آل مانند مقاومت‌ها و خازن‌ها اصلاح نمود.

ترانزیستورهایی از این نوع تنها بخش کوچکی از مدار مجتمع را که کمتر از ۲ میلی‌متر در ۲ میلی‌متر مساحت و ۲۰۰μm ضخامت دارد، اشغال می‌نمایند. مدارات مجتمع قادرند چندین هزار ترانزیستور به‌علاوه انواع مقاومت‌ها و خازن‌ها را در خود جای دهند. بنابراین ما وسیله‌ای فیزیکی در اختیار داریم که به اندازه یک حرف در روی این صفحه کاغذ بزرگی دارد ولی مدل آن از ده‌ها هزار عنصر مداری ساده تشکیل شده است. ما این مفهوم "مدل‌سازی مدار" را در تعدادی از عناوین مهندسی برق از جمله الکترونیک، تبدیل انرژی و آنتن‌ها به‌کار خواهیم برد.



شکل ۲-۲۲ ترانزیستور اثر میدانی نیمرسانای اکسید فلز (MOSFET). (الف) ترانزیستور در بسته‌بندی TO-5، (ب) تصویر برش‌خورده و (ج) یک مدل مدار معادل برای تحلیل ac.

۲-۴ قانون اهم

تا این‌جا با منابع ولتاژ و جریان وابسته و غیروابسته آشنا شدیم و تذکر دادیم که آن‌ها عناصر فعال ایده‌آلی هستند که فقط به‌صورت تقریب می‌توانند در یک مدار واقعی وجود داشته باشند. اکنون آماده‌ایم تا با عنصر ایده‌آل دیگری به‌نام مقاومت خطی آشنا شویم. مقاومت ساده‌ترین عنصر غیرفعال است و ما بحث خود را با ملاحظه کار فیزیکدان گمنام آلمانی به‌نام جرج سیمون اهم[1] آغاز می‌کنیم. وی در سال ۱۸۲۷ نتایج تلاش‌های خود را در رابطه با اندازه‌گیری جریان‌ها و ولتاژها و توصیف ارتباط ریاضی آن‌ها به‌چاپ رساند. یکی از این نتایج، رابطه اساسی **قانون اهم** است. با این وجود، می‌دانیم که این قانون را هنری کاوندیش[2] ۴۶ سال قبل از اهم کشف کرده بود ولی هیچ‌کس حتی اُهم از کار کاوندیش اطلاع نداشت و نوشته‌های وی نیز سال‌ها پس از مرگش منتشر شد. نظریه اهم در ابتدا به ناحق با انتقاد شدید مواجه گشت ولی بعداً پذیرفته شد و او را به شهرت رساند.

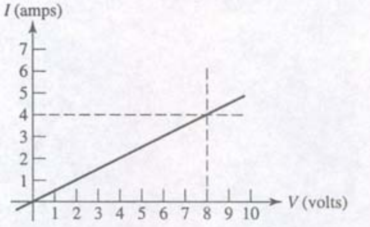
قانون اهم بیان می‌دارد که ولتاژ دو سر یک مادهٔ هادی مستقیماً متناسب با جریان عبوری از آن ماده است، یا:

$$v = i\,R \qquad (۴)$$

ضریب تناسب R را **مقاومت** می‌نامند. واحد مقاومت، اهم است و برابر است با 1 V/A که به‌طور خلاصه آن‌ها را با Ω (اُمگا) نشان می‌دهند.

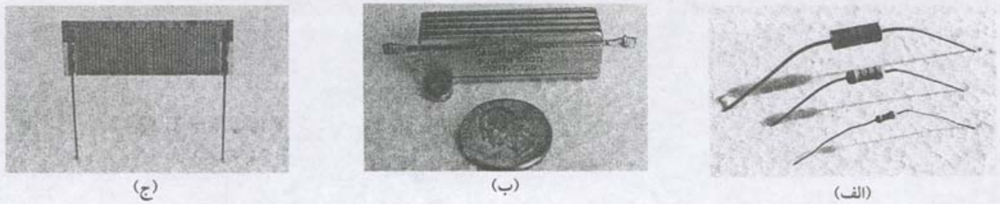
هنگامی‌که این معادله به صورت نمودار i در برابر v رسم شود، خط راستی به‌دست‌می‌آید که از مبدأ می‌گذرد، شکل ۲-۲۳. معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ خطی است، و ما آن را به‌عنوان تعریف یک مقاومت خطی می‌شناسیم. در این‌صورت اگر نسبت جریان و ولتاژ مربوط به هر عنصر ثابت مقدار ثابتی باشد، آنگاه عنصر یک **مقاومت خطی** است و دارای مقداری برابر نسبت ولتاژ به جریان است. معمولاً مقاومت یک کمیت نسبتی تلقی می‌شود، بنابراین مقاومت‌های منفی نیز ممکن‌است به وسیله مدارهای خاصی تولید شوند.

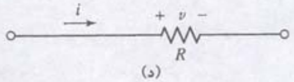
دوباره تأکید می‌شود که مقاومت خطی، یک عنصر ایده‌آل مدار است، و فقط مدلی ریاضی از یک وسیله فیزیکی حقیقی است. یک مقاومت را می‌توانید به‌راحتی بخرید یا بسازید ولی به زودی متوجه خواهید شد که نسبت ولتاژ به جریان فقط در محدودهٔ خاصی از ولتاژ، جریان و توان به میزان قابل قبولی ثابت است ولی به دما و عوامل محیطی دیگر نیز بستگی دارد. ما معمولاً مقاومت خطی را فقط مقاومت می‌خوانیم. هر مقاومت غیرخطی را به همان صورت غیرخطی بیان خواهیم کرد. البته نباید مقاومت‌های غیرخطی را لزوماً عناصر نامطلوب خواند. گرچه وجود آن‌ها در مدار، تحلیل را پیچیده می‌کند، ولی رفتار قطعه ممکن‌است عمداً به وسیله حالت غیرخطی اصلاح گردد. مثلاً فیوزهای حفاظتی و دیودهای زنر برای تنظیم ولتاژ طبیعتاً بسیار غیرخطی‌اند ولی استفاده از آن‌ها در طراحی مدار بسیار مفید است.



شکل ۲-۲۳ رابطه جریان-ولتاژ برای مقاومت خطی 2Ω.

1. G.S. Ohm 2. H.Cavendish





شکل ۲-۲۴ (الف) چند نمونه بسته‌بندی مقاومت رایج. (ب) یک مقاومت قدرت 560 Ω. (ج) مقاومت 10 ترااهم با 5% خطا (10,000,000,000,000Ω) ساخت Ohmcraft. (د) نماد مدار برای مقاومت، قابل استفاده در همه انواع قطعات از (الف) تا (ج).

توان مصرفی

شکل ۲-۲۴ چندین بسته مقاومت مختلف را همراه با سمبل رایج مدار برای یک مقاومت نشان می‌دهد. بر اساس قراردادهای مربوط به ولتاژ، جریان و توانی که قبلاً اختیار شد حاصل‌ضرب v و i توان جذب‌شده به‌وسیله مقاومت را نشان می‌دهد. یعنی v و i طوری انتخاب شده‌اند تا قرارداد علامت عنصر غیرفعال را برآورده کنند. توان جذب‌شده به‌طور فیزیکی به‌صورت گرما یا نور ظاهر شده و همواره مثبت است. یک مقاومت (مثبت) یک عنصر غیرفعال است و نمی‌تواند توان را تولید کند یا آن را ذخیره نماید. عبارت دیگری برای توان جذب‌شده به‌صورت زیر است:

$$p = vi = i^2R = v^2/R \qquad (۵)$$

یکی از مولفان تجربه ناخوشایندی از اتصال یک مقاومت 100Ω دو واتی به یک منبع 110V ارائه کرده است. با دود و آتش ناشی از این آزمایش کار چندانی نداریم ولی این تجربه نشان داد که مقاومت‌های واقعی هم تنها در یک محدوده خاصی همچون مدل ایده‌آل مقاومت خطی عمل می‌کنند. در این آزمایش انتظار این بود که مقاومت 121W توان جذب کند، ولی چون فقط برای جذب 2W طراحی شده بود نمی‌توان عکس‌العمل آن را غیرعادی تلقی کرد.

مثال ۲-۳

مقاومت نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۲۴ (ب) در مداری بسته شده است که جریان 428 mA در آن عبور می‌کند. ولتاژ در دو سر پایانه و توان مصرفی را محاسبه کنید.

ولتاژ دو سر یک مقاومت با قانون اهم مطابق زیر مشخص می‌گردد:

$$v = R\,i = (560)\,(0.428) = 239.7 \text{ V}$$

ما می‌توانیم توان تلف‌شده در مقاومت را به چند طریق به دست آوریم. چون هم ولتاژ دو سر پایانه‌ها و هم جریان داخلی را داریم،

$$p = vi = (239.7)(0.428) = 102.6 \text{ W}$$

که تقریباً 20% حداکثر مقدار 500 W می‌باشد. ما نتایج خود را با دو معادله زیر چک می‌کنیم:

$$p = v^2/R = (239.7)^2/560 = 102.6 \text{ W}$$

$$p = i^2R = (0.428)^2 560 = 102.6 \text{ W}$$

که همان مقدار مورد انتظار است.

تمرین

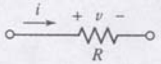
با توجه به تعریف v و i در شکل ۲-۲۵ کمیت‌های زیر را محاسبه کنید

۲-۱۰ اگر $v = -6.3$ V و $i = -1.6$ mA باشد R را به‌دست‌آورید

۲-۱۱ اگر $v = -6.3$ V و R = 21 Ω باشد توان جذب‌شده را بیابید.

۲-۱۲ اگر $v = -8$ V و R مقدار 0.24 W انرژی را جذب کند i چقدر است؟

جواب: 3.94 kΩ، 1.89 W و 30.0 mA-



شکل ۲-۲۵

کاربرد عملی

معیار اندازه‌گیری مقاومت سیم

از نظر فنی، هر ماده‌ای در برابر حرکت جریان بار دارای مقاومت است. همچون دیگر کتب مقدماتی مدارها ما نیز فرض خواهیم کرد که سیم‌ها در نمودار مدار دارای مقاومت صفر باشند. این به آن معنی است که اختلاف پتانسیلی بین دو سر یک سیم وجود ندارد، بنابراین توانی جذب نشده و گرمایی تولید نمی‌شود. گرچه فرض چندان نامطلوب نیست ولی توجه و دقت ما را هنگام انتخاب سیمی با قطری مناسب برای یک کاربرد خاص از بین می‌برد.

مقاومت یک ماده معمولاً با (۱) مقاومت مخصوص ذاتی ماده و (۲) ابعاد آن تعیین می‌شود. مقاومت مخصوص که به وسیله سمبل ρ نشان داده می‌شود معیاری از سهولت حرکت الکترون‌ها از یک ماده خاص است. چون این کمیت، نسبت میدان الکتریکی (V/m) به چگالی جریان در ماده است (A/m^2) واحد عمومی ρ برابر است با Ω.m، هر چند که پیشوندهای متریک هم استفاده می‌گردد. هر ماده دارای مقاومت مخصوص ذاتی خاص خود است که به دما وابسته است. چند مثال در جدول ۳ـ۲ نشان داده شده است و می‌توان دید که کمتر از 1% تفاوت بین انواع مس وجود دارد ولی اختلاف زیادی بین موارد مختلف وجود دارد. به خصوص هر چند استیل (فولاد) محکم‌تر از مس است، ولی سیم استیل چند برابر مقاومت بیشتری دارد. در بعضی از بحث‌های تکنیکی رایج است که هدایت (با علامت σ) را برای یک ماده بیان می‌کنند که عکس مقاومت است.

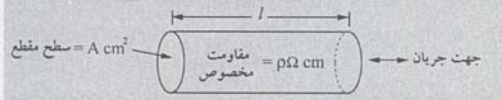
جدول ۳ـ۲ مواد سیم‌های الکتریکی و مقاومت مخصوص آن‌ها.

مقاومت مخصوص در 20°C ($\mu\Omega$.cm)	ماده و شکل	مشخصات ASTM
1.7654	مس ـ نرم ـ گرد	B33
1.7241	مس ـ لوله‌ای، نرم ـ مس OF	B75
1.7521	مس ـ لوله‌ای، سخت ـ مربعی یا مستطیلی	B188
1.7654	مس ـ نرم ـ پوشش سرب ـ گرد	B189
2.8625	آلومینیوم، سخت ـ گرد	B230
4.3971	مس ـ پوشش استیل ـ سخت ـ گرد درجه 40 HS	B227
1.9592	مس ـ پوشش نیکل ـ نرم ـ گرد کلاس 10	B355
8.4805	آلومینیوم ـ پوشش استیل، سخت، گرد	B415

مقاومت یک شیئی خاص، با ضرب ضریب مقاومت در طول l از آن، و تقسیم بر سطح مقطع (A) طبق معادلهٔ (۶) به‌دست‌می‌آید. این پارامترها در شکل ۲۶ـ۲ نشان داده شده‌اند.

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad (۶)$$

مقاومت مخصوص (ویژه) با انتخاب ماده‌ای که سیم از آن ساخته می‌شود و با توجه به دمای محیط کار معین می‌گردد. چون در عمل مقدار توان معینی به وسیله سیم به دلیل وجود مقاومت جذب می‌شود، جریان عبوری به تولید گرما منجر می‌گردد. سیم‌های ضخیم‌تر مقاومت کمتری دارند و همچنین گرما را ساده‌تر تلف می‌کنند، ولی سنگین‌ترند، حجم بیشتری دارند، و نیز گران‌ترند. بنابراین ما توجیه شده‌ایم که کوتاه‌ترین سیم را برگزینیم به نحوی که کار را با امنیت لازم انجام دهد و نه این‌که قطورترین سیم به خاطر حداقل‌کردن مقاومت برگزیده شود.



شکل ۲۶ـ۲ تعریف پارامترهای هندسی به‌کاررفته در محاسبه مقاومت یک سیم. ضریب مقاومت ماده یکنواخت فرض می‌شود.

معیار اندازه‌گیری مقاومت سیم آمریکایی (AWG) سیستم استانداردی برای تعیین سایز یا نمره سیم است. هنگام انتخاب یک سیم، AWG کوچک‌تر مربوط به یک سیم با ابعاد بزرگ‌تر است. خلاصه‌ای از معیارهای اندازه‌گیری در جدول ۴ـ۲ آمده است. استانداردهای الکتریکی معیارها را برای کاربرد سیم‌ها بر مبنای حداکثر جریان و محل استفاده دیکته می‌کنند.

جدول ۴ـ۲ چند سیم مسی متداول و مقاومت آن‌ها.

نمره سیم AWG	مساحت مقطع (mm^2)	اهم در 1000ft (در 20°C)
28	0.0804	65.3
24	0.205	25.7
22	0.324	16.2
18	0.823	6.39
14	2.08	2.52
12	3.31	1.59
6	13.3	0.3952
4	21.1	0.2485
2	33.6	0.1563

مثال ۴ـ۲

سیمی برای روشن‌کردن لامپی پرقدرت واقع در فاصله 2000ft کشیده شده و از آن 100A جریان می‌گذرد. اگر در این کار کابل نمره 4 AWG به‌کاررفته باشد توان تلف‌شده در سیم چقدر است؟

بهترین حرکت در راستای حل این مسئله، رسم سریع تصویری از آن مطابق شکل ۲۷ـ۲ است. از جدول ۴ـ۲ می‌بینیم که سیم 4 AWG در هر 1000ft، 0.2485Ω مقاومت دارد. سیمی که به لامپ می‌رود 2000ft و برگشت آن هم 2000ft طول دارد که جمعاً 4000ft خواهد شد. بنابراین مقاومت آن برابر است با:

$$R = (4000ft)\ (0.2485\Omega/1000ft) = 0.994\ \Omega$$

توان تلف‌شده با رابطه i^2R مشخص می‌شود که در آن $i = 100A$ است. بنابراین توان تلف‌شده به وسیله سیم، 9940 W یا 9.94 KW است. می‌بینیم که با این مقاومت کمتر از 1 Ω توان قابل توجهی تلف شده است. این توان هم باید به وسیله منبع تولید شود ولی هرگز به لامپ نمی‌رسد.

شکل ۲۷ـ۲ ترسیم سرسری مدار یک لامپ.

تمرین

۲ـ۱۳ با توجه به اهمیت توان تلف‌شده‌ای که در مثال ۴ـ۲ گفته شد مدیرتان به شما جایگزینی یک سیم 4 AWG با 2 AWG را توصیه می‌کند. مطلوب است توان تلف‌شده در سیم جدید با این فرض که لامپ هنوز 100 A جریان می‌کشد؟ وزن سیم جدید خارج از این بحث چقدر است (دو بار بیشتر، چهار بار بیشتر و غیره).

جواب: 6.25 kW، 1.59 بار بیشتر

هدایت

برای یک مقاومت خطی نسبت جریان به ولتاژ نیز ثابت است

$$\frac{i}{v} = \frac{1}{R} = G \qquad (۷)$$

که در آن G هدایت یا رسانایی خوانده می‌شود. واحد SI برای هدایت زیمنس (S)، و معادل 1 A/V است. واحد غیررسمی قدیمی‌تر برای هدایت mho است که به‌طور خلاصه حرف بزرگ معکوس‌شدهٔ ℧ می‌باشد. شما به ندرت آن را در روی نمودارهای مدار و نیز در کاتالوگ‌ها و کتاب‌ها ملاحظه می‌کنید. برای نمایش مقاومت و هدایت سمبل یا نماد یکسانی به کار می‌رود (شکل ۲۴ـ۲(د)). توان جذب‌شده مجدداً مثبت بوده و می‌توان آن را برحسب هدایت با رابطه زیر نشان داد:

$$p = vi = v^2G = \frac{i^2}{G} \qquad (۸)$$

بنابراین یک مقاومت 2 اهمی دارای هدایت $\frac{1}{2}$ زیمنس بوده و اگر جریان 5A از آن عبور کند آن‌گاه ولتاژ دو سرش 10 ولت و توان جذب‌شده در آن 50 وات خواهد بود. در این بخش تاکنون همه عبارات برحسب جریان، ولتاژ و توان لحظه‌ای داده شده‌اند. مانند $v = iR$ و $p = vi$. باید یادآوری کنیم که آن‌ها، همان علائم اختصاری روابط $v(t) = Ri(t)$ و $p(t) = v(t)\ i(t)$ می‌باشند. پس جریان عبوری از مقاومت و یا ولتاژ دو سر آن باید در طول زمان به‌طور مشابهی تغییر کنند. بنابراین اگر $R = 10\ \Omega$ و $v = 2\sin 100t$ باشد آن‌گاه $i = 0.2 \sin 100t$ A خواهد بود. توجه داشته باشید که توان با رابطهٔ $0.4 \sin^2 100t$ W داده می‌شود و نمودار

ساده‌ای از آن بیانگر طبیعت متفاوت تغییراتش نسبت به زمان است. گرچه ولتاژ و جریان در طول زمان معینی منفی هستند توان جذب‌شده هرگز منفی نیست!

مقاومت می‌تواند مبنای تعریف دو عبارت رایج اتصال کوتاه و مدار باز باشد. ما اتصال کوتاه را به‌عنوان مقاومت صفر اهمی تعریف می‌کنیم، آنگاه چون $v = iR$ است، علی‌رغم وجود جریان در درون آن ولتاژ دو سر یک مدار اتصال کوتاه باید صفر باشد. به طریقی مشابه یک مدار باز را به‌صورت مقاومت بی‌نهایت تعریف می‌کنیم. از قانون اهم نتیجه می‌شود که جریان، جدا از ولتاژ دو سر یک مدار باز، صفر است. گرچه سیم‌های حقیقی دارای مقاومت کوچکی هستند ما همواره آن‌ها را دارای مقاومت صفر فرض خواهیم کرد مگر آن‌که بیان شود. بنابراین در همه نمودارهای مدار، سیم‌ها به‌صورت ایده‌آل اتصال کوتاه فرض خواهند شد.

۲-۵ خلاصه فصل و مرور

- سیستم آحاد رایجی که باید در مهندسی برق به‌کار رود SI است.
- جهتی که بارهای مثبت حرکت می‌کنند جهت مثبت جریان است. جریان مثبت در جهت مخالف حرکت الکترون‌ها است.
- در تعریف جریان، مقدار و جهت آن باید مشخص باشد. جریان‌های ثابت (dc) را معمولاً با حرف بزرگ "I" و جریان‌های دیگر را با $i(t)$ و یا ساده‌تر بگوییم i نشان می‌دهیم.
- برای تعریف ولتاژ دو سر یک عنصر لازم است پایانه‌ها را با + و - علامت بزنیم و نیز مقداری را به آن نسبت دهیم (یک نماد جبری یا یک مقدار عددی).
- عنصری توان مثبت تولید می‌کند که جریان مثبت از پایانه + آن خارج شود. هر عنصری که انرژی مثبت جذب کند جریان مثبت وارد پایانهٔ ولتاژ + آن خواهد شد.
- شش نوع منبع وجود دارد: منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل، منبع جریان وابسته کنترل‌شده با جریان، منبع جریان وابسته کنترل‌شده با ولتاژ، منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با ولتاژ و منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با جریان.
- قانون اهم بیان می‌دارد که ولتاژ دو سر یک مقاومت خطی مستقیماً متناسب با جریان عبوری از آن است، یعنی $v = iR$.
- توان تلف‌شده به وسیله یک مقاومت که منجر به تولید گرما می‌شود با رابطهٔ $p = vi = i^2R = v^2/R$ داده می‌شود.
- معمولاً مقاومت سیم‌های به‌کاررفته در تحلیل مدار صفر فرض می‌شوند. هنگام انتخاب سیم برای کاربردی خاص با اداره برق محلی خود مشورت کنید.

توجه کنید که جریان نشان‌داده‌شده با i یا $i(t)$ می‌تواند dc یا ac باشد. ولی سمبل I مربوط به جریان بی‌تغییر با زمان است.

۲-۶ خواندنی‌های کمکی

A good book that discusses the properties and manufacture of resistors in considerable depth:

Felix Zandman, Paul-René Simon, and Joseph Szwarc, *Resistor Theory and Technology.* Raleigh, N.C.: SciTech Publishing, 2002.

A good all-purpose electrical engineering handbook:

Donald G. Fink and H. Wayne Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers,* 13th ed., New York: McGraw-Hill, 1993.

In particular, pp. 1-1 to 1-51, 2-8 to 2-10, and 4-2 to 4-207 provide an in-depth treatment of topics related to those discussed in this chapter.

A detailed reference for the SI is available on the Web from the National Institute of Standards:

Barry N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI),* NIST Special Publication 811, 1995 Edition, www.nist.gov.

مسائل

۲-۱ واحدها و مقیاس‌ها

۱. کمیت‌های زیر را به نمادهای مهندسی تبدیل کنید:
الف. 1.2×10^{-5}s ب. 750mJ
ج. 1130 Ω د. 3,500,000,000 bits
ه 0.0065 μm و. 13,560,000 Hz
ز. 0.039 nA ح. 49,000 Ω
ط. 1.173×10^{-5}μm

۲. کمیت‌های زیر را با نماد مهندسی نمایش دهید:
الف. 1,000,000 W ب. 12.35 mm
ج. 47,000 W د. 0.00546 A
ه 0.033 mJ و. 5.33×10^{-6}mW
ز. 0.000000001 s ح. 5555 kW
ط. 32,000,000,000 pm

۳. واحدهای SI زیر را تبدیل کنید. از علائم مهندسی استفاده نمایید و چهار رقم باارزش را نگه دارید:
الف. 400 hp ب. 12 ft ج. 2.54 cm
د. 67 Btu ه 285.4×10^{-15}s

۴. یک باتری خشک 15 V تخلیه‌شده، یک جریان 100 mA لازم دارد تا در مدت 3 hr کاملاً شارژ گردد. ظرفیت ذخیره انرژی باتری چقدر است، با این فرض که ولتاژ به وضعیت شارژ بستگی ندارد.

۵. یک اتومبیل برقی کوچک با یک موتور 175 hp مجهز شده است. (الف) اگر فرض کنیم راندمان در تبدیل نیروی الکتریکی به مکانیکی صددرصد است برای راندن موتور چند کیلووات انرژی لازم است؟ (ب) اگر موتور 3 ساعت کار کند چقدر انرژی برحسب ژول لازم دارد. (ج) اگر یک باطری اسیدی دارای 430 کیلووات ساعت ظرفیت ذخیره‌سازی باشد چند باطری لازم است؟

۶. یک مولد نیروی 400mJ پالس لیزری را با دوره 20ms تولید می‌کند. (الف) توان اوج لحظه‌ای لیزر چقدر است؟ (ب) اگر در هر ثانیه فقط 20 پالس تولید شود توان متوسط خروجی لیزر چقدر است؟

۷. یک مولد لیزری تقویت‌شده پالس‌های لیزری 1 mJ را در طول 75 fs تولید می‌کند. (الف) توان لحظه‌ای اوج لیزر چقدر است؟ (ب) اگر در هر ثانیه فقط 100 پالس تولید شود توان متوسط خروجی لیزر چقدر می‌باشد؟

۸. توان تولیدی یک باطری در 6 دقیقه اول 6 وات و در 2 دقیقه بعدی صفر است آن‌گاه در طول 10 دقیقه بعد به‌طور خطی از صفر به 10 وات می‌رسد و در هر دقیقه بعد از آن به‌طور خطی از 10 وات به صفر بازمی‌گردد. (الف) انرژی کل تولیدشده در طول فاصله زمانی 24 دقیقه چقدر است؟ (ب) متوسط توان برحسب Btu/h در این مدت چقدر است؟

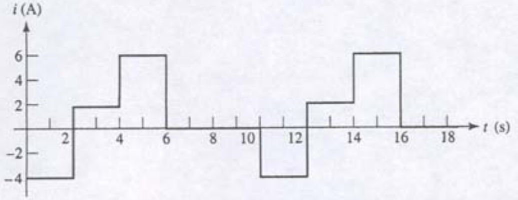
۹. نوع جدیدی از باتری می‌تواند 10 W انرژی را برای مدت 8 hr بدون تغییر جریان یا ولتاژ تحویل نماید. با این وجود پس از 8 hr توان خروجی به‌طور خطی از 10 W به 0 در مدت 5 دقیقه افت می‌کند. (الف) ظرفیت ذخیره انرژی باتری چقدر است؟ (ب) چقدر انرژی در 5 دقیقه آخر سیکل دشارژ حمل شده است؟

۲-۲ بار الکتریکی، جریان، ولتاژ و توان

۱۰. بار کل ذخیره‌شده به وسیله دستگاه خاصی به‌صورت تابعی از زمان با رابطهٔ $q = 18t^2 - 2t^4$ (در سیستم SI) داده شده است. (الف) بار کل ذخیره‌شده در $t = 2s$ چقدر است؟ (ب) حداکثر بار ذخیره‌شده در فاصله زمانی $0 < t \leq 3s$ چقدر است و چه موقعی رخ می‌دهد؟ (ج) در $t = 0.8s$ سرعت ذخیره بار چه میزان است؟ (د) منحنی‌های q در برابر t و i در برابر t در فاصله زمانی $0 \leq t \leq 3s$ را رسم کنید.

۱۱. جریان $i_1(t)$ شکل ۲-۶ (ج) به‌صورت $-2 + 3e^{-5t}$A برای $t < 0$ و $-2 + 3e^{3t}$ برای $t > 0$ داده شده است. پیدا کنید (الف) $i_1(-0.2)$، (ب) $i_1(0.2)$ و (ج) لحظاتی که در آن $i = 0$ است. (د) بار کلی که از چپ به راست در فاصله زمانی $-0.8s < t < 0.1s$ از هادی گذشته است.

۱۲. شکل موج ۲-۲۸ دارای پریود 10 ثانیه است. (الف) مقدار متوسط جریان در این فاصله چقدر است؟ (ب) در فاصله $1s < t < 12s$ چه مقدار بار عبور کرده است؟ (ج) اگر $q(0) = 0$ باشد، $q(t)$ را در فاصله زمانی $0 < t < 16s$ رسم کنید.



شکل ۲-۲۸

۱۳. مسیری با نقاط جدا از هم A، B، C، D و E را درنظربگیرید. برای انتقال یک الکترون از A به B یا از B به C 2 pJ لازم است. برای انتقال از C به D 3 pJ لازم است. برای انتقال از D به E، انرژی لازم نیست.

الف. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین A و B چقدر است (مرجع + در B است).

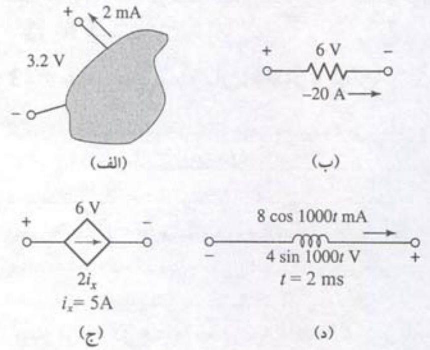
ب. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین D و E چقدر است (مرجع + در E است).

ج. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین C و D چقدر است (مرجع + در D است).

د. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین D و B چقدر است (مرجع + در D است).

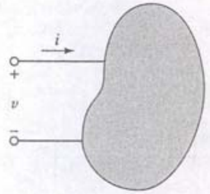
۱۴. یک جعبه بدون علامت در گوشه‌ای از آزمایشگاه پیدا شده است. جعبه دارای دو سیم است که با رنگ‌های نارنجی و ارغوانی مشخص شده است. یک ولت‌متر به دو سیم وصل است و مرجع + آن به سیم ارغوانی متصل شده است. در این حالت ولتاژ -2.86 V اندازه‌گیری شده است. اگر جهت اتصال باتری معکوس گردد، چه مقدار خوانده خواهد شد.

۱۵. توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر مدار شکل ۲.۲۹ را معین نمایید.



شکل ۲ـ۲۹

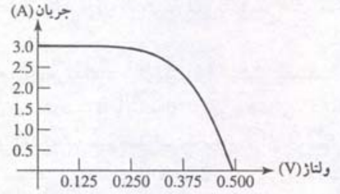
۱۶. فرض کنید برای عنصر مداری شکل ۲.۳۰، $i = 3te^{-100t}$mA و $v = (0.006 - 0.6t)e^{-100t}$ V باشد. (الف) این عنصر مداری چه توانی را در $t = 5$ms جذب می‌کند؟ (ب) چه مقدار انرژی در فاصله زمانی $0 < t < \infty$ به این عنصر تحویل شده است؟



شکل ۲ـ۳۰

۱۷. فرض کنید در شکل ۲.۳۰، $i = 3e^{-100t}$A باشد. توان جذب‌شده به وسیله عنصر مداری را در $t = 8$ms پیدا کنید، به شرطی که v برابر باشد با: (الف) $40i$، (ب) $0.2\, di/dt$ و (ج) $30\int_0^t i\,dt + 20$V.

۱۸. مشخصه جریان ـ ولتاژ یک سلول خورشیدی در ساعت 12 ظهر که در جهت خورشید قرار گرفته است در شکل ۲.۳۱ دیده می‌شود. برای به‌دست‌آوردن این مشخصه، مقاومت‌های مختلف در دو سر پایانه‌های این وسیله قرار گرفته و ولتاژها و جریان‌ها اندازه‌گیری شده‌اند. (الف) جریان اتصال کوتاه چقدر است؟ (ب) مقدار ولتاژ مدار باز چقدر است؟ (ج) توان ماکزیممی که از این وسیله به‌دست‌می‌آید را تخمین بزنید.



شکل ۲ـ۳۱

۱۹. جریانی که در یک مدار خاص جاری است در طول زمان به دقت ردیابی می‌شود. همه ولتاژهای بیان‌شده فرض می‌کنند که پایانه مرجع پایانه بالایی مدار است. دیده شده است که در دو ساعت اول، جریان 1 mA وارد پایانه بالایی می‌شود و ولتاژ 5 V+ است. در 30 دقیقه بعد، جریانی وارد یا خارج نمی‌شود. سپس برای 2 ساعت، یک جریان 1 mA از پایانه بالایی بیرون می‌آید، و ولتاژ اندازه‌گیری‌شده 2 V+ است. پس از آن دوباره جریان وارد و خارج نمی‌شود. فرض کنید که مدار از ابتدا هیچ انرژی را ذخیره نکرده است. به سوالات زیر پاسخ دهید:

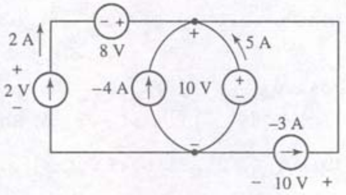
الف. در هر یک از سه دوره چقدر توان به مدار حمل شده است.

ب. چقدر انرژی در حین دو ساعت اول جذب به مدار حمل شده است.

ج. اکنون چقدر انرژی در مدار نگهداری می‌شود.

۲ـ۳ منابع ولتاژ و جریان

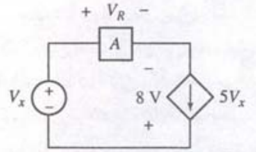
۲۰. معین کنید کدام‌یک از پنج منبع شکل ۲.۳۲ انرژی مثبت جذب می‌کنند و نشان دهید که جمع جبری پنج توان جذب‌شده برابر با صفر است.



شکل ۲ـ۳۲

۲۱. به شکل ۲.۳۲ مراجعه نمایید. هر جریان و ولتاژ را در 4 ضرب کنید و مشخص کنید که کدام یک از پنج منبع به عنوان مولد انرژی (تهیه‌کننده انرژی مثبت به دیگر عناصر) عمل می‌کند.

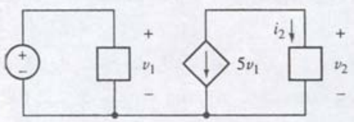
۲۲. در مدار ساده شکل ۲.۳۳ جریان در هر عنصر با دیگری برابر است. اگر $v_x = 1$V و $v_R = 9$V باشد مطلوب است محاسبه: (الف) توان جذب‌شده توسط عنصر A. (ب) توان تولیدشده به وسیله هر یک از دو منبع. (ج) آیا کل توان تولیدشده مساوی با کل توان جذب‌شده می‌باشد؟ آیا یافته‌های شما منطقی است؟ چرا (چرا نه)؟



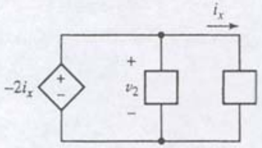
شکل ۲ـ۳۳

۲۳. برای مدار شکل ۲.۳۴، اگر $v_2 = 1000i_2$ و $i_2 = 5$mA باشد، v_s چقدر است؟

۲۴. برای مدار شکل ۲.۳۵، اگر $i_2 = -1$ mA باشد، ولتاژ v_2 را حساب کنید.



شکل ۲ـ۳۴



شکل ۲ـ۳۵

۲۵. یک مدار ساده با استفاده از باطری اسیدی 12V و یک چراغ اتومبیل تشکیل شده است. اگر باطری انرژی کل 460.8 وات ساعت را در پریود 8 ساعت تولید کند: (الف) چقدر توان به چراغ انتقال یافته است؟ (ب) جریان عبوری از لامپ چقدر است؟ (فرض کنید ولتاژ باطری در حین تخلیه ثابت باقی می‌ماند).

۲۶. برای کاربرد خاصی باید فیوزی را انتخاب کنید، شما می‌توانید فیوزهایی را که در جریان‌هایی بیش از 1.5A، 3A، 4.5A و یا 5A می‌سوزند انتخاب نمایید. اگر ولتاژ تولیدی 110 ولت و حداکثر توان مجاز 500 وات باشد کدام فیوز را باید انتخاب کرد و چرا؟

۲ـ٤ قانون اهم

۲۷. خطای 10% در مقاومت 1 kΩ ممکن‌است هر مقداری از مقاومت‌های بین 900 تا 1100 اهم را داشته باشد. اگر ولتاژ دو سر آن 5.0 V فرض شود (الف) محدوده جریان‌های ممکن اندازه‌گیری‌شده چقدر است؟ (ب) محدوده توان اندازه‌گیری‌شده چقدر است؟

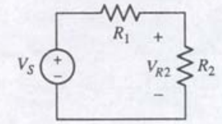
۲۸. یک جریان 2 mA وادار به عبور از یک مقاومت 470 Ω با خطای 5% شده است. مقاومت باید چه میزان توان داشته باشد و چرا؟ (توجه کنید که 5% خطا به معنی این‌است‌که مقاومت دارای مقادیر 446.5 Ω و 493.5 Ω است).

۲۹. مقاومت $R = 1200\Omega$ برای شکل ۲.۲۴ (د) مفروض است. توان جذب‌شده به‌وسیله R در $t = 0.1$s را به‌شرط (الف) $i = 20e^{-12t}$mA، (ب) $v = 40\cos 20t$ V و (ج) $vi = 8t^{1.5}$VA را بیابید.

۳۰. ولتاژی برای 20 ms در 10+ ولت و در 20 ms بعدی در 10V- به‌طور پیوسته نوسان می‌کند. ولتاژ به مقاومتی 50 اهمی اعمال شده است. در فاصله 40 میلی‌ثانیه (الف) حداکثر مقدار ولتاژ را بیابید، (ب) متوسط مقدار ولتاژ را پیدا کنید، (ج) متوسط مقدار جریان مقاومت چقدر است، (د) حداکثر مقدار توان جذب‌شده چقدر است و (ه) متوسط توان جذب‌شده را مشخص کنید.

۳۱. بر اساس اصل بقاء انرژی در شکل ۲.۳۶، از هر سه عنصر بایت جریان بگذرد. با توجه به این‌که کل انرژی تولیدی برابر با کل انرژی جذب‌شده می‌باشد نشان دهید که ولتاژ دو سر مقاومت R_2 از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

$$V_{R_2} = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



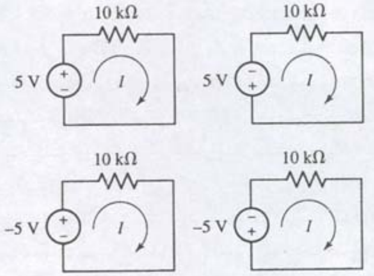
شکل ۲ـ۳۶

۳۲. نتایج تجربی زیر روی یک وسیله دو پایانه با تنظیم مقادیر حاصل از یک منبع تغذیه به‌دست‌آمده است. جریان‌های وارده به یک پایانه نیز اندازه‌گیری شده است.

ولتاژ (V)	جریان (mA)
-1.5	-3.19
-0.3	-0.638
0.0	1.01×10^{-8}
1.2	2.55
2.5	5.32

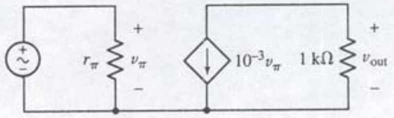
(الف) مشخصه جریان ـ ولتاژ را ترسیم کنید. (ب) ضریب هدایت موثر و مقاومت وسیله را به‌دست‌آورید. (ج) روی کاغذ جداگانه مشخصه جریان در مقابل ولتاژ را رسم کنید به‌شرطی‌که مقاومت وسیله سه برابر شده باشد.

۳۳. برای هر یک از مدارهای شکل ۲.۳۷ جریان I را پیدا کنید و توان جذب‌شده در مقاومت را محاسبه نمایید.



شکل ۲ـ۳۷

۳۴. مشاهده زیرنویس روی ولتاژها و جریان‌ها در نمودارهای مدار چیز ناآشنایی نیست. در مدار شکل ۲.۳۸ ولتاژ v_π در دو سر مقاومت R_π ایجاد شده است. اگر v_s برابر با $0.01\cos 1000t$ V باشد، v_{out} را پیدا کنید.



شکل ۲ـ۳۸

۳۵. مدار شکل ۲ـ۳۸ طوری ساخته شده که $v_S = 2 \sin 5t$ V و $r\pi = 80\ \Omega$. v_{out} را در $t = 0$ و $t = 314$ ms محاسبه کنید.

۳۶. یک مفتول مسی به نمره 18 AWG در طول مسیری برای اتصال یک سنسور به سیستم کامپیوتر مرکزی کشیده شده است. اگر مقاومت سیم 53Ω باشد طول کل سیم چقدر است ؟ (دما را 20 درجه سانتیگراد فرض کنید).

۳۷. فرض کنید که در کنار یک ساحل متروک قرار دارید و دمای هوا 108 درجه فارنهایت است. ناگهان ملاحظه می‌کنید که فرستنده شما کار نمی‌کند، آن‌گاه مشکل را دنبال می‌کنید تا به یک مقاومت 470 اهمی برسید. خوشبختانه قرقره‌ای از سیم 28 AWG را در آن‌جا پیدا می‌کنید. چند فوت از سیم برای جایگزینی مقاومت 470 اهمی لازم است؟ توجه کنید که چون جزیره در منطقه گرمسیر است دما کمی بیشتر از 20 درجه سانتی‌گراد است و نمی‌توان مقادیر مقاومت جدول ۲ـ۴ را به‌کاربرد. شما می‌توانید از رابطه زیر برای اصلاح مقادیر جدول ۲ـ۴ استفاده کنید:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{234.5 + T_2}{234.5 + T_1}$$

که در آن T_1 مساوی با دمای مرجع (20 درجه در این حالت)، R_1 مقاومت در دمای مرجع، T_2 دمای جدید (درجه سانتی‌گراد) و R_2 مقاومت در دمای جدید است.

۳۸. مقاومت یک هادی به‌طول l و سطح مقطع یکنواخت A با رابطه $R = \frac{l}{\sigma A}$ داده می‌شود. σ ضریب هدایت الکتریکی است. اگر برای مس $\sigma = 5.8 \times 10^7$ باشد: (الف) مقاومت یک سیم مسی نمره 18 (با قطر 1.024 میلی‌متر) که 50 فوت طول داشته باشد چقدر است؟ (ب) روی مدار چاپی، یک فویل مسی نواری با 33μm ضخامت و 0.5mm عرض را داریم که می‌تواند 3A جریان را در 50C° به راحتی حمل کند، مقاومت 15 سانتی‌متر از این نوار مسی و توان انتقال‌یافته به وسیلهٔ 3A جریان چقدر است؟

۳۹. جدول ۲ـ۳ چندین نوع استاندارد سیم مسی را لیست کرده است، که ضریب مقاومت تقریباً 1.7 $\mu\Omega$.cm است. از اطلاعات جدول ۲ـ۴ برای سیم 28 AWG استفاده کنید و مقاومت سیم مسی نرم را به دست آورید. آیا مقدار شما با جدول ۲ـ۳ هم‌خوانی دارد؟

۴۰. (الف) سه مثال برای مقاومت‌های غیرخطی بزنید. (ب) تصور کنید که یک باتری به یک مقاومت وصل است. انرژی از باتری به مقاومت منتقل می‌شود تا باتری کلاً تخلیه شود. با توجه به اصل بقای انرژی، انرژی باتری به کجا رفته است؟

۴۱. اگر مس B33 برای ساختن سیم گرد با قطر 1 mm به کار رود، چقدر توان در 100 m سیمی که جریان 1.5 A را حمل می‌کند، تلف خواهد شد؟

۴۲. بر اساس جدول ۲ـ۴، یک وسیله مکانیکی بسازید که به عنوان مقاومت متغیر می‌کند (یک سیم‌پیچ می‌تواند به این کار کمک نماید).

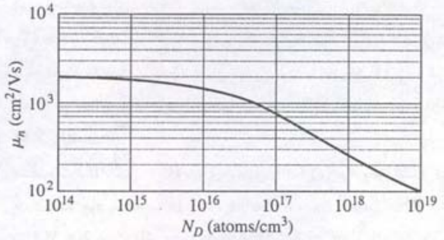
۴۳. دیود یک قطعه رایج دو پایانه غیرخطی است، می‌توان آن را با استفاده از رابطهٔ جریان ـ ولتاژ زیر مدل‌سازی کرد:

$$I = 10^{-9}(e^{39V} - 1)$$

(الف) مشخصه جریان ـ ولتاژ آن را برای $v = -0.7$V تا $+0.7$V رسم کنید. (ب) مقاومت مؤثر دیود در $v = 0.55$V چقدر است؟ (ج) در چه جریانی مقاومت دیود 1Ω است؟

۴۴. یک مقاومت 10Ω برای تعمیر مدار رگولاتور ولتاژ لازم است. تنها مواد اولیه موجود قرقره‌هایی به‌طول ده‌هزار فوت از هر نوع سیم در جدول ۲ـ۴ است. مقاومت مناسب را طراحی کنید.

۴۵. مقاومت مخصوص کریستال سیلیکان نوع n با رابطه $\rho = \frac{1}{q} N_D \mu_n$ داده شده است، که q بار هر الکترون و برابر با 1.602×10^{-19} کولن، N_D مساوی با تعداد اتم‌های ناخالص فسفر در هر سانتی‌متر مکعب μ_n قابلیت تحرک الکترون (برحسب $Cm^2V^{-1}S^{-1}$) می‌باشد. قابلیت تحرک و چگالی ناخالصی با شکل ۲ـ۳۹ به هم مرتبط‌اند. با این فرض که ویفر سیلیکانی 6 اینچ قطر و 250 μm ضخامت داشته باشد، با تزریق ماده فسفری در محدودهٔ $10^{15} \leq N_D \leq 10^{18}$ atoms/cm³ و ابعاد هندسی مناسب یک مقاومت 100 اهمی طراحی کنید.



شکل ۲ـ۳۹

فصل سوم

قوانین ولتاژ و جریان

مفاهیم کلیدی

- واژه‌های جدید مدار: گره، مسیر، حلقه، و انشعاب
- قانون جریان کیرشهف (KCL)
- قانون ولتاژ کیرشهف (KVL)
- تحلیل مدارهای ساده سری و موازی
- ترکیب منابع سری و موازی
- تقلیل ترکیب مقاومت سری و موازی
- تقسیم ولتاژ و جریان
- اتصالات زمین

مقدمه

در فصل ۲ مقاومت و چند نوع منبع معرفی شدند. پس از تعریف چند واژه جدید مدار، آماده‌ایم تا مدارهای ساده ساخته‌شده از این قطعات را تحلیل کنیم. تکنیک‌هایی که خواهیم آموخت بر اساس دو قانون ساده است: قانون جریان کیرشهف (KCL) و قانون ولتاژ کیرشهف (KVL). KCL بر اصل بقای بار و KVL بر اصل بقای انرژی مبتنی است که هر دو از قوانین اساسی فیزیک است. پس از آشنایی با این تحلیل ساده، از KCL و KVL استفاده بیشتری کرده و از آن‌ها برای ساده‌کردن ترکیبات سری و موازی مقاومت‌ها، منابع ولتاژ، یا منابع جریان استفاده می‌کنیم و مفاهیم مهم تقسیم جریان و ولتاژ را توسعه می‌دهیم. در فصل‌های بعد، تکنیک اضافه‌تری را خواهیم آموخت که به ما اجازه می‌دهند به‌طور موثر شبکه‌های پیچیده‌تر را تحلیل کنیم.

۳ـ۱ گره‌ها، حلقه‌ها، مسیرها و شاخه‌ها

اینک آماده‌ایم روابط جریان ـ ولتاژ را در مدارهای سادهٔ تشکیل‌شده از دو یا چند عنصر معین کنیم. عناصر به‌وسیلهٔ سیم‌ها به هم متصلند و فرض می‌کنیم مقاومتشان صفر باشد. چون در این حال شبکه به‌صورت تعدادی عنصر ساده و مجموعه‌ای از سیم‌های اتصال درمی‌آید، به آن **شبکهٔ با پارامترهای فشرده** یا **یکپارچه** می‌گوییم. تحلیل شبکه‌هایی که در آن‌ها پارامترها توزیع شده‌اند و در واقع حاوی عناصر بی‌نهایت کوچک هستند مشکل‌تر است. ما در این کتاب بر نوع یکپارچه تأکید داریم.

نقطه‌ای که در آن دو یا چند عنصر اتصال مشترکی دارند **گره** نامیده می‌شود. مثلاً شکل ۳ـ۱(الف) مدار یک شبکه سه‌گرهی را نشان می‌دهد. گاهی مدارها طوری رسم می‌شوند که تعداد گره‌ها بیش از آن‌چه که واقعیت دارد به‌نظر می‌رسند. مثلاً گره شماره 1 در شکل ۳ـ۱ (الف) به‌صورت دو اتصال جدا از هم که با هادی صفر اهمی به هم وصلند، طبق شکل ۳ـ۱ (ب)، نشان داده می‌شود. با این وجود تنها کاری که صورت گرفته، جداسازی نقاط مشترک به‌صورت یک خط مشترک با مقاومت صفر است. بنابراین ما باید لزوماً همه سیم‌های هادی یا بخشی از آن را که متصل به گره است، جزئی از آن گره بدانیم. توجه کنید که هر عنصر باید در هر سمت خود یک گره داشته باشد.

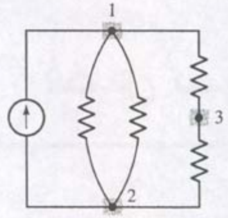
در مدارهای واقعی سیم‌ها دارای مقاومت محدودی هستند. ولی این مقاومت‌ها در مقایسه با دیگر مقاومت‌های مدار آن‌قدر کوچکند که می‌شود از آن‌ها چشم‌پوشی کرد بدون این‌که خطای زیادی ایجاد شود. پس در مدارهای ایده‌آل سیم‌ها را با مقاومت صفر درنظرمی‌گیریم.

فرض کنید که از یک گره در یک شبکه شروع کنیم و از یک عنصر ساده عبور نماییم تا به یک گره در انتهای دیگر آن برسیم. آن‌گاه از این گره وارد عنصر دیگری شده به گره بعدی برویم و این حرکت را آن‌قدر ادامه دهیم تا از هر تعداد عنصر عبور کنیم. اگر با هیچ گره‌ای بیش از یک بار مواجه نشویم، آن‌گاه مجموعه گره‌ها و عناصری که ما از آن‌ها عبور کرده‌ایم یک

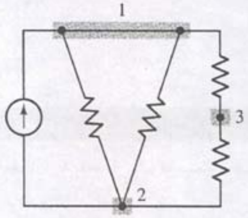
مسیر را تعریف می‌کنند. اگر گره شروع و گره خاتمه یکی باشند، آنگاه بنا بر تعریف مسیر، یک **مسیر بسته** یا یک **حلقه** خواهیم داشت.

مثلاً در شکل ۳ـ۱ (الف) اگر از گره 2 و از طریق منبع جریان به گره 1 برویم و آنگاه از طریق مقاومت سمت راست بالا به گره 3 برسیم، یک مسیر را ایجاد کرده‌ایم. چون به گره 2 مجدداً نرفته‌ایم، یک حلقه تشکیل نشده است. اگر از گره 2 به گره 1 از طریق منبع جریان و از آن‌جا از طریق مقاومت سمت چپ به گره 2 و سپس از طریق مقاومت مرکزی به گره 1 بازگردیم، یک مسیر به‌وجود نیامده است، چون گره 2 بیش از یک بار در مسیر بوده است. همچنین یک حلقه نیز تشکیل نشده است، زیرا حلقه باید یک مسیر باشد.

اصطلاح دیگری که زیاد مورد استفاده است **انشعاب** یا **شاخه** می‌باشد. ما یک شاخه را یک مسیر ساده در یک شبکه می‌دانیم که از یک عنصر ساده و گرهی در هر انتهای آن عنصر تشکیل شده است. بنابراین یک مسیر، مجموعهٔ خاصی از شاخه‌ها است. مدار شکل ۳ـ۱ (الف و ب) حاوی پنج شاخه‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۳ـ۱ (الف) مداری شامل سه گره و پنج شاخه. (ب) گره 1 طوری رسم شده است که شبیه دو گره باشد. ولی در واقع یک گره است.

۳ـ۲ قانون جریان کیرشهف

اکنون می‌توانیم اولین قانون کیرشهف [1] را ملاحظه کنیم. وی پروفسور یک دانشگاه آلمانی بود که همزمان با کارهای تجربی اُهم متولد شد. این قانون یک قانون بدیهی است که به‌نام قانون جریان کیرشهف خوانده شده (به‌طور خلاصه KCL) و به‌صورت ساده زیر بیان می‌شود:

جمع جبری جریان‌های وارده به هر گره صفر است.

این قانون یک عبارت ریاضی است و این واقعیت را نشان می‌دهد که بار نمی‌تواند در یک گره جمع شود. یک گره یک عنصر مداری نیست و مطمئناً نمی‌تواند بار الکتریکی را ذخیره، نابود و یا تولید کند. بنابراین جمع جبری جریان‌های وارده باید صفر باشد. مثالی در مورد هیدرولیک می‌تواند در این‌جا به درک موضوع کمک کند: مثلاً سه لوله آب را درنظر بگیرید که به شکل Y به هم وصل شده باشند. ما سه جریان را که به داخل هر سه لوله وارد می‌شوند درنظر می‌گیریم. اگر اصرار داشته باشیم که همیشه آب در جریان است، مسلماً نمی‌توانیم سه جریان آب مثبت داشته باشیم، زیرا سه‌راهی خواهد ترکید. بنابراین مقدار یک یا دو جریان بایستی منفی تعریف شود.

گره شکل ۳ـ۲ را ملاحظه کنید. جمع جبری چهار جریان وارده به این گره باید صفر باشد:

$$i_A + i_B + (-i_C) + (-i_D) = 0$$

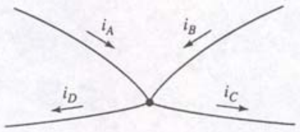
واضح است که قانون فوق برای جمع جبری جریان‌هایی که گره را ترک می‌کنند هم به همان صورت قابل اعمال است:

$$(-i_A) + (-i_B) + i_C + i_D = 0$$

همچنین می‌توانیم جمع جریان‌هایی را که پیکانشان به سمت یک گره است با جمع جریان‌هایی که پیکانشان به سمت خارج آن گره است برابر قرار دهیم:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

که می‌گوید جمع جریان‌های وارده به گره باید برابر با جمع جریان‌های خارج‌شده از گره باشد.



شکل ۳ـ۲ گره نمونه برای تشریح کاربرد قانون جریان کیرشهف.

1. Krichhoff

قانون جریان کیرشهف می‌تواند به شکل فشرده زیر بیان شود:

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \qquad (1)$$

که در واقع نمایش کوتاه عبارت زیر می‌باشد:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = 0 \qquad (2)$$

وقتی که معادله (۱) یا (۲) را به کار می‌بریم، دقت کنید که N جریان موجود باید همگی به سمت گره و یا همگی به خارج گره باشند.

مثال ۳ـ۱

برای مدار شکل ۳ـ۳ (الف) اگر منبع ولتاژ جریان ۳ آمپر را فراهم کند، جریان عبوری از مقاومت R_3 چقدر است؟

- هدف مسئله را شناسایی کنید.

جریان داخل R_3 روی نمودار مدار، i نام گرفته است.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

جریان از گره بالایی R_3 که به سه شاخهٔ دیگر متصل است وارد آن می‌شود. جریان‌های وارده از هر شاخه به گره با یکدیگر جمع می‌شوند تا جریان i تشکیل گردد.

- ارائه یک طرح.

جریان مقاومت R_1 را طبق شکل ۳ـ۳ (ب) مشخص می‌کنیم تا بتوان معادله KCL را در گره بالای مقاومت‌های R_2 و R_3 نوشت.

- معادلات مناسب را بنویسید.

جمع جریان‌های عبوری از گره برابر است با:

$$i_{R1} - 2 - i + 5 = 0$$

جریان‌هایی که از این گره عبور می‌کنند، در نمودار شکل ۳ـ۳ (ج) به وضوح نشان داده شده‌اند.

- آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

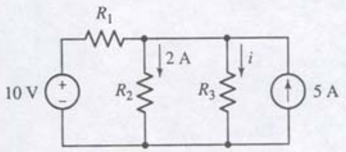
می‌بینیم یک معادله ولی دو مجهول وجود دارد. این بدان معنی است که به یک معادله دیگر نیازمندیم. می‌دانیم که منبع 10 ولت، جریان 3 آمپر فراهم می‌کند. KCL به ما نشان می‌دهد که این جریان همان I_{R1} است.

- اقدام به حل.

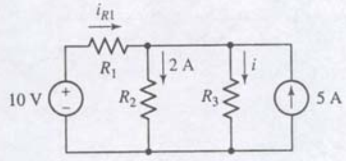
با جایگزینی می‌بینیم که $i = 3 - 2 + 5 = 6A$.

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟

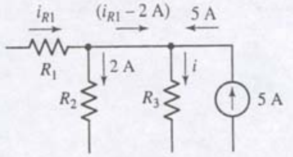
همیشه تست مجدد کار ارزشمندی است. همچنین می‌توان دید که آیا اندازه جواب منطقی است یا خیر. در این‌جا دو منبع داریم که یکی از آن‌ها 5A و دیگری 3A جریان می‌دهد. هیچ منبع دیگری چه مستقل و چه وابسته وجود ندارد. بنابراین انتظار نداریم که جریانی بیش از 8 آمپر در مدار پیدا کنیم.



(الف)



(ب)



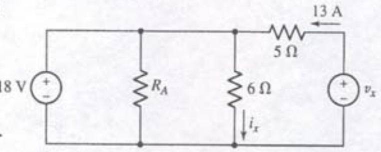
(ج)

شکل ۳ـ۳ (الف) مدار ساده‌ای که جریان درون مقاومت R_3 در آن موردنظر است. (ب) جریان درون R_1 مشخص شده تا معادله KCL نوشته شود. (ج) برای وضوح جریان‌های وارده به گره بالایی دوباره مشخص شده‌اند.

تمرین

۳ـ۱ تعداد شاخه‌ها و گره‌های مدار شکل ۳ـ۴ را بشمارید. اگر $i_x = 3A$ و منبع 18 ولتی مقدار 8A جریان را به مدار تحویل دهد، مقدار R_A چقدراست؟ (راهنمایی: می‌توانید از قانون اهم و KCL استفاده کنید).

جواب: پنج شاخه، 3گره، 1 اهم



شکل ۳ـ۴

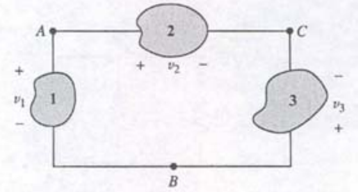
۳ـ۳ قانون ولتاژ کیرشهف

جریان، مرتبط با بارهای در حال حرکت در یک عنصر مدار است، در صورتی که ولتاژ معیاری از اختلاف انرژی پتانسیل دو سر آن عنصر می‌باشد. در تئوری مدار برای ولتاژ فقط یک مقدار منحصربه‌فرد وجود دارد. بنابراین انرژی لازم برای حرکت یک بار واحد از نقطه A به نقطهٔ B در یک مدار باید مستقل از مسیر اختیارشده بین نقطه A و B باشد (اغلب بیش از یک مسیر وجود دارد). اکنون مطالب فوق را تحت قانون ولتاژ کیرشهف (به‌طور خلاصه KVL) بیان می‌کنیم:

جمع جبری ولتاژ حول هر مسیر بسته صفر است.

ما اگر در شکل ۳ـ۵ یک کولن را از A به B و از طریق عنصر 1 حمل کنیم، علامت پلاریته مرجع برای v_1 نشان می‌دهد که کار لازم v_1 ژول است. اکنون اگر برای رفتن از نقطه A به نقطه B از طریق گره C به‌پیش برویم، آنگاه $v_2 - v_3$ ژول انرژی به‌کارخواهیم برد. با این وجود کار انجام‌شده مستقل از مسیر انتخابی در مدار است و این مقادیر باید برابر باشند. انتخاب هر مسیر باید منجر به رسیدن به یک مقدار برای ولتاژ باشد. بنابراین:

$$v_1 = v_2 - v_3 \qquad (۳)$$



شکل ۳ـ۵ اختلاف پتانسیل بین A و B مستقل از مسیر انتخابی است.

به‌این‌ترتیب اگر یک مسیر بسته را دنبال کنیم، جمع جبری ولتاژهای عناصر حول آن باید صفر باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_N = 0$$

یا به‌طور ساده‌تر:

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0 \qquad (۴)$$

قانون KVL را می‌توان به صور مختلف روی یک مدار اعمال کرد. روشی که کمتر به اشتباه منجر می‌شود این‌است‌که روی مسیر بسته‌ای در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم و تمام ولتاژهایی که از آن‌ها می‌گذریم را بنویسیم. هرگاه از طرف علامت مثبت ولتاژ وارد یک عنصر شدیم آن را مثبت و اگر از طرف علامت منفی وارد شدیم آن ولتاژ را با علامت منفی به‌حساب‌آوریم. به‌عنوان‌مثال برای حلقه مدار شکل ۳ـ۵ داریم:

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

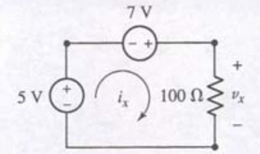
که با نتایج قبلی معادله (۳) توافق دارد.

مثال ۳ـ۲

در مدار شکل ۳ـ۶، v_x و i_x را پیدا کنید.

ما ولتاژ دو عنصر از سه عنصر در مدار را می‌دانیم. بنابراین KVL به راحتی برای یافتن v_x اعمال می‌شود. با شروع از گره پایینی منبع 5 ولت، قانون ولتاژ کیرشهف را حول حلقه در جهت عقربه‌های ساعت اعمال می‌نماییم:

$$-5 - 7 + v_x = 0$$

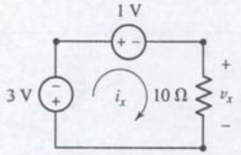


شکل ۳ـ۶ مداری ساده با دو منبع ولتاژ و یک مقاومت.

بنابراین $v_x = 12V$. قانون KCL به این مدار می‌تواند اعمال شود ولی در این‌جا جریان i_x از هر سه عنصر عبور می‌کند. با این وجود ما اکنون ولتاژ دو سر مقاومت 100 اهم را می‌دانیم. با استفاده از قانون اهم داریم: $i_x = \frac{v_x}{100} = \frac{12}{100} A = 120\ mA$.

تمرین

۳ـ۲ v_x و i_x را در مدار شکل ۳ـ۷ بیابید.

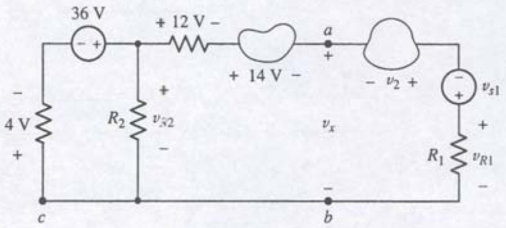


شکل ۳ـ۷

جواب: $v_x = -4$ و $i_x = -400mA$

مثال ۳ـ۳

در مدار شکل ۳ـ۸، هشت عنصر وجود دارد. ولتاژها با جفت علامت مثبت و منفی در دو سر هر عنصر نشان داده شده‌اند. v_{R2} (ولتاژ دو سر R_2) و ولتاژ v_x را بیابید.



شکل ۳ـ۸ مداری با هشت عنصر که در آن v_{R2} و v_x مورد توجه‌اند.

بهترین راه برای یافتن v_{R2} این‌است‌که به دنبال حلقه‌ای برای اعمال قانون KVL بگردیم. چند گزینه وجود دارد، ولی پس از نگاهی دقیق به مدار مشاهده می‌کنیم که حلقه سمت چپ مسیری سرراست‌تر می‌باشد، زیرا در آن دو ولتاژ مشخص شده است. بنابراین با نوشتن معادله KVL حول حلقه سمت چپ و شروع از نقطهٔ c داریم:

$$4 - 36 + v_{R2} = 0$$

که از آن $v_{R2} = 32V$ نتیجه می‌شود.

نقاط b و c و نیز سیم بین آن‌ها یک گره را تشکیل می‌دهند.

برای یافتن v_x می‌توانیم آن را جمع ولتاژهای دو سر سه عنصر سمت راست بدانیم. با این وجود چون برای این کمیت‌ها مقداری نداریم، اتخاذ چنین روشی منجر به جواب عددی نمی‌گردد. در عوض ما با شروع از نقطه c به سمت بالا و به طرف نقطه a از طریق v_x به b و سیم رابطه به نقطهٔ شروع داریم:

$$+4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0$$

بنابراین $v_x = 6V$.

روشی دیگر: با این فرض که v_{R2} معلوم باشد می‌توان از طریق R_2 مسیر کوتاه‌تری اختیار کرد:

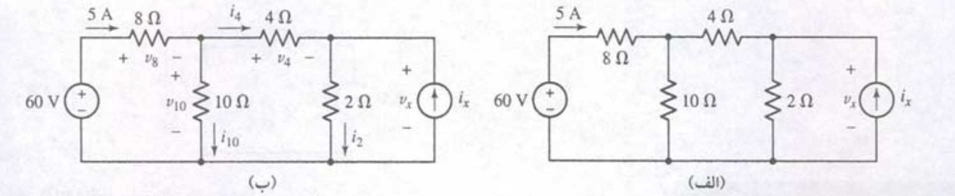
$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0$$

که از آن $v_x = 6V$ نتیجه می‌شود.

کلید دستیابی به یک تحلیل صحیح این‌است‌که ابتدا تمام ولتاژها و جریان‌ها را روی مدار مشخص‌کنیم. به‌این‌ترتیب با نوشتن دقیق معادلات KVL و KCL روابط صحیح حاصل خواهد شد، و اگر تعداد مجهولات بیش از معادلات باشد می‌توان قانون اهم را هم در صورت لزوم به‌کاربرد. ما این اصول را با مثالی مشروح‌تر توضیح می‌دهیم.

مثال ۴ـ۳

در مدار شکل ۹ـ۳ (الف) v_x را معین کنید.



شکل ۹ـ۳ (الف) مداری که در آن v_x با KVL معین می‌شود. (ب) مدار با برچسب ولتاژها و جریان‌ها.

حل را با مشخص‌کردن ولتاژها و جریان‌ها روی بقیه عناصر مدار آغاز می‌کنیم (شکل ۹ـ۳ (ب)). توجه کنید که v_x ولتاژ دو سر مقاومت 2اهم و نیز دو سر منبع جریان i_x است. اگر بتوانیم جریان درون مقاومت 2اهم را به‌دست‌آوریم، استفاده از قانون اهم منجر به یافتن v_x می‌گردد. با نوشتن معادله KCL مناسب، می‌بینیم که:

$$i_2 = i_4 + i_x$$

متاسفانه برای این سه کمیت مقداری نداریم و حل ما فعلاً متوقف می‌شود.

چون جریان خارج‌شده از منبع 60V معین است تصمیم می‌گیریم حل را از آن نقطه ادامه دهیم. می‌توانیم به‌جای استفاده از i_2 برای یافتن v_x، ولتاژ v_x را مستقیماً از KVL به‌دست‌آوریم. یک معادله KVL ممکن چنین است:

$$-60 + v_8 + v_{10} = 0$$

و

$$-v_{10} + v_4 + v_x = 0 \qquad (۵)$$

ما اکنون دو معادله و چهار مجهول داریم. اصلاحی کوچک در یک معادله که همه جملات آن مجهول است انجام می‌دهیم. در واقع می‌دانیم که $v_8 = 40$ است که بر اساس قانون اهم حاصل‌شده، زیرا به ما گفته شده است که از مقاومت 8 Ω جریان 5 A می‌گذرد. بنابراین $v_{10} = 0 + 60 - 40 = 20$ V است. پس معادله (۵) به فرم زیر کاهش می‌یابد:

$$v_x = 20 - v_4$$

اگر بتوانیم v_4 را معین نماییم، مسئله حل است.

بهترین راه یافتن v_4 در این حالت استفاده از قانون اهم است که مقداری برای i_4 لازم دارد. از KCL می‌بینیم که:

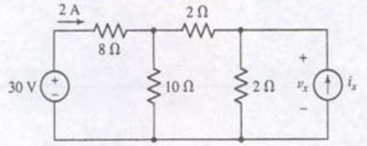
$$i_4 = 5 - i_{10} = 5 - \frac{v_{10}}{10} = 5 - \frac{20}{10} = 3$$

بنابراین $v_4 = (4)(3) = 12$ V و بنابراین $v_x = 20 - 12 = 8$ V خواهد شد.

تمرین

۳ـ۳ در مدار شکل ۱۰ـ۳، v_x را به‌دست‌آورید.

جواب: $v_x = 12.8$V



شکل ۱۰ـ۳

۴ـ۳ مدار تک‌حلقه‌ای

دیده‌ایم که استفاده مکرر از KCL و KVL در کنار قانون اهم می‌تواند به مدارهای پیچیده حاوی چند حلقه و تعدادی عناصر متفاوت اِعمال گردد. قبل از ادامه پیشروی در موضوع اکنون وقت خوبی برای تمرکز بر مفهوم مدارهای سری (و در بخش بعد موازی) است زیرا آن‌ها مبنای هر شبکه‌ای را تشکیل می‌دهند که ما در آینده با آن مواجه خواهیم شد.

تمام عناصری که در یک مدار، جریان یکسانی را از خود عبور می‌دهند **سری** نامیده می‌شوند. عناصر ممکن است جریان برابری را از خود عبور بدهند ولی سری نباشند، مثلاً دو لامپ 100 وات در منزل دو همسایه ممکن‌است جریان برابری داشته باشند ولی آن‌ها یک جریان (همان جریان) را حمل نمی‌کنند پس سری نیستند.

شکل ۱۱ـ۳ (الف)، مدار ساده را که از دو باطری و دو مقاومت تشکیل شده است، نشان می‌دهد. فرض می‌شود پایانه، سیم اتصال و لحیم آن‌ها دارای مقاومت صفر بوده و به همراه هم یک گره خاص از مدار را در شکل ۱۱ـ۳ (ب) تشکیل دهند. به‌جای هر دو باطری منابع ولتاژ ایده‌آل را گذاشته‌ایم و فرض کرده‌ایم که مقاومت‌های احتمالی آنقدر کوچکند که می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. دو مقاومت واقعی را نیز با دو مقاومت ایده‌آل (خطی) جایگزین کرده‌ایم.

خواهیم کوشید که جریان در هر عنصر، ولتاژ دو سر آن و توان جذب‌شده‌اش را بیابیم. گام اول تحلیل، یافتن جهت مرجع برای جریان‌های مجهول است. به‌طور دلخواه بیایید جریان ساعتگرد i را که از پایانه بالایی منبع ولتاژ در سمت چپ خارج می‌شود انتخاب کنید. این انتخاب با رسم پیکانی با برچسب i در آن نقطه در شکل ۱۱ـ۳(ج) نشان داده شده است. استفاده از قانون جریان کیرشهف نشان می‌دهد که جریان یکسانی باید در هر عنصر این مدار وجود داشته باشد و ما برای تأکید بر این واقعیت چند سمبل جریان در نقاط دیگر این مدار قرار می‌دهیم.

گام دوم در تحلیل انتخاب ولتاژ مرجع برای هر دو مقاومت است. قرارداد علامت عناصر غیرفعال لازم می‌دارد که متغیرهای ولتاژ و جریان درون مقاومت طوری تعریف شوند که جریان از پایانه مثبت وارد شود. چون ما قبلاً جهت جریان را انتخاب کرده‌ایم، v_{R1} و v_{R2} باید طبق شکل ۱۱ـ۳(ج) تعریف شوند.

سومین گام، کاربرد قانون ولتاژ کیرشهف در تنها مسیر بسته است. بیایید از گوشه سمت چپ پایین در جهت ساعتگرد در مدار بچرخیم و هر ولتاژی را که دیدیم بنویسیم. اگر با قطب مثبت ولتاژ برخورد کردیم، آن را با علامت مثبت و اگر با قطب منفی روبه‌رو شدیم آن را با علامت منفی ذکر کنیم. بنابراین:

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0 \qquad (۶)$$

آن‌گاه با اعمال قانون اهم به عناصر مقاومتی داریم:

$$v_{R1} = R_1 i \qquad و \qquad v_{R2} = R_2 i$$

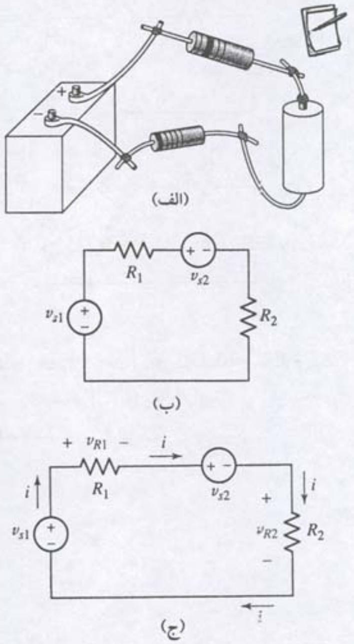
از جایگزینی در معادله (۶) خواهیم داشت:

$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$$

چون فقط i نامعلوم است می‌یابیم که:

$$i = \frac{v_{s1} + v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

کنون می‌توان ولتاژ یا جریان مربوط به هر عنصر را با اعمال رابطه $v = iR$، $p = vi$ و یا $p = i^2R$ به‌دست‌آورد.



شکل ۱۱ـ۳ (الف) مدار یک‌حلقه با چهار عنصر. (ب) مدل مداری همراه با مقادیر ولتاژ منبع و مقاومت‌ها. (ج) علامت‌های مرجع ولتاژ و جریان به مدار اضافه شده است.

تمرین

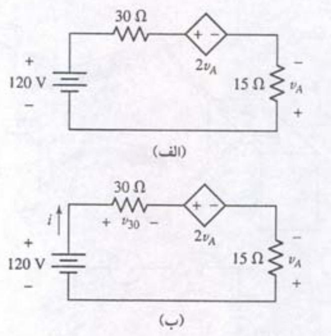
۴ـ۳ در مدار شکل ۱۱ـ۳(ب)، $v_{s1} = 120$V، $v_{s2} = 30$V، $R_1 = 30Ω$ و $R_2 = 15Ω$ است. توان جذب‌شده به‌وسیله هر عنصر را به‌دست‌آورید.

جواب: $p_{120V} = -240$W، $p_{30V} = +60$W، $p_{30Ω} = 120$W و $p_{15Ω} = 60$W.

مثال ۵ـ۳

توان جذب‌شده در هر عنصر از مدار شکل ۱۲ـ۳ (الف) را محاسبه کنید.

ابتدا جهت مرجعی را به جریان i و پلاریته مرجعی را به v_{30} تخصیص می‌دهیم (شکل ۱۲ـ۳(ب)). نیازی به تخصیص ولتاژ به مقاومت 15Ω وجود ندارد، زیرا ولتاژ کنترل‌شده v_A برای منبع وابسته



شکل ۱۲ـ۳ (الف) مدار یک‌حلقه‌ای حاوی یک منبع وابسته. (ب) جریان i و ولتاژ v_{30} مشخص شده‌اند.

از قبل موجود است (با این وجود توجه کنید که علائم v_A عکس قرارداد علامت عناصر غیرفعال می‌باشد).

این مدار حاوی منبع ولتاژ وابسته است، که مقدار آن تا تعیین v_A مجهول خواهد ماند. با این وجود می‌توان از مقدار جبری $2v_A$ استفاده کرد. بنابراین قانون KVL نتیجه می‌دهد:

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0 \qquad (۷)$$

با اعمال قانون اهم به مقاومت‌ها می‌توان نوشت:

$$v_{30} = 30i \quad \text{و} \quad v_A = -15i$$

چون i وارد پایانهٔ منفی v_A می‌شود علامت منفی لازم است. با جایگزینی در معادله (۷) داریم:

$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

و بنابراین درمی‌یابیم که:

$$i = 8A$$

با محاسبه توان جذب‌شده به‌وسیله هر عنصر داریم:

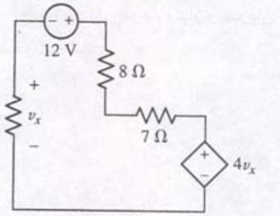
$$p_{120V} = (120)(-8) = -960W$$
$$p_{30\Omega} = (8)^2(30) = 1920W$$
$$p_{\text{وابسته}} = (2v_A)(8) = 2[(-15)(8)](8) = -1920W$$
$$p_{15\Omega} = (8)^2(15) = 960W$$

اگر همه توان‌های جذب‌شده را با هم جمع کنیم مقدار حاصل صفر است و این همان چیزی است که انتظار می‌رود.

تمرین

۳ـ۵ در مدار (شکل ۱۳ـ۳) توان جذب‌شده به‌وسیله هر یک از پنج عنصر مدار را مشخص کنید.

جواب: (در جهت ساعتگرد) 0.768W، 1.920W، 0.205W، 0.1792W و -3.07W



شکل ۱۳ـ۳ مدار یک‌حلقه‌ای ساده.

در مثال و تمرین قبل از ما خواسته شد تا توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر از مدار را محاسبه کنیم. با این وجود فکر درباره وضعیتی که در آن همه کمیت‌های جذب‌شده در یک مدار مثبت باشد، مشکل است، به این دلیل که انرژی باید از یک جایی بیاید. بنابراین، با توجه به بقای انرژی انتظار داریم که مجموع توان‌های جذب‌شده هر مدار صفر باشد. به بیان دیگر، حداقل یکی از کمیت‌ها باید منفی باشد (با نادیده گرفتن موارد جزیی که در آن مدار کار نمی‌کند). به نحوی دیگر بگوییم، مجموع توان تهیه‌شده برای هر عنصر باید صفر باشد. دقیق‌تر بگوییم، مجموع توان جذب‌شده برابر با مجموع توان تحویل‌داده‌شده است که به قدر کافی منطقی به نظر می‌رسد.

بیایید مطالب فوق را با مدار شکل ۱۲ـ۳ از مثال ۵ـ۳ آزمایش کنیم، که متشکل از دو منبع (یکی مستقل و دیگری وابسته) و دو مقاومت است. با جمع توان‌های جذب‌شده توسط هر عنصر داریم:

$$\sum_{\text{همه عناصر}} p_{\text{جذب‌شده}} = -960 + 1920 - 1920 + 960 = 0$$

در واقع منبع 120 ولت 960 W+ و منبع وابسته 1920 W+ را تهیه می‌کنند. بنابراین منابع جمعاً 2880 W = 1920 + 960 را فراهم می‌کنند. انتظار می‌رود مقاومت‌ها توان مثبت را جذب کنند که در این حالت 2880 W = 1920 + 960 است. بنابراین اگر همه عناصر از مدار را به حساب آوریم داریم:

$$\sum p_{\text{جذب‌شده}} = \sum p_{\text{تهیه‌شده}}$$

که انتظار آن هم می‌رفت.

اکنون توجه خود را به تمرین ۵ـ۳ معطوف می‌داریم، که خواننده ممکن است مایل به تصدیق آن باشد. می‌بینیم که توان جذب‌شده برابر است با:

$$0.768 + 1.92 + 0.2048 + 0.1792 - 3.072 = 0$$

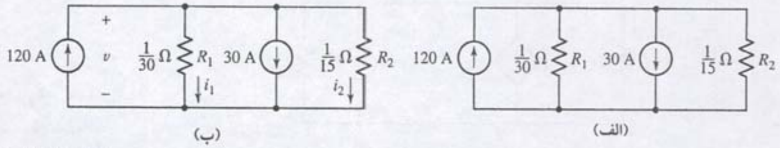
جالب است که می‌بینیم یک منبع مستقل 12 V ، مقدار 1.92 W را جذب می‌کند و به این معنی است که این منبع توان را مصرف می‌کند و نه این‌که آن را تهیه نماید. در عوض منبع وابسته به‌نظر می‌رسد که همه توان را در این مدار خاص فراهم می‌سازد. آیا چنین چیزی ممکن است؟ ما معمولاً انتظار داریم که منبع توان مثبتی را تهیه کند، اما چون ما منابع ایده‌آلی را در مدارمان اختیار کرده‌ایم، این احتمال وجود دارد تا یک جریان توان خالصی به داخل هر منبعی داشته باشیم. اگر مدار به طریقی تغییر کند، می‌توان منبعی مشابه را یافت که توان مثبتی را فراهم می‌سازد. راجع‌به نتیجه نمی‌توان پیشگویی کرد مگر این‌که تحلیل آن کامل شود.

۵ـ۳ مدار زوج تک‌گره

مدار زوج تک‌گره همسان با مدار یک‌حلقه‌ای مورد بحث در بخش ۴ـ۳ است، که در آن هر یک از عناصر ساده، بین یک جفت گره قرار گرفته است. مثالی از این نوع مدار در شکل ۱۴ـ۳ (الف) دیده می‌شود. دو منبع جریان و مقادیر مقاومت معلومند. ابتدا ولتاژی را در دو سر هر عنصر فرض می‌کنیم و پلاریته دلخواهی را به آن نسبت می‌دهیم. آنگاه KVL به ما اجازه می‌دهد تا ولتاژ دو سر هر انشعاب برابر با ولتاژ دو سر انشعاب دیگر باشد. عناصری در یک مدار که ولتاژ مشترکی در دو سر آن‌ها وجود دارد با هم **موازی** خوانده می‌شوند.

مثال ۶ـ۳

ولتاژ، جریان و توان مربوط به هر عنصر را در مدار شکل ۱۴ـ۳ (الف) پیداکنید.



شکل ۱۴ـ۳ (الف) مدار زوج تک‌گره. (ب) یک ولتاژ و دو جریان تخصیص یافته‌اند.

در اولین گام ولتاژ v و پلاریته اختیاری آن را طبق شکل ۱۴ـ۳ (ب) انتخاب می‌نماییم. دو جریان داخل مقاومت‌ها بر اساس قرارداد علامت عناصر غیرفعال اختیار شده‌اند. این جریان‌ها نیز در شکل ۱۴ـ۳ (ب) دیده می‌شوند.

تعیین هر یک از دو مقدار i_1 یا i_2 می‌تواند در یافتن ولتاژ v به ما کمک کند. بنابراین گام بعدی ما اعمال KCL به هر یک از دو گره در مدار است. بهتر است آن را به گرهی که در آن ولتاژ مرجع مثبت است اعمال کنیم و بنابراین جمع جبری جریان‌هایی که گره بالایی را ترک می‌کنند، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$-120 + i_1 + 30 + i_2 = 0$$

با نوشتن هر دو جریان برحسب v و به کارگیری قانون اهم،

$$i_1 = 30v \quad \text{و} \quad i_2 = 15v$$

پس داریم:

$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$

با حل این معادله برای v داریم:

$$v = 2V$$

سپس قانون اهم را به کار می‌بریم:

$$i_1 = 60A \quad و \quad i_2 = 30A$$

توان جذب‌شده در هر عنصر، اکنون محاسبه می‌شود. در دو مقاومت:

$$p_{R1} = 30(2)^2 = 120W \quad و \quad p_{R2} = 15(2)^2 = 60W$$

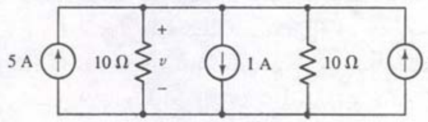
و برای دو منبع داریم:

$$p_{120A} = 120(-2) = -240W \quad و \quad p_{30A} = 30(2) = 60W$$

چون منبع 120A توان منفی 240W را جذب می‌کند، این توان در واقع توان تولیدی برای دیگر عناصر مدار است. به نحوی مشابه، می‌بینیم که منبع 30-A به‌جای تولید، درواقع توان جذب می‌نماید.

تمرین

۳-۶ v را در مدار شکل ۳-۱۵ معین کنید.

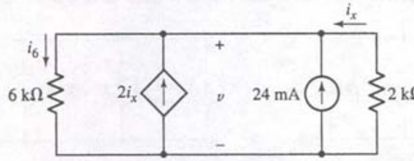


شکل ۳-۱۵

جواب: 50V.

مثال ۳-۷

مقدار v و توان تولیدی به‌وسیله منبع جریان مستقل در شکل ۳-۱۶ را به‌دست‌آورید.



شکل ۳-۱۶ ولتاژ v و جریان i_6 در مدار جفت‌گرهی حاوی منبع وابسته مشخص شده‌اند.

با به‌کارگیری KCL، جمع جریان‌هایی که گره بالایی را ترک می‌کنند باید صفر باشد، به‌نحوی‌که:

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

دوباره توجه کنید که علی‌رغم نامشخص‌بودن جریان تا پایان تحلیل، مقدار منبع وابسته ($2i_x$) همچون جریان معمولی درنظرگرفته می‌شود.

اکنون قانون اهم را به هر مقاومت اعمال می‌نماییم:

$$i_6 = \frac{v}{6000} \quad و \quad i_x = \frac{-v}{2000}$$

بنابراین:

$$\frac{v}{6000} - 2\left(\frac{-v}{2000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2000}\right) = 0$$

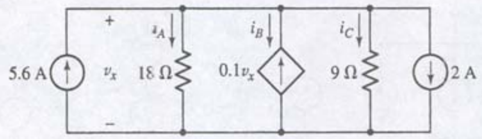
و لذا $v = (600)(0.024) = 14.4V$.

اکنون هر اطلاعات دیگری که بخواهیم به‌راحتی حاصل می‌شود. مثلاً، توان تولیدی به وسیله منبع مستقل، $p_{24} = 14.4(0.024) = 0.3456\ W(345.6mW)$، است.

تمرین

۳-۷ برای مدار جفت گرهی شکل ۳-۱۷، i_A، i_B و i_C را به‌دست‌آورید.

جواب: 3A، -5.4A و 6A.

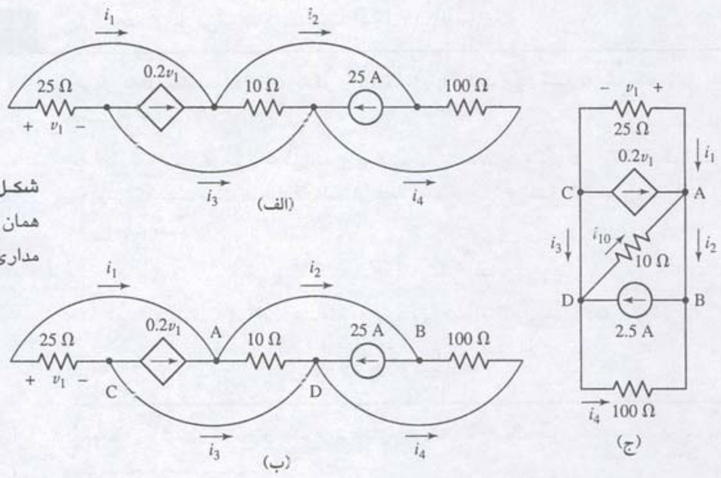


شکل ۳-۱۷

مثال ۳-۸

در شکل ۳-۱۸ (الف)، i_1، i_2، i_3 و i_4 را بیابید.

طبق آن‌چه که ترسیم شده است، تحلیل این مدار کمی مشکل است، بنابراین مصمم هستیم تا بعد از نام‌گذاری نقاط A، B، C و D طبق شکل ۳-۱۸ (ب و ج)، آن را دوباره ترسیم نماییم. جریان i_{10} را در مقاومت 10Ω تعریف کرده و KCL را اجرا می‌کنیم.



شکل ۳-۱۸ (الف) یک مدار جفت‌گرهی. (ب) همان مدار با نام‌گذاری نقاط در ترسیم مجدد. (ج) مداری ساده‌تر.

هیچ‌یک از جریان‌های موردنظر در این نمودار مدار معین نیستند، بنابراین سعی می‌کنیم آن‌ها را با قانون اهم بیابیم. در دو سر هر یک از سه مقاومت ولتاژ v_1 برقرار است و با توجه به آن جمع جریان‌های وارده به سمت راست‌ترین گره را می‌نویسیم:

$$-\frac{v_1}{100} - 2.5 - \frac{v_1}{10} + 0.2\,v_1 - \frac{v_1}{25} = 0$$

با حل آن $v_1 = 250/5 = 50V$ خواهد بود.

با نگاهی به پایین مدار داریم:

$$i_4 = \frac{-v_1}{100} = -\frac{50}{100} = -0.5A$$

بطریقی مشابه $i_1 = -2A$ به‌دست‌می‌آید. دو جریان باقیمانده i_2 و i_3 با به‌کارگیری جمع جریان‌های معلوم گره‌های سمت راست و چپ به‌دست‌می‌آید. بنابراین:

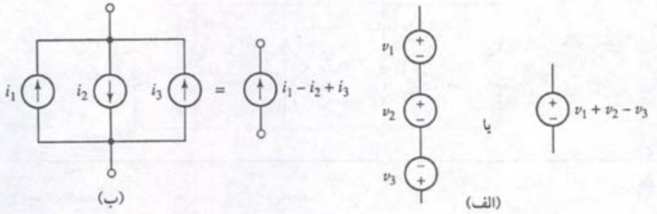
$$i_2 = i_1 + 0.2v_1 + i_{10} = -2 + 10 - 5 = 3A$$

و

$$i_3 = i_{10} - 2.5 + i_4 = -5 - 2.5 - 0.5 = -8A$$

۳-۶ منابع مستقل سری و موازی

به‌نظر می‌رسد که می‌توان با ترکیب منابع از نوشتن برخی معادلات در مدارهای سری یا موازی پرهیز کرد. با این وجود، دقت کنید که روابط جریان، ولتاژ و توان در بخش‌های دیگر مدار



شکل ۱۹ـ۳ (الف) منابع ولتاژ سری را می‌توان با یک منبع ولتاژ جایگزین نمود. (ب) منابع جریان موازی را می‌توان با یک منبع جریان جایگزین کرد.

باید بدون تغییر باقی بماند. مثلاً چند منبع ولتاژ سری را می‌توان با یک منبع ولتاژ معادل با جمع جبری همه منابع جایگزین کرد، شکل ۱۹ـ۳ (الف). منابع جریان موازی هم قابل ترکیب بوده معادل آن‌ها از جمع جبری همه منابع جریان‌ها به‌دست می‌آید، و دیگر عناصر موازی دوباره مطابق میل می‌توانند مرتب شوند (شکل ۱۹ـ۳ (ب)).

مثال ۹ـ۳

جریان داخل مقاومت 470 Ω در شکل ۲۰ـ۳ (الف) را با ترکیب چهار منبع به یک منبع ولتاژ به دست آورید.

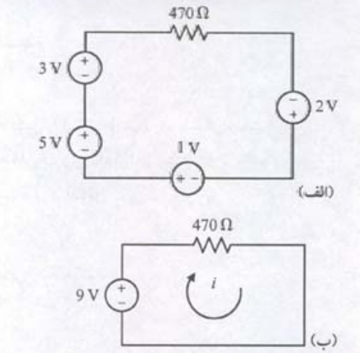
ما چهار منبع ولتاژ داریم که به‌طور سری به هم وصل شده‌اند. با جایگزینی آن‌ها با یک منبع تک‌ولتاژ که قطب مثبت آن در بالا باشد، از نقطه پایانه مرجع "+" منبع 3 V شروع می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$+3 + 5 - 1 + 2 = 9\ \text{V}$$

مدار معادل در شکل ۲۰ـ۳ (ب) مشاهده می‌شود. اکنون i را با قانون اهم به دست می‌آوریم:

$$i = \frac{9}{470} = 19.15\ \text{mA}$$

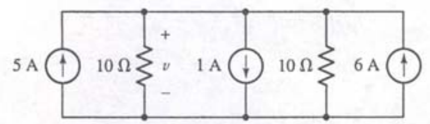
معمولاً از ترکیب یک منبع وابسته در ترکیب منبع ولتاژ یا جریان چیزی عایدمان نمی‌شود، ولی انجام آن غلط نیست.



شکل ۲۰ـ۳ (الف) یک مدار حلقوی ساده حاوی چهار منبع ولتاژ به‌طور سری. (ب) مدار معادل.

تمرین

۸ـ۳ مقدار v را در شکل ۲۱ـ۳ با ترکیب سه منبع جریان معین کنید.
جواب: 50V

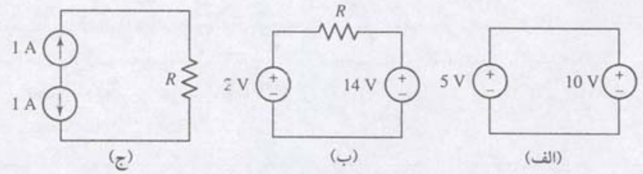


شکل ۲۱ـ۳

به‌منظور جمع‌بندی از بحث ترکیب منابع سری و موازی، ترکیب موازی دو منبع ولتاژ و ترکیب سری دو منبع جریان را ملاحظه خواهیم کرد. مثلاً معادل یک منبع ولتاژ 5V موازی با منبع ولتاژ 10V چقدر است؟ بنا به تعریف یک منبع ولتاژ، ولتاژ دو سر منبع نمی‌تواند تغییر نماید. در این صورت با توجه به قانون ولتاژ کیرشهف 5 برابر با 10 شده و یک وضعیت غیرممکن فیزیکی خواهیم داشت. بنابراین فقط هنگامی دو منبع ایده‌آل می‌توانند به‌طور موازی به هم وصل شوند که در هر لحظه ولتاژ پایانه برابری داشته باشند. به‌همین ترتیب دو منبع جریان به‌طور سری بسته نمی‌شوند، مگر این‌که جریان هر کدام با دیگری همراه با علامت در هر لحظه برابر باشد.

مثال ۱۰ـ۳

کدام‌یک از مدارهای شکل ۲۲ـ۳ معتبرند.

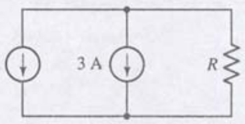


شکل ۲۲ـ۳ (الف) تا (ج) مثال‌هایی از مدارهای چندمنبعی که بعضی از آن‌ها از قانون کیرشهف تبعیت نمی‌کنند.

در شکل ۲۲ـ۳ (الف)، مدار از دو منبع موازی تشکیل شده است. مقدار هر منبع متفاوت است، پس این مدار قانون ولتاژ کیرشهف را نقض می‌نماید. مثلاً اگر مقاومتی با منبع 5V موازی شود، با منبع 10V هم موازی است. بنابراین ولتاژ واقعی دو سر آن مبهم است، و آن‌طور که بیان شده است قابل ساخت نیست. اگر به‌طور واقعی سعی در ساخت چنین مداری کنیم، درمی‌یابیم که ایجاد یک منبع ولتاژ ایده‌آل غیرممکن است، یعنی همه منابع واقعی دارای مقاومت داخلی اند. وجود چنین مقاومتی اختلاف ولتاژ را بین دو منبع واقعی به‌وجودمی‌آورد. در این راستا مدار شکل ۲۲ـ۳ (ب) کاملاً معتبر است. مدار شکل ۲۲ـ۳ (ج)، قانون KCL را نقض می‌کند، زیرا جریان داخل مقاومت R نامشخص است.

تمرین

۹ـ۳ مشخص کنید که آیا مدار شکل ۲۳ـ۳ هر یک از قوانین کیرشهف را نقض می‌کند.
جواب: اگر مقاومت حذف گردد، نقض قانون می‌شود.



شکل ۲۳ـ۳

۷ـ۳ مقاومت‌های سری و موازی

اکثراً می‌توانیم ترکیبات پیچیده‌ای از مقاومت را با یک مقاومت معادل ساده جایگزین کنیم. این کار در مواردی مفید است که کاری با جریان، ولتاژ یا توان هیچ‌یک از مقاومت‌های مذکور نداشته باشیم. با این جایگزینی همه مقادیر جریان، ولتاژ و توان در بقیه مدار ثابت باقی می‌مانند.

ترکیب سری N مقاومتی شکل ۲۴ـ۳ (الف) را ملاحظه نمایید. می‌خواهیم N مقاومت را با یک مقاومت معادل R_{eq} به نحوی جایگزین کنیم که بقیه مدار، در این حالت خاص منبع ولتاژ، تغییری را حس نکند. جریان، ولتاژ و توان منبع قبل و بعد از جابه‌جایی نباید تغییر کنند.

در گام اول KVL را اعمال می‌کنیم:

$$v_s = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

و سپس قانون اهم را به کار می‌بریم:

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N)i$$

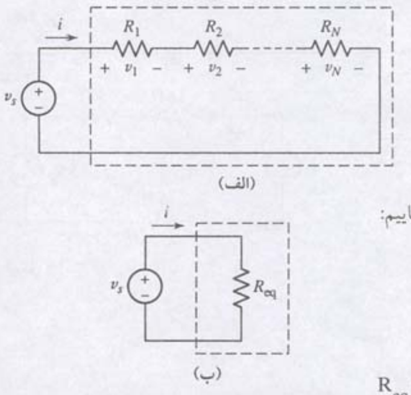
اکنون این نتیجه را با معادله ساده اعمال‌شده در مدار معادل شکل ۲۴ـ۳ (ب) مقایسه می‌نماییم:

$$v_s = R_{eq} i$$

بنابراین مقدار مقاومت معادل برای N مقاومت سری چنین است:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \qquad (8)$$

پس می‌توانیم یک شبکه دو پایانه متشکل از N مقاومت سری را با یک مقاومت دو پایانه R_{eq} جایگزین کنیم و همان رابطه v-i را داشته باشیم.



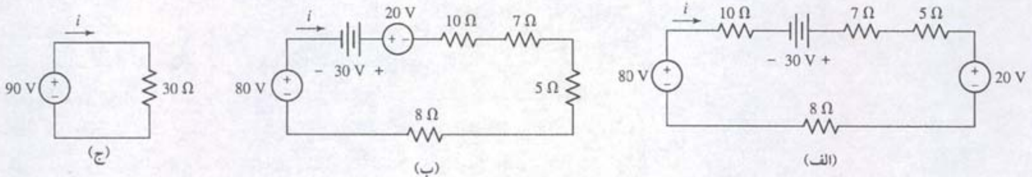
شکل ۲۴ـ۳ (الف) ترکیب سری N مقاومت. (ب) مدار معادل الکتریکی.

دوباره تأکید می‌کنیم که اگر بخواهیم جریان، ولتاژ و یا توان یکی از عناصر اصلی را بدانیم نباید آن را با عناصر دیگر ترکیب کنیم. مثلاً اگر ولتاژ منبع ولتاژ وابسته، به ولتاژ دوسر R_3 بستگی داشته باشد، به محض ترکیب R_3 با چند مقاومت برای یافتن مقاومت معادل، موجودیت آن از بین رفته و دیگر نمی‌توان آن را محاسبه کرد، مگر این‌که R_3 شناسایی شده و از ترکیب کنار گذاشته شود. در این حال بهتر است به عملیات آینده توجه داشته و از همان اول R_3 را بخشی از ترکیب ندانیم.

نکته‌ای دیگر: بررسی معادله KVL برای یک مدار سری نشان می‌دهد که ترتیب عناصر در نتیجه حاصل تأثیری ندارد.

مثال ۳-۱۱

با استفاده از ترکیب مقاومت‌ها و نیز منابع، جریان i و توان تولیدی به‌وسیله منبع 80V را در شکل ۳-۲۵ (الف) به‌دست‌آورید.



شکل ۳-۲۵ (الف) مدار سری با چندین منبع و مقاومت. (ب) عناصر برای وضوح بیشتر مرتب شده‌اند. (ج) مدار معادل ساده‌تر.

ابتدا محل عناصر را در شکل جابه‌جا می‌کنیم به‌نحوی‌که منابع پهلوی هم و مقاومت‌ها نیز پهلوی هم قرار گیرند (شکل ۳-۲۵ (ب)). قدم بعدی تبدیل سه منبع به یک منبع معادل 90V، و چهار مقاومت به یک مقاومت معادل 30Ω است (شکل ۳-۲۵(ج)). بنابراین در عوض نوشتن رابطهٔ

$$-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$$

رابطهٔ ساده زیر را داریم:

$$-90 + 30i = 0$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$i = 3A$$

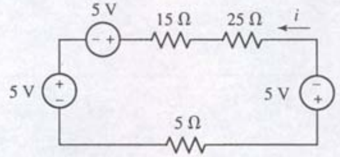
برای محاسبه توان تولیدی به‌وسیله منبع 80V و انتقال آن به مدار، لازم است با علم به 3A بودن جریان به شکل ۳-۲۵ (الف) بازگردیم. در این صورت توان مطلوب $80V \times 3A = 240W$ خواهد بود.

جالب است توجه کنیم که هیچ‌یک از عناصر مدار اصلی در مدار معادل حضور ندارند.

تمرین

۳-۱۰ i را در مدار شکل ۳-۲۶ معین کنید.

جواب: -333mA



شکل ۳-۲۶

ساده‌سازی مشابهی را می‌توان به مدارهای موازی اعمال کرد. در مداری با N مقاومت موازی طبق شکل (۳-۲۷(الف)) معادله KCL چنین نوشته می‌شود:

$$i_s = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

یا

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \dots + \frac{v}{R_N} = \frac{v}{R_{eq}}$$

و یا

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \qquad (9)$$

که به صورت

$$R_{eq}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \dots + R_N^{-1}$$

و یا برحسب هدایت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_N$$

مدار ساده‌شده در شکل ۳-۲۷ (ب) ملاحظه می‌گردد.

ترکیب موازی عناصر با رابطه ساده زیر نمایش داده می‌شود:

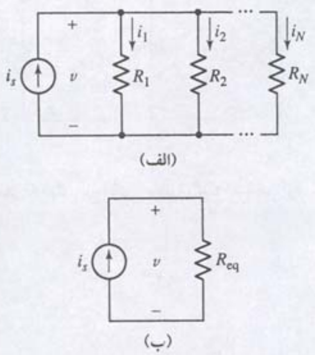
$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$$

حالت خاص دو مقاومتی اغلب در مدارها مشاهده شده و معادل آن از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

یا ساده‌تر بگوییم

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \qquad (10)$$



شکل ۳-۲۷ (الف) مداری با N مقاومت موازی. (ب) مدار معادل.

حفظ آخرین رابطه توصیه می‌شود ولی به‌خاطرسپردن حالت کلی معادله (۸) با بیش از دو مقاومت، خطا است. مثلاً

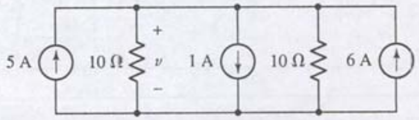
$$R_{eq} \neq \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

نگاهی سریع به واحدهای این معادله نشان می‌دهد که این عبارت نمی‌تواند صحیح باشد.

تمرین

۳-۱۱ با ترکیب سه منبع جریان و سپس دو مقاومت 10Ω، مقدار v را در شکل ۳-۲۸ به‌دست‌آورید.

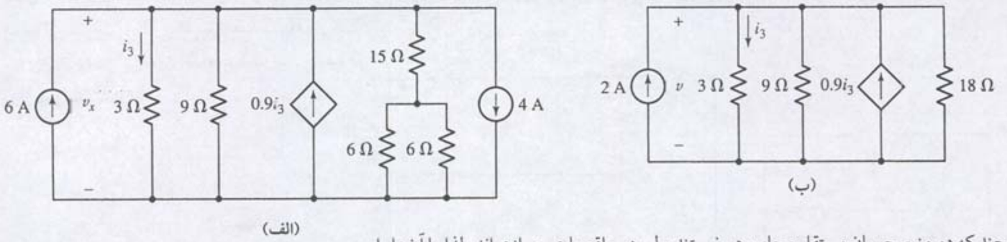
جواب: 50V



شکل ۳-۲۸

مثال ۳-۱۲

توان و ولتاژ منبع وابسته به شکل ۳-۲۹ (الف) را محاسبه نمایید.

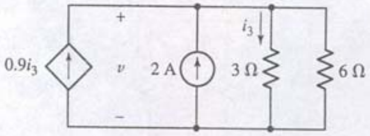


شکل ۳-۲۹ (الف) یک مدار چندگرهی. (ب) دو منبع جریان مستقل در یک منبع 2A ادغام شده و مقاومت 15Ω و دو مقاومت 6Ω موازی با یک مقاومت 18Ω جایگزین شده‌اند.

هرچند که دو منبع جریان مستقل مجاور هم نیستند ولی در واقع با هم موازی‌اند، لذا ما آن‌ها را با یک منبع 2 A جایگزین می‌کنیم.

دو مقاومت 6Ω هم موازیند و با یک مقاومت 3Ω سری با 15Ω جایگزین می‌شوند. بنابراین دو مقاومت 6Ω و مقاومت 15Ω با مقاومت 18Ω جایگزین شده است (شکل ۳-۲۹(ب)).

بدون توجه به انگیزه، ما نباید سه مقاومت باقیمانده را با هم ترکیب کنیم. کنترل متغیر i_3 به مقاومت 3Ω وابسته است و بنابراین مقاومت مذکور باید دست‌نخورده باقی بماند. تنها ساده‌سازی اضافه‌تر طبق شکل ۳-۲۹(ج)، $9\Omega \parallel 18\Omega = 6\Omega$ است.



(ج)

شکل ۲۹ـ۳ (ج) مدار معادل ساده‌شده.

با اعمال KCL به گره بالایی در شکل ۲۹ـ۳(ج) داریم:

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

برای تعیین ولتاژ v در دو سر منبع وابسته، ابتدا جریان کنترلی i_3 را به‌دست می‌آوریم. با قانون اهم داریم:

$$v = 3i_3$$

که به ما اجازه می‌دهد تا کمیت i_3 را محاسبه کنیم.

$$i_3 = \frac{10}{3}\ \text{A}$$

بنابراین ولتاژ دو سر منبع وابسته (که برابر ولتاژ در دو سر مقاومت 3Ω است):

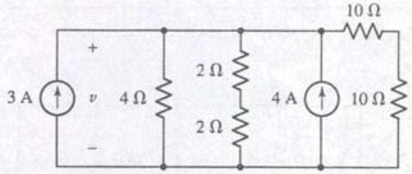
$$v = 3i_3 = 10\ \text{V}$$

پس توان تحویلی توسط منبع وابسته به بقیه مدار $v \times 0.9i_3 = 10(0.9)(10/3) = 30W$ است.
اکنون اگر بخواهیم توان تلف‌شده در مقاومت 15Ω را محاسبه نماییم باید به مدار اصلی بازگردیم. این مقاومت با مقاومت معادل 3Ω، سری‌شده و ولتاژ دو سر این ترکیب 10V است. بنابراین جریان 5/9A از مقاومت 15Ω عبور کرده و توان جذب‌شده به وسیله آن $(5/9)^2(15)$ یا 4.63W خواهد شد.

تمرین

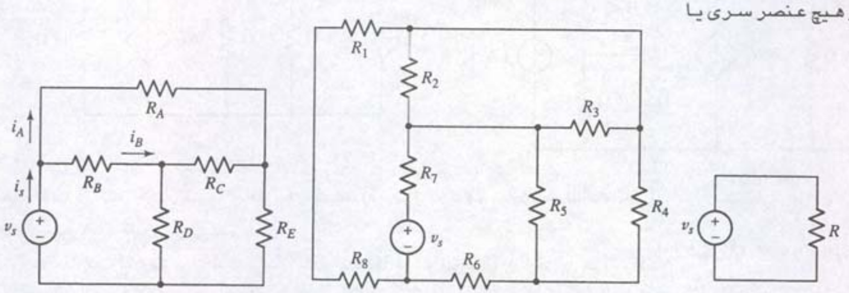
۱۲ـ۳ برای مدار شکل ۳۰ـ۳، ولتاژ v را بیابید.

جواب: 12.73V



شکل ۳۰ـ۳

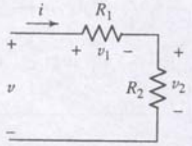
سه نکته دیگر برای ترکیب‌های سری و موازی باقی مانده است. نکته اول با توجه به شکل ۳۱ـ۳(الف) و طرح سوال "آیا v_s و R سری‌اند یا موازی؟" ارائه می‌گردد. جواب "هر دو" است. هر دو عنصر جریان برابری را حمل می‌کنند و بنابراین سری‌اند. این دو، ولتاژ برابری را نیز دارا هستند، پس موازیند.



شکل ۳۱ـ۳ (الف) عناصر این مدار هم سری و هم موازیند. (ب) R_2 و R_3 موازیند و R_1 و R_8 سری‌اند. (ج) در این مدار هیچ عنصر سری یا موازی وجود ندارد.

دومین نکته هشیاری است. ممکن‌است مدار توسط دانشجوی کم‌تجربه و یا مربی زیرکی طوری ترسیم شود که به راحتی قابل تشخیص نباشد. مثلاً در شکل ۳۱ـ۳(ب) تنها مقاومت‌های R_2 و R_3 به‌طور موازی بسته شده‌اند و R_1 و R_8 هم تنها مقاومت‌های سری‌اند.
آخرین نکته این‌که لزومی ندارد یک عنصر ساده با عنصر ساده دیگری در مدار، سری یا موازی باشد. مثلاً R_4 و R_5 در شکل ۳۱ـ۳(ب) با هیچ‌یک از عناصر ساده دیگر سری یا موازی نیستند، و نیز در شکل ۳۱ـ۳(ج) عنصر مداری ساده‌ای وجود ندارد که با دیگر عنصر مدار، سری یا موازی باشد. به بیان دیگر با به‌کارگیری هیچ تکنیکی بیش از این نمی‌توان مدار را ساده‌تر کرد.

۸ـ۳ تقسیم ولتاژ و جریان



شکل ۳۲ـ۳ نمایش تقسیم ولتاژ.

با ترکیب مقاومت‌ها و منابع روشی را برای کاهش تحلیل یک مدار یافتیم. تکنیک مفید دیگر در کاهش تحلیل، کاربرد تقسیم ولتاژ و جریان است. تقسیم ولتاژ برای بیان ولتاژ دو سر یکی از چند مقاومت سری، برحسب ولتاژ دو سر ترکیب آن‌ها ست. در شکل ۳۲ـ۳، ولتاژ دو سر R_2 با KVL و قانون اهم به‌دست‌می‌آید:

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

بنابراین:

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

پس

$$v_2 = iR_2 = \left(\frac{v}{R_1 + R_2}\right)R_2$$

یا

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,v$$

و به این ترتیب ولتاژ دو سر R_1 برابر است با:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,v$$

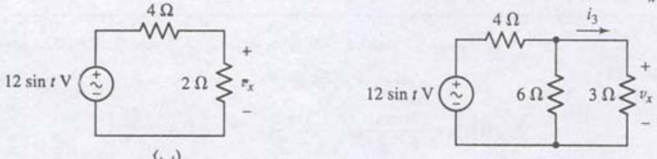
اگر در مدار شکل ۳۲ـ۳ به‌جای R_2 ترکیب سری R_2، R_3، ... و R_N را داشته باشیم، فرم کلی تقسیم ولتاژ در دو سر N مقاومت سری چنین است:

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}\,v \qquad (11)$$

که امکان محاسبه ولتاژ v_k را در دو سر یک مقاومت اختیاری R_k فراهم می‌سازد:

مثال ۱۳ـ۳

v_x را در مدار شکل ۳۳ـ۳ (الف) تعیین کنید.



شکل ۳۳ـ۳ مثالی عددی که ترکیب مقاومت‌ها و تقسیم ولتاژ را نشان می‌دهد. (الف) مدار اصلی. (ب) مدار ساده‌شده.

ابتدا مقاومت‌های 6Ω و 3Ω را ترکیب کرده و آن‌ها را با $(6)(3)/(6 + 3) = 2\Omega$ جایگزین می‌نماییم. چون v_x در دو سر ترکیب موازی برقرار است، ساده‌سازی موجب از دست رفتن این کمیت نمی‌گردد. با این وجود در ادامه ساده‌سازی مدار که از جایگزینی مقاومت 4Ω با این مقاومت 2 اهمی صورت می‌گیرد این اشکال به‌وجود خواهد آمد.

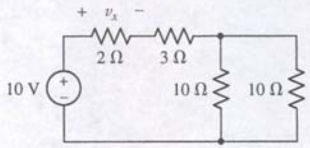
اینک تقسیم ولتاژ را به مدار شکل ۳۳ـ۳(ب) اعمال می‌نماییم.

$$v_x = (12 \sin t)\,\frac{2}{4+2} = 4 \sin t \quad \text{volts}$$

تمرین

۳ـ۱۳ برای تعیین v_x در مدار شکل ۳۴ـ۳، تقسیم ولتاژ را به‌کار ببرید.

جواب: 2V



شکل ۳۴ـ۳

دوگان[1] تقسیم ولتاژ، تقسیم جریان است. همان‌طور که در شکل ۳۵ـ۳ دیده می‌شود جریان کلی به چند مقاومت موازی اعمال شده است. جریان عبوری از مقاومت R_2 برابر است با:

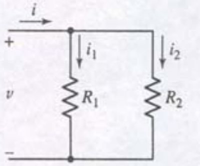
$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{i(R_1 \| R_2)}{R_2} = \frac{i}{R_2}\,\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

یا

$$i_2 = i\,\frac{R_1}{R_1+R_2} \tag{۱۲}$$

و به‌طور مشابه:

$$i_1 = i\,\frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{۱۳}$$



شکل ۳۵ـ۳ نمونه‌ای از تقسیم جریان.

هنوز از طبیعت و ساختار این دو معادله چندان خشنود نیستیم، چون ضرایب در دو معادله فوق با ضرایب متعلق به تقسیم ولتاژ تفاوت دارد و باید سعی کنیم از بروز هر گونه خطایی جلوگیری شود. بسیاری از دانشجویان رابطه تقسیم ولتاژ را "ساده" ولی رابطه جریان را "مشکل" می‌پندارند. برای جلوگیری از اشتباه باید به‌خاطر سپرد که مقاومت بزرگ‌تر در میان دو مقاومت موازی، همیشه جریان کمتری را از خود عبور می‌دهد. برای ترکیب موازی N مقاومت، جریان درون R_k برابر است با:

$$i_k = i\,\frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots+\frac{1}{R_N}} \tag{۱۴}$$

و اگر آن را برحسب هدایت بنویسیم:

$$i_k = i\,\frac{G_k}{G_1+G_2+\dots+G_N}$$

که به شدت معادله (۱۱) برای تقسیم ولتاژ را تداعی می‌کند.

مثال ۱۴ـ۳

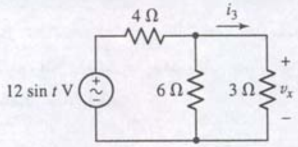
(در شکل ۳۶ـ۳) عبارتی برای جریان درون 3Ω در مدار بنویسید.

جریان کل در ترکیب دو مقاومت 3Ω و 6Ω برابر است با:

$$i(t) = \frac{12\sin t}{4+3\|6} = \frac{12\sin t}{4+2} = 2\sin t \ \text{A}$$

و بنابراین جریان مطلوب با رابطه تقسیم جریان داده می‌شود:

$$i_3(t) = (2\sin t)\left(\frac{6}{6+3}\right) = \frac{4}{3}\sin t \ \text{A}$$



شکل ۳۶ـ۳ مداری که به عنوان مثالی از تقسیم جریان به‌کار رفته است. خط موج در سمبل منبع ولتاژ به معنی ولتاژ سینوسی متغیر با زمان است.

1. Dual

متاسفانه تقسیم جریان هنگامی که قابل اعمال نیست، به کاربرده می‌شود. مثلاً دوباره مدار شکل ۳۱ـ۳(ج) را ملاحظه کنید. قبلاً دیدیم که در این مدار هیچ عنصری موازی یا سری نیست. بدون مقاومت موازی نمی‌توان تقسیم جریان را به‌کار برد. با وجود این دانشجویان زیادی هستند که با نگاهی سریع به مقاومت‌های R_A و R_B رابطه غلط زیر را هم بنویسند:

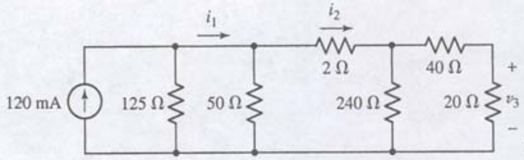
$$i_A \neq i_s\,\frac{R_B}{R_A+R_B}$$

توجه داشته باشید که مقاومت‌های موازی باید شاخه‌هایی بین یک جفت گره باشند.

تمرین

۳ـ۱۴ در مدار شکل ۳۷ـ۳، با روش ترکیب مقاومت‌ها و تقسیم جریان i_1، i_2 و v_3 را بیابید.

جواب: 100mA، 50mA و 0.8V.



شکل ۳۷ـ۳

۹ـ۳ خلاصه فصل و مرور

- قانون جریان کیرشهف (KCL) چنین بیان می‌کند که جمع جبری جریان‌های وارده به هر گروه صفر است.
- قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) بیان می‌کند که جمع جبری ولتاژهای حول یک مسیر بسته در یک مدار صفر است.
- همه عناصری که جریان یکسانی را حمل می‌کنند، به‌طور سری به هم متصل‌اند.
- همه عناصر یک مدار که در دو سر آن‌ها ولتاژ مشترکی برقرار است موازی نامیده می‌شوند.
- ترکیب سری N مقاومت را می‌توان با یک مقاومت $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$ جایگزین کرد.
- ترکیب موازی N مقاومت را می‌توان با یک مقاومت معادل که مقدار زیر را دارد جایگزین نمود:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

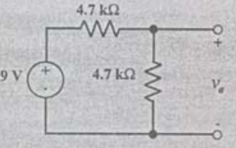
- منابع ولتاژ سری با یک منبع قابل تعویضند. به پلاریته هر یک باید خصوصاً توجه نمود.
- منابع جریان موازی را می‌توان با یک منبع تعویض کرد. به جهت جریان هر منبع باید دقت نمود.
- تقسیم ولتاژ این امکان را فراهم می‌سازد که بدانیم چه کسری از ولتاژ کل دو سر همه مقاومت‌های سری در دو سر هر یک از مقاومت‌ها، افت پیدا می‌کند.
- تقسیم جریان اجازه می‌دهد تا بدانیم چه کسری از جریان کل موجود در همه مقاومت‌های موازی، در یکی از مقاومت‌ها جریان دارد.

کاربردهای عملی

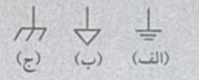
این زمین غیر جغرافیایی

تا بدینجا، ما شماتیک مدارها را مشابه شکل ۳ـ۳۸ ترسیم می‌کردیم، و در آن ولتاژها در دو سر دو پایانه مشخص تعریف می‌شدند. سعی شد از تعریف ولتاژ در یک نقطه جلوگیری شود. دلیل آن هم تعریف اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بود. با این وجود، بسیاری از نمودارها از قرارداد تعریف ولتاژ زمین صفر ولت استفاده می‌کنند، به این ترتیب که همه ولتاژهای دیگر نسبت به آن سنجیده می‌شود. این مفهوم که **زمین**[1] خوانده شده اساساً به قوانین حفاظت برای ممانعت از آتش‌سوزی، شوک‌های الکتریکی مخرّب و عوارض مربوطه گره‌خورده است. علامت اتصال زمین در شکل ۳ـ۳۹ (الف) مشاهده می‌شود.

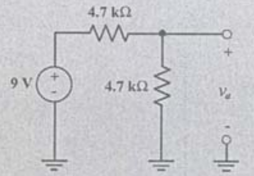
چون اتصال زمین به‌عنوان مرجع صفر ولت تعریف شده است، غالباً استفاده از آن به‌عنوان پایانه مشترک رایج است. مدار شکل ۳ـ۳۸ بر اساس این روش در شکل ۳ـ۴۰ دوباره ترسیم شده و در آن اتصال زمین با یک گره مشترک نشان داده شده است. توجه داشته باشید که هر دو مدار به لحاظ مقدار v_a یکی هستند (4.5V در هر یک از آن‌ها) ولی در واقع آن‌ها مدار یکسانی نیستند. مدار شکل ۳ـ۳۸ را "شناور" گوییم به این علت که می‌تواند برای هر هدفی عملی، در یک مدار حتی روی یک ماهواره نصب گردد. با این وجود مدار شکل ۳ـ۴۰ بنحوی به‌طور فیزیکی از طریق یک مسیر اتصال به زمین وصل شده است. به این علت دو سمبل دیگر نیز گاهاً برای بیان یک پایانه مشترک به‌کار می‌رود. شکل ۳ـ۳۹ (ب) آن‌چه را که به‌نام **زمین سیگنال**[2] خوانده می‌شود، نشان می‌دهد. غالباً ولتاژ قابل توجهی بین اتصال زمین و هر پایانه زمین سیگنال می‌تواند وجود داشته باشد (و دارد). این‌که پایانه مشترک یک مدار ممکن‌است به بعضی مسیرهای کم مقاومت به صفر زمین وصل باشد یا نباشد، منجر به ایجاد وضعیت خطرناک پتانسیلی می‌گردد. نمودار شکل ۳ـ۴۱ (الف) را ملاحظه نمایید، که در آن یک شخص بی‌گناه می‌خواهد دستگاهی را که به برق ac وصل است لمس کند. برای سوکت روی دیوار تنها دو سیم درنظرگرفته شده است و سیم سوم آزاد رها شده است. ترمینال مشترک هر مدار در دستگاه به‌هم وصل و جمعاً به شاسی دستگاه



شکل ۳ـ۳۸ مدار ساده‌شده با ولتاژ v_a بین دو پایانه.



شکل ۳ـ۳۹ سه سمبل متفاوت برای نمایش اتصال زمین با پایانه مشترک. (الف) زمین، (ب) زمین سیگنال و (ج) زمین شاسی.



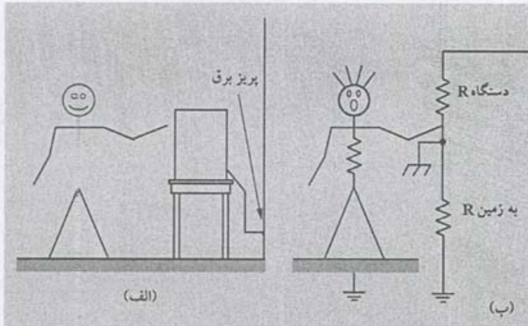
شکل ۳ـ۴۰ مدار شکل ۳ـ۳۸ با سمبل زمین دوباره رسم شده است. سمبل زمین سمت راست اضافی است. این علامت فقط برای نام‌گذاری پایانهٔ مثبت و منفی v_a لازم است.

متصل شده‌اند. این پایانه اغلب با سمبل زمین شاسی شکل ۳ـ۳۹ (ج) نشان داده می‌شود. با این وجود، اتصال الکتریکی به زمین یک مقاومت غیرصفری را می‌سازد. در هر حالت، دلیلی وجود ندارد که زمین شاسی در سطح ولتاژ زمین باشد. یک شبه نمودار از آن‌چه که بیان شد در شکل ۳ـ۴۱ (ب) دیده می‌شود (در این شکل مقاومت معادل فرد نیز در بدن او کشیده شده است). اگر مقاومت معادل فرد به مقدار قابل توجهی از دیگر مقاومت‌های واقع در مسیر زمین کمتر باشد، ... اجازه بدهید که دیگر بیش از این سخن نگوییم که چه اتفاقی در پایان افتاده است.

این واقعیت که "زمین" همیشه "زمین واقعی" نیست می‌تواند موجب ظهور مشکلات عدیده ناشی از پارازیت‌های الکتریکی گردد. مثالی از این گونه مشکلات گاهی در ساختمان‌های قدیمی دیده می‌شود، که در آن‌ها لوله‌های آب از مس ساخته می‌شوند. در این ساختمان‌ها، از لوله‌های آب به‌عنوان مسیرهای کم مقاومت به زمین در بسیاری از ارتباطات برقی استفاده می‌شود. با این وجود، اگر این لوله‌ها با لوله‌های مدرن‌تر و لوله‌های عایق PVC جایگزین شوند، دیگر مسیر کم‌مقاومت وجود ندارد. در محل‌هایی هم که ترکیب زمین از نقطه‌ای به نقطه دیگر خیلی متفاوت است مشکل مشابهی مشاهده می‌شود. در واقع، در چنین مواردی ممکن‌است بین دو ساختمان زمین یکسانی نباشد و درنتیجه جریانی بین آن‌ها جاری شود.

در این کتاب، سمبل صفر زمین به کاربرده خواهد شد. با این وجود، باید به‌خاطر داشت که همه زمین‌ها در عمل یکسان نیستند.

1. earth ground 2. signal ground



شکل ۳ـ۴۱ (الف) عکس شخص بیگناهی که در حالت لمس دستگاهی است که به‌طور صحیح به زمین وصل نشده است. مسلماً بعد از این‌کار چندان شادمان نخواهد بود. (ب) شماتیک مدار معادل، همراه با مقاومت معادل فرد، مسیر غیرانسانی مجموعه نیز با یک مقاومت متصل به زمین نشان داده شده است.

۳ـ۱۰ خواندنی‌های کمکی

A discussion of the principles of conservation of energy and conservation of charge, as well as Kirchhoff's laws, can be found in

R. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989, pp. 4-1, 4-7, and 25-9.

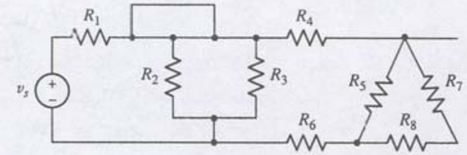
A very detailed discussion of grounding practices consistent with the 1996 National Electrical Code® can be found in

J. F. McPartland and B. J. McPartland, *McGraw-Hill's National Electrical Code® Handbook*, 22nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996, pp. 337–485.

مسائل

۳ـ۱ گره‌ها، حلقه‌ها، مسیرها و شاخه‌ها

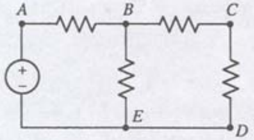
۱. مدار شکل ۳ـ۴۲ را دوباره بکشید. تعداد گره‌ها را به حداقل برسانید.



شکل ۳ـ۴۲

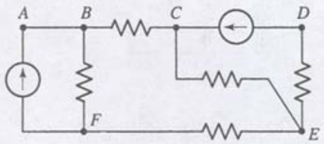
۲. در مدار شکل ۳ـ۴۲، تعداد (الف) گره‌ها، (ب) تعداد شاخه‌ها را بشمارید.

۳. در شکل ۳ـ۴۳، (الف) چند گره وجود دارد؟ (ب) چند شاخه موجود است؟ و (ج) اگر از A به B به E به D به C و به B برویم، آیا یک مسیر ساخته‌ایم؟ یا یک حلقه؟



شکل ۳ـ۴۳

۴. در شکل ۳ـ۴۴، (الف) چند گره وجود دارد؟ (ب) چند شاخه وجود دارد؟ و (ج) اگر از B به F به E و به C حرکت کنیم، آیا یک مسیر را طی کرده‌ایم؟ یا یک حلقه را؟



شکل ۳ـ۴۴

۵. با مراجعه به مدار شکل ۳ـ۴۳:

الف. اگر یک سیم ثانوی بین نقاط E و D از مدار وصل شود. مدار جدید چند گره دارد؟

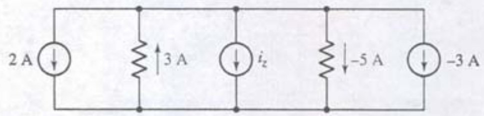
ب. اگر یک مقاومت به مدار اضافه شود به نحوی که یک پایانه به نقطه C وصل شود و پایانه دیگر آزاد شود، مدار چند گره دارد؟

ج. کدام‌یک از موارد زیر حلقه‌ها را نشان می‌دهد؟

۱. حرکت از نقطه A به B به C به D به E به A
۲. حرکت از B به E به A
۳. حرکت از B به C به D به E به B
۴. حرکت از A به B به C
۵. حرکت از A به B به C به B به A

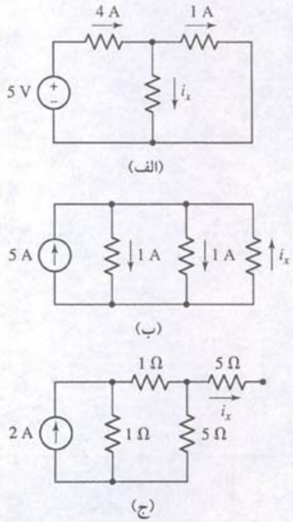
۳ـ۲ قانون جریان کیرشهف

۶. (الف) جریان i_z در مدار شکل ۳ـ۴۵ را معین کنید. (ب) اگر مقاومت حمل‌کننده 3A، برابر 1Ω باشد، مقاومتی که جریان -5A را حمل می‌کند چقدر است؟



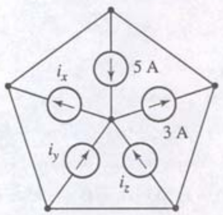
شکل ۳ـ۴۵

۷. در هر یک از مدارهای شکل ۳ـ۴۶، جریان i_x را بیابید.



شکل ۳ـ۴۶

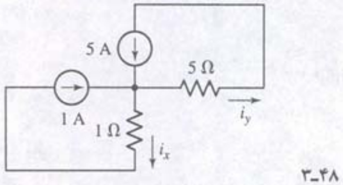
۸. به شکل ۳ـ۴۷ مراجعه کنید. (الف) اگر $i_y = 2A$ و $i_z = 0A$ باشد، i_x را پیدا کنید. (ب) اگر $i_x = 2A$ و $i_z = 2i_y$، i_y را به‌دست‌آورید. (ج) اگر $i_x = i_y = i_z$ باشد، i_z را به‌دست‌آورید.



شکل ۳ـ۴۷

۹. i_x و i_y را در مدار شکل ۳ـ۴۸ بیابید.

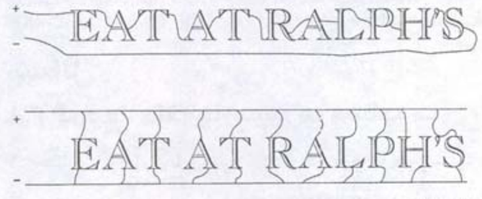
۱۰. یک لامپ حبابی 100 W، یک لامپ 60 W و یک لامپ 40 W با هم به‌طور موازی بسته شده‌اند و جمعاً به ولتاژ منبع 115 V وصل شده‌اند. جریان در هر لامپ و جریان کل از منبع را بدست آورید.



شکل ۳ـ۴۸

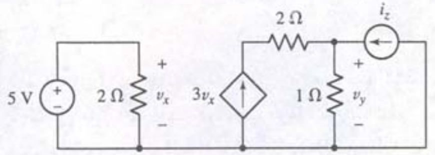
۱۱. یک مولتی‌متر دیجیتال (DMM) وسیله‌ای است که عموماً برای اندازه‌گیری ولتاژها به کار می‌رود. این وسیله مجهز به دو سیم (معمولاً قرمز برای مرجع مثبت و سیاه برای مرجع منفی) و یک نمایشگر LCD است. بیایید فرض کنید که یک DMM به مدار شکل ۳ـ۴۶ (ب) چنان وصل شده که سیم مثبت در گره بالا و سیم منفی در گره پایین باشد. با استفاده از KCL توضیح دهید که چرا به‌طور ایده‌آل می‌خواهیم DMM به کار رفته دارای مقاومت بینهایت در برابر مقاومت صفر باشد؟

۱۲. یک رستوران محلی دارای تابلوی نئون ساخته‌شده از 12 لامپ جداگانه است؛ وقتی که لامپ خراب شود، مقاومت بینهایت داشته و جریانی نخواهد بود. در سیم‌کشی تابلو سازنده دو راه را پیشنهاد نموده است (شکل ۳ـ۴۹). از کدام‌یک KCL را می‌آموزید، مالک رستوران کدام‌یک را باید انتخاب کند؟ توضیح دهید.



شکل ۳ـ۴۹

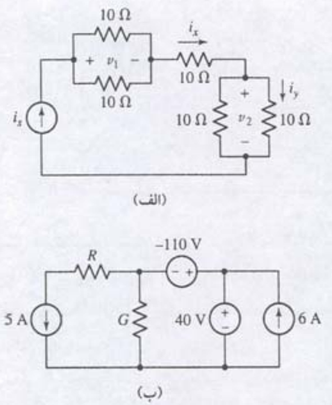
۱۳. در مدار شکل ۳ـ۵۰، (الف) اگر $i_z = -3A$ باشد، v_y را محاسبه کنید. (ب) منبع 5V را با چه ولتاژی جایگزین کنیم تا در $i_z = 0.5A$، ولتاژ $v_y = -6V$ به‌دست‌آید؟



شکل ۳ـ۵۰

۱۴. با توجه به شکل ۳ـ۵۱، (الف) اگر $i_x = 5A$ باشد v_1 و i_y را بیابید. (ب) اگر $v_1 = 3V$ باشد، i_x و i_y را پیدا کنید. (ج) چه مقداری از i_s منجر به $v_1 \neq v_2$ می‌گردد؟

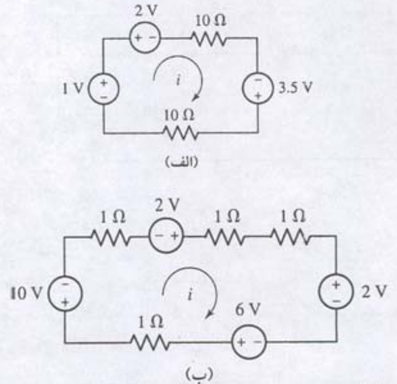
۱۵. R و G را در مدار شکل ۳ـ۵۱ (ب) به‌دست‌آورید. با این فرض که منبع 5A، توان 100W و منبع 40V توان 500W را تولید کنند.



شکل ۳ـ۵۱

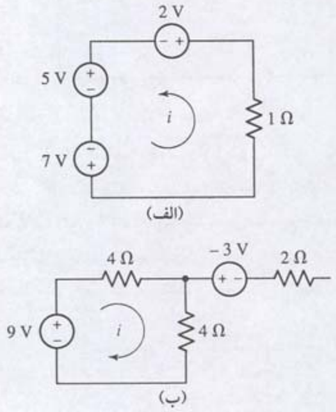
۳ـ۳ قانون ولتاژ کیرشهف

۱۶. در مدار شکل ۳ـ۵۲ (الف) و (ب) جریان i را معین نمایید.



شکل ۳ـ۵۲

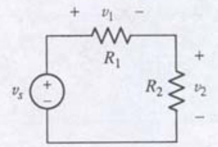
۱۷. مقدار i را در هر یک از مدارهای شکل ۳ـ۵۳ محاسبه نمایید.



شکل ۳ـ۵۳

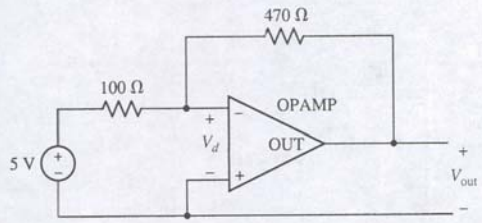
۱۸. مدار ساده شکل ۳ـ۵۴ را ملاحظه نمایید. با KVL، عبارات زیر را به دست آورید:

$$v_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad v_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



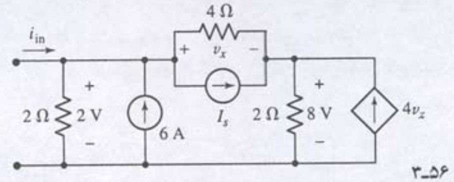
شکل ۳ـ۵۴

۱۹. مدار شکل ۳ـ۵۵ شامل یک وسیله به نام op-amp (تقویت‌کننده عملیاتی) است. این وسیله دو خاصیت غیرعادی دارد که در مدار نشان داده شده است: (۱) $V_d = 0$ V و (۲) هیچ جریانی نمی‌تواند از هر یک از پایانه‌ها داخل شود (با علامت "−" و "+" در داخل نماد)، ولی می‌تواند از خروجی جریان یابد (با "out" علامت خورده است). این وضعیت به ظاهر ناممکن ـ که در تقابل مستقیم با KCL است ـ نتیجه سیم‌های انرژی است که در شکل نشان داده نشده است. بر اساس این اطلاعات، V_{out} را محاسبه کنید (راهنمایی: دو معادله KVL لازم است، هر دو منبع 5 V را شامل می‌شوند).



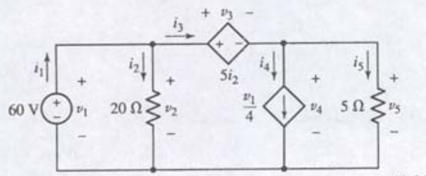
شکل ۳ـ۵۵

۲۰. قوانین اهم و کیرشهف را در شکل ۳ـ۵۶ برای یافتن (الف) v_x، (ب) i_{in} و (ج) I_s، به کار ببرید. (د) توان تهیه‌شده به‌وسیله منبع وابسته چقدر است؟



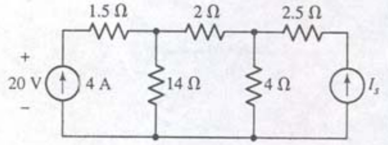
شکل ۳ـ۵۶

۲۱. (الف) با به‌کارگیری گام‌به‌گام قوانین اهم و کیرشهف، همه جریان‌ها و ولتاژها را در مدار شکل ۳ـ۵۷ به‌دست‌آورید. (ب) توان جذب‌شده به‌وسیله هر پنج عنصر مدار را محاسبه کنید و نشان دهید که مجموع آن‌ها صفر است.



شکل ۳ـ۵۷

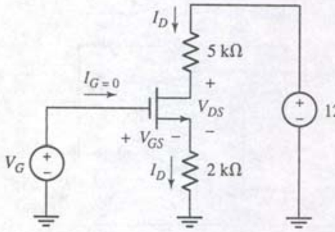
۲۲. با مراجعه به شکل ۳.۵۸، توان جذب‌شده به وسیله هر هفت عنصر مدار را معین کنید.



شکل ۳_۵۸

۲۳. مداری دارای شش عنصر و چهار گره با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ است. هر عنصر مدار بین دو گره واقع است. ولتاژ v_{12} (مرجع در اولین گره) برابر 12V و $v_{34} = -8V$ است. اگر v_{14} برابر (الف) 0، (ب) 6V و (ج) -6V باشد، مقادیر v_{13}، v_{23} و v_{24} را بیابید.

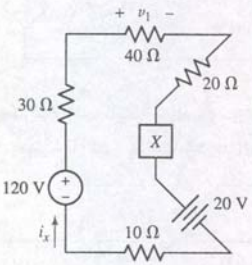
۲۴. به مدار ترانزیستوری شکل ۳.۵۹ مراجعه کنید. به‌خاطر بسپارید که گرچه روابط ولتاژ ـ جریان آن‌را نمی‌دانیم ولی از KCL و KVL تبعیت می‌کنند. (الف) اگر $I_D = 1.5mA$ باشد v_{DS} را محاسبه کنید. (ب) اگر $I_D = 2mA$ و $v_G = 3V$ باشد v_{GS} را محاسبه نمایید.



شکل ۳_۵۹

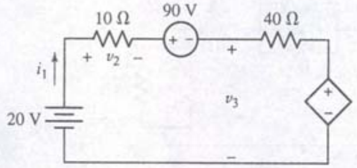
۳_۴ مدار یک‌حلقه‌ای

۲۵. توان جذب‌شده با عنصر X در شکل ۳.۶۰ را (الف) با مقاومت 100Ω، (ب) با منبع ولتاژ مستقل 40V و علامت + در بالا، (ج) منبع ولتاژ وابسته $25i_x$ و علامت مرجع + در بالا، (د) منبع ولتاژ وابسته $0.8v_1$ و علامت + در بالا، (ه) منبع جریان مستقل، با پیکان جریان رو به بالا، به‌دست‌آورید.



شکل ۳_۶۰

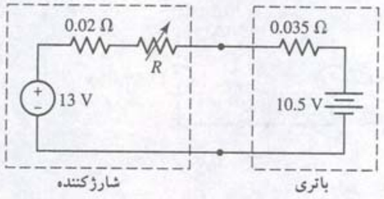
۲۶. i_1 را در مدار شکل ۳.۶۱ بیابید به‌شرطی که منبع ولتاژ وابسته (الف) $2v_2$، (ب) $1.5v_3$ و (ج) $-15i_1$ باشد.



شکل ۳_۶۱

۲۷. در شکل ۳.۶۱ منبع وابسته را $1.8v_3$ فرض کنید. اگر (الف) منبع 90V توان 180W را تولید کند، (ب) منبع 90V، توان 180W را جذب نماید، (ج) منبع وابسته 100W را تولید نماید و (د) منبع وابسته 100W را جذب کند، v_3 را بیابید.

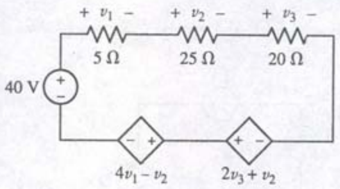
۲۸. برای مدار شارژ باطری شکل ۳.۶۲ مقدار مقاومت قابل تنظیم را پیدا کنید به‌نحوی که (الف) جریان شارژ 4A باشد. (ب) توان 25W به باطری منتقل گردد (10.5V و 0.035Ω) (ج) ولتاژی برابر 11V در پایانه‌های باطری ایجاد شود (10.5V و 0.035Ω).



شکل ۳_۶۲

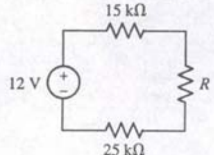
۲۹. مدار شکل ۳.۶۲ با نصب یک منبع ولتاژ وابسته سری با باطری اصلاح‌شده است. مرجع + را در پایین قرار دهید و کنترل را $0.05i$ اختیار نمایید، که i حلقه جریان ساعتگرد است. جریان و ولتاژ باطری را ضمن لحاظ منبع وابسته، اگر $R = 0.5Ω$ باشد، پیداکنید.

۳۰. توان جذب‌شده به وسیله هر شش عنصر شکل ۳.۶۳ را بیابید.



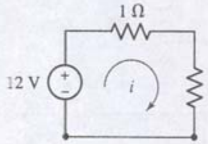
شکل ۳_۶۳

۳۱. برای مدار شکل ۳.۶۴، (الف) مقاومت R را طوری تعیین کنید که مقاومت 25kΩ توان 2mV را جذب نماید. (ب) مقاومت R را طوری معین کنید که منبع 12V، توان 3.6mV را به مدار حمل نماید. (ج) مقاومت R را با یک منبع ولتاژ جایگزین نمایید به‌نحوی که هیچ توانی به وسیله مقاومت‌ها جذب نشود. مدار را رسم کنید و پلاریته منبع جدید را مشخص کنید.



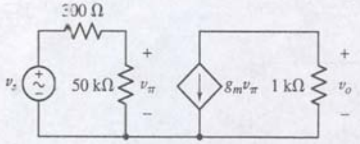
شکل ۳_۶۴

۳۲. با ارجاع به جدول ۲.۴، اگر قطعه سیم تحتانی در مدار شکل ۳.۶۵ از نوع مسی 22AWG با طول 3000ft باشد، جریان i را محاسبه کنید.



شکل ۳_۶۵

۳۳. در شکل ۳.۶۶، اگر $g_m = 2.5 \times 10^{-3}$ و $v_s = 10\cos 5t$ mV باشد $v_o(t)$ را پیدا کنید.

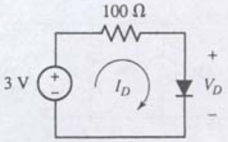


شکل ۳_۶۶

۳۴. قوانین کیرشهف مستقل از قانون اهم روی یک عنصر خاص معتبرند. مثلاً مشخصه I-V یک دیود با رابطه زیر داده می‌شود:

$$I_D = I_S(e^{V_D/V_T} - 1)$$

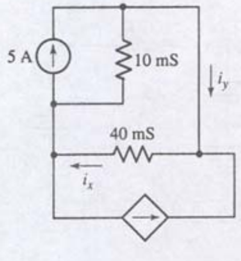
که در آن $V_T = 27mV$ در دمای اتاق و I_S می‌تواند بین $10^{-12}A$ تا $10^{-3}A$ تغییر نماید. در مدار شکل ۳.۶۷ و با استفاده از KVL/KCL، V_D را به ازای $I_S = 3\mu A$ معین کنید (توجه: این مسئله روش حل "تکرار" را برای یافتن حل عددی می‌طلبد. بسیاری از ماشین‌حساب‌ها قادرند این نوع تابع را حل کنند).



شکل ۳_۶۷

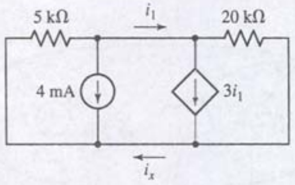
۳_۵ مدار زوج تک‌گرهی

۳۵. توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر از مدار شکل ۳.۶۸ را بیابید به‌شرطی که کنترل منبع وابسته (الف) $0.8i_x$ و (ب) $0.8i_y$ باشد.



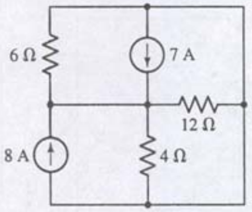
شکل ۳_۶۸

۳۶. در مدار شکل ۳.۶۹، i_x را پیدا کنید.



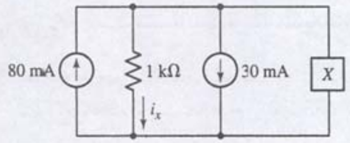
شکل ۳_۶۹

۳۷. توان جذب‌شده به‌وسیله هر عنصر را در مدار جفت‌گره شکل ۳.۷۰ بیابید.



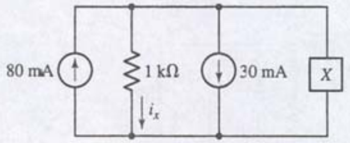
شکل ۳_۷۰

۳۸. توان جذب‌شده به‌وسیله عنصر X در مدار شکل ۳.۷۱ را پیدا کنید به‌شرطی‌که (الف) مقاومت 4kΩ باشد، (ب) منبع جریان مستقل 20mA، پیکان مرجع رو به پایین، (ج) منبع جریان وابسته، پیکان مرجع رو به پایین و با $2i_x$ برچسب خورده باشد و (د) منبع ولتاژ 60V و قطب + در بالا باشد.



شکل ۳_۷۱

۳۹. (الف) فرض کنید که X در شکل ۳.۷۲، یک منبع جریان مستقل i_s پیکان رو به بالا باشد، اگر هیچ‌یک از چهار عنصر مدار توانی جذب نکنند، i_s چقدر است؟ (ب) فرض کنید که عنصر X یک منبع ولتاژ مستقل، علامت + در سمت بالا و با علامت v_s برچسب خورده باشد. گر منبع ولتاژ توانی جذب نکند، v_s چقدر است؟

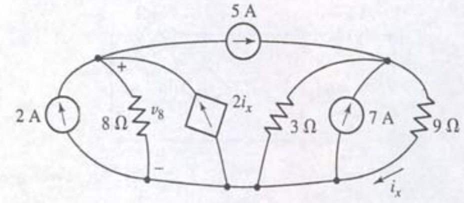


شکل ۳_۷۲

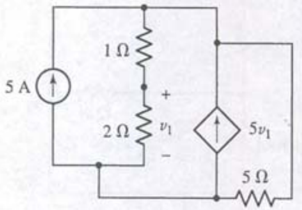
۴۰. (الف) تکنیک‌های تحلیل جفت‌گرهی را به گره سمت راست بالا در شکل ۳.۷۳ اعمال کرده و i_x را بیابید. (ب) اکنون با گره سمت چپ بالا کار کرده و v_8 را پیدا کنید. (ج) منبع 5A چه توانی را تولید می‌کند.

۴۱. توان جذب‌شده با مقاومت 5Ω در شکل ۳.۷۴ چقدر است؟

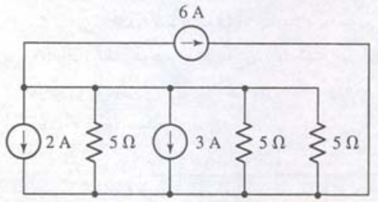
۴۲. توان تولیدی به وسیله هر منبع در شکل ۳.۷۵ را محاسبه نمایید.



شکل ۳ـ۷۳

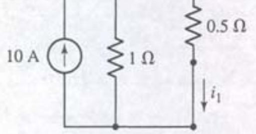


شکل ۳ـ۷۴



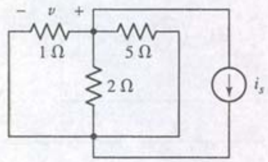
شکل ۳ـ۷۵

۴۳. با مراجعه به جدول ۲ـ۴، برای قطعه سیم شکل ۳ـ۷۶ چقدر سیم مسی نمره 28AWG لازم است تا $i_1 = 5A$ به‌دست‌آید.



شکل ۳ـ۷۶

۴۴. اگر در مدار شکل ۳ـ۷۷، $v = 6V$ باشد، i_s را بیابید.



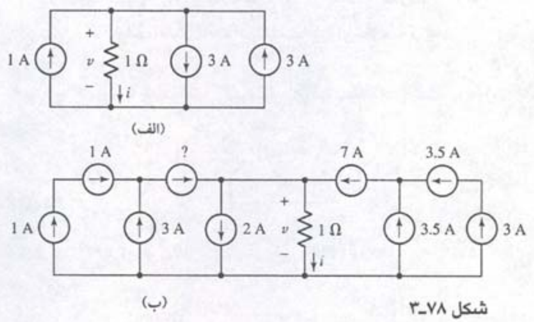
شکل ۳ـ۷۷

۳ـ۶ منابع متصل سری و موازی

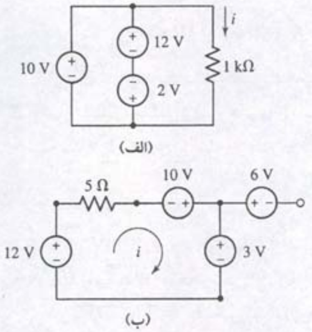
۴۵. با استفاده از ترکیب سری منابع، i را برای هر دو مدار شکل ۳ـ۷۸ محاسبه کنید.

۴۶. برای هر مدار در شکل ۳ـ۷۸، v را پس از ترکیب منابع، به‌دست‌آورید.

۴۷. جریان i را در هر مدار شکل ۳ـ۷۹ محاسبه نمایید.

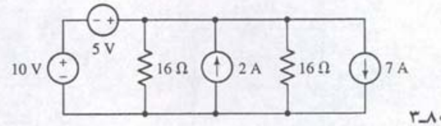


شکل ۳ـ۷۸



شکل ۳ـ۷۹

۴۸. توان جذب‌شده به وسیله هر یک از مقاومت‌های 16 اهم در شکل ۳ـ۸۰ را بیابید.



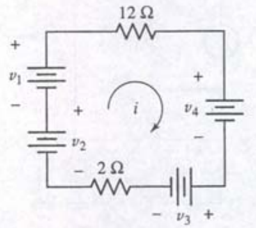
شکل ۳ـ۸۰

۴۹. برای مدار شکل ۳ـ۸۱، i را محاسبه کنید به‌شرطی‌که:

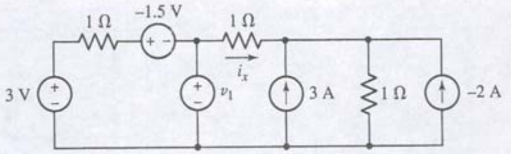
(الف) $v_1 = v_2 = 10V$ و $v_3 = v_4 = 6V$

(ب) $v_1 = v_3 = 3V$ و $v_2 = v_4 = 2.5V$

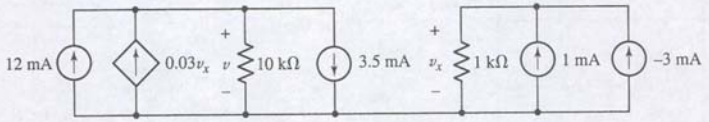
(ج) $v_1 = -3V$ و $v_2 = 1.5V$، $v_3 = -0.5V$ و $v_4 = 0V$ باشد.



شکل ۳ـ۸۱



شکل ۳ـ۸۲

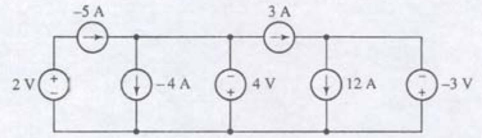


شکل ۳ـ۸۳

۵۰. در مدار شکل ۳ـ۸۲، v_1 را برای دستیابی به $i_x = 2A$ انتخاب نمایید.

۵۱. ولتاژ v را در مدار شکل ۳ـ۸۳ پیدا کنید.

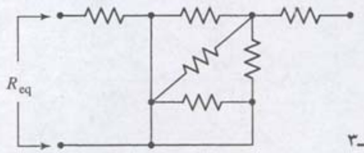
۵۲. مدار شکل ۳ـ۸۴ حاوی چندین مثال از منابع جریان و ولتاژ سری و موازی است. (الف) توان جذب‌شده به‌وسیله هر منبع را معین کنید. (ب) برای کاهش توان تولیدی از منبع -5A به صفر، منبع 4V چقدر باید تغییر نماید.



شکل ۳ـ۸۴

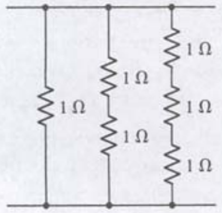
۳ـ۷ مقاومت‌های سری و موازی

۵۳. مقاومت معادل R_{eq} را در شکل ۳ـ۸۵ محاسبه نمایید، به‌شرطی‌که هر مقاومت 1kΩ باشد.



شکل ۳ـ۸۵

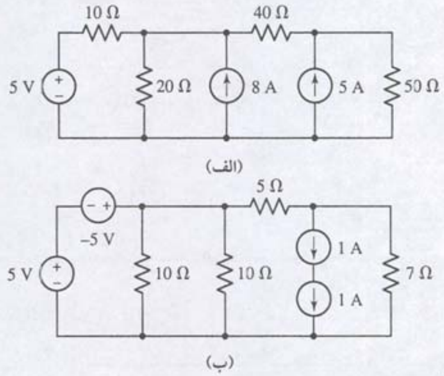
۵۴. برای مدار شکل ۳ـ۸۶: (الف) مقاومت معادل را محاسبه نمایید. (ب) عبارتی برای مقاومت معادل پیدا کنید. به‌شرطی‌که تعداد شاخه‌ها یا انشعاب‌های مدار تا N گسترش یابد، و هر شاخه یک مقاومت بیش از شاخه سمت چپ داشته باشد.



شکل ۳ـ۸۶

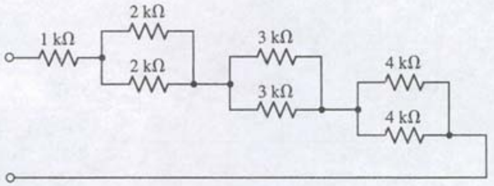
۵۵. با فرض وجود سه مقاومت 10kΩ، سه مقاومت 47kΩ و سه مقاومت 1kΩ ترکیبات زیر را به‌دست‌آورید (لزومی ندارد که همه مقاومت‌ها به‌کارروند): (الف) 5kΩ، (ب) 47333Ω و (ج) 29.5kΩ.

۵۶. شبکه شکل ۳ـ۸۷ را با استفاده از ترکیب منابع و مقاومت‌ها ساده کنید.



شکل ۳ـ۸۷

۵۷. مقاومت معادل را برای مدار شکل ۳ـ۸۸ حساب نمایید.

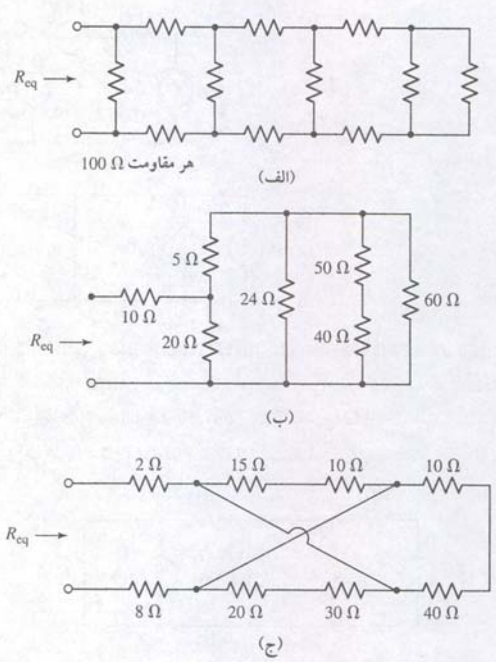


شکل ۳ـ۸۸

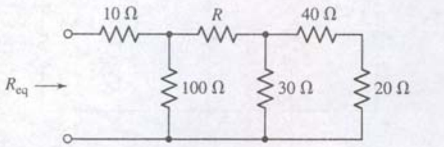
۵۸. R_{eq} را در هر شبکه مقاومتی از شکل ۳ـ۸۹ بیابید.

۵۹. در شبکه شکل ۳ـ۹۰: (الف) $R = 80Ω$، R_{eq} را پیدا کنید، (ب) اگر $R_{eq} = 80Ω$ باشد، R را به‌دست‌آورید، (ج) اگر $R = R_{eq}$ باشد، R را بیابید.

۶۰. نشان دهید که با ترکیب 4 مقاومت 100Ω چگونه می‌توان مقاومت معادل (الف) 25Ω، (ب) 60Ω و (ج) 40Ω را به‌دست‌آورد.

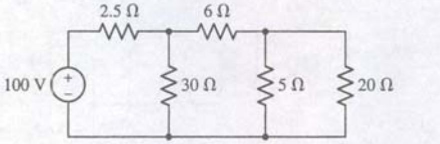


شکل ۳-۸۹



شکل ۳-۹۰

۶۱. توان جذب‌شده توسط هر مقاومت در مدار شکل ۳-۹۱ را پیدا کنید.



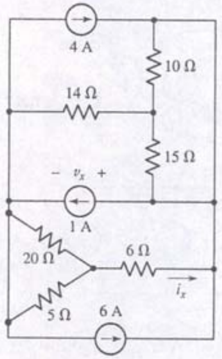
شکل ۳-۹۱

۶۲. از روش ترکیب منبع و مقاومت برای یافتن v_x و i_x در شکل ۳-۹۲ استفاده نمایید.

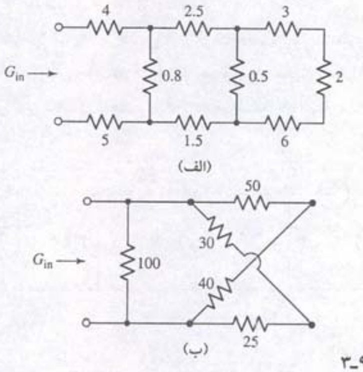
۶۳. در هر یک از شبکه‌های شکل ۳-۹۳، G_{in} را تعیین نمایید. همه مقادیر به میلی‌زیمنس (mS) هستند.

۳-۸ تقسیم ولتاژ و جریان

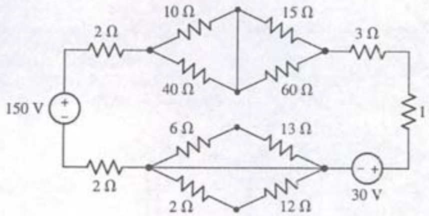
۶۴. از ترکیب مقاومت و منبع و تقسیم جریان در مدار شکل ۳-۹۴ برای یافتن توان جذب‌شده به وسیله مقاومت‌های 1Ω، 10Ω و 13Ω استفاده کنید.



شکل ۳-۹۲

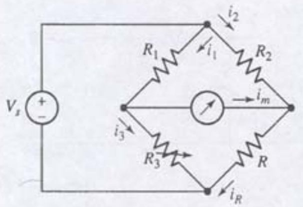


شکل ۳-۹۳



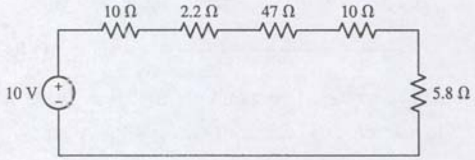
شکل ۳-۹۴

۶۵. پل وتستون (شکل ۳-۹۵) یکی از شناخته‌شده‌ترین مدارهای الکتریکی است. در اندازه‌گیری مقاومت استفاده می‌شود. مقاومتی که یک پیکان (فلش) بر روی سمبلش دارد (R_3) یک مقاومت متغیر است و گاهی به آن پتانسیومتر می‌گویند. مقدار آن می‌تواند با چرخش پیچ ولوم آن، تغییر یابد. آمپرمتر که با یک دایره با یک پیکان در داخل آن مشخص شده، جریان درون سیم وسط را اندازه می‌گیرد. ما فرض می‌کنیم که این آمپرمتر ایده‌آل است، به نحوی که مقاومت درونی آن صفر است. طرز کار ساده است. مقدار R_1، R_2 و R_3 معلوم‌اند، و مقدار R موردنظر است. مقاومت R_3 تنظیم می‌شود تا $i_m = 0$ گردد. به بیان دیگر تا زمانی که جریانی از آمپرمتر نگذرد، می‌گویند در این نقطه پل بالانس است. با استفاده از KCL و KVL نشان دهید که $R = \frac{R_2}{R_1} R_3$ (راهنمایی: $i_m = 0$، $i_1 = i_3$ و $i_2 = i_R$ و افت ولتاژی در دو سر آمپرمتر نیست).



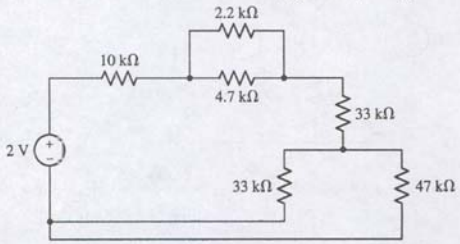
شکل ۳-۹۵

۶۶. مدار شکل ۳-۹۶ متشکل از چند مقاومت متصل سری است. از تقسیم ولتاژ استفاده کنید و افت ولتاژ در دو سر کوچک‌ترین مقاومت و بزرگ‌ترین مقاومت را به دست آورید.



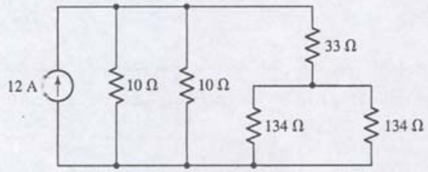
شکل ۳-۹۶

۶۷. از تقسیم ولتاژ استفاده کنید و افت ولتاژ را در دو سر مقاومت 47 kΩ در شکل ۳-۹۷ به دست آورید.



شکل ۳-۹۷

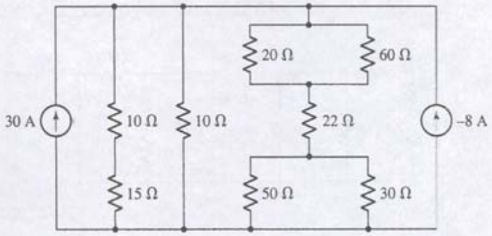
۶۸. با مراجعه به شکل ۳-۹۸، از تقسیم جریان برای محاسبه جریان از بالا به پایین در (الف) مقاومت 33Ω، (ب) مقاومت 134Ω سمت راست استفاده کنید.



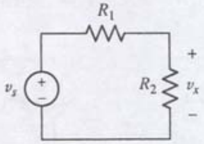
شکل ۳-۹۸

۶۹. در شکل ۳-۹۹ ولتاژ دو سر مقاومت 15Ω موردنظر است. از تقسیم جریان برای محاسبه آن استفاده کنید.

۷۰. با انتخاب مقاومت‌های زیر R_1، v_s و R_2 را در شکل ۳-۱۰۰ انتخاب کنید تا $v_x = 5.5V$ باشد (ممکن است مقاومت‌ها را بیش از یک بار به کار ببرید). [1kΩ، 3.3kΩ، 4.7kΩ و 10kΩ]

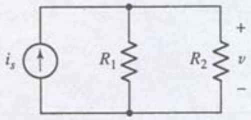


شکل ۳-۹۹



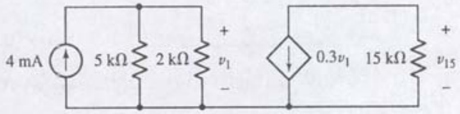
شکل ۳-۱۰۰

۷۱. با انتخاب مقادیر مقاومت زیر (ممکن است بیش از یک بار به کار روند) مقادیر R_1، i_s و R_2 را در شکل ۳-۱۰۱ تنظیم کنید تا $v = 5.5$ گردد. [1kΩ، 3.3kΩ، 4.7kΩ و 10kΩ]



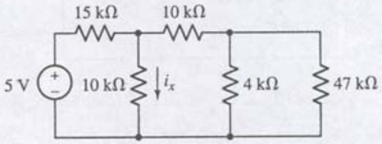
شکل ۳-۱۰۱

۷۲. توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 15kΩ در شکل ۳-۱۰۲ را معین کنید.



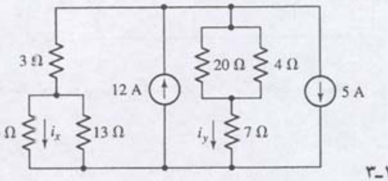
شکل ۳-۱۰۲

۷۳. برای مدار شکل ۳-۱۰۳، i_x را مشخص کنید و توان جذب‌شده با مقاومت 15kΩ را محاسبه نمایید.



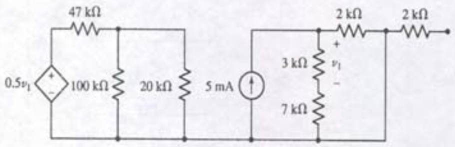
شکل ۳-۱۰۳

۷۴. برای مدار شکل ۳-۱۰۴، i_x و i_y و توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 3Ω چقدر است؟



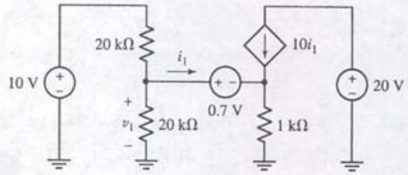
شکل ۳-۱۰۴

۷۵. توان تلف‌شده به وسیله مقاومت $47k\Omega$ در شکل ۱۰۵-۳ چقدر است؟



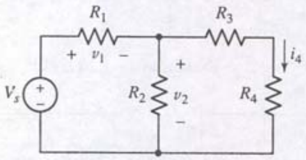
شکل ۱۰۵-۳

۷۶. بگویید چرا تقسیم ولتاژ نمی‌تواند برای تعیین v_1 در شکل ۱۰۶-۳ به‌کار رود.



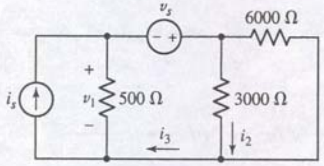
شکل ۱۰۶-۳

۷۷. از تقسیم جریان و ولتاژ در مدار شکل ۱۰۷-۳، عبارتی برای (الف) v_2، (ب) v_1 و (ج) i_4 پیدا کنید.



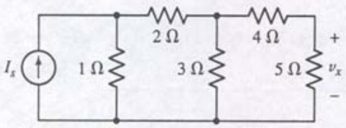
شکل ۱۰۷-۳

۷۸. با مراجعه به مدار شکل ۱۰۸-۳: (الف) با فرض $v_3 = 40V$، $i_s = 0$، v_1 را پیدا کنید، (ب) با فرض $v_s = 0$ و $i_s = 3mA$، i_2 و i_3 را معین کنید.



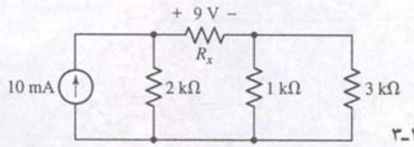
شکل ۱۰۸-۳

۷۹. در شکل ۱۰۹-۳: (الف) اگر $v_x = 10V$ باشد، I_s را به‌دست‌آورید. (ب) اگر $I_s = 50A$ باشد، v_x را پیدا کنید و (ج) نسبت $\frac{v_x}{I_s}$ را محاسبه نمایید.



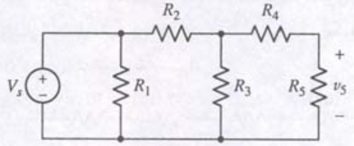
شکل ۱۰۹-۳

۸۰. چقدر توان به وسیله R_x در شکل ۱۱۰-۳ جذب می‌شود.



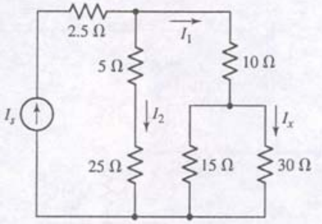
شکل ۱۱۰-۳

۸۱. با استفاده از تقسیم جریان و ولتاژ عبارتی برای v_5 در شکل ۱۱۱-۳ بیابید.



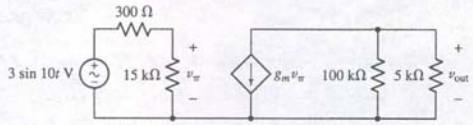
شکل ۱۱۱-۳

۸۲. در شکل ۱۱۲-۳، (الف) اگر $I_1 = 12mA$ باشد، I_x را به‌دست‌آورید. (ب) اگر $I_x = 12mA$ باشد I_1 را پیدا کنید، (ج) اگر $I_2 = 15mA$ باشد I_x چقدر است و (د) اگر $I_s = 60mA$ باشد، I_x را معین کنید.



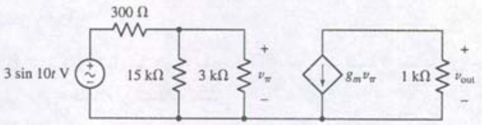
شکل ۱۱۲-۳

۸۳. مدار شکل ۱۱۳-۳ معادل رایجی در مدل‌سازی یک مدار تقویت‌کننده MOSFET است. اگر $g_m = 4m℧$ باشد، v_{out} را محاسبه کنید.



شکل ۱۱۳-۳

۸۴. مدار شکل ۱۱۴-۳ مدار معادل رایجی در مدل‌سازی رفتار ac یک مقدار تقویت‌کننده ترانزیستور پیوندی دوقطبی است. اگر $g_m = 38m℧$ باشد، v_{out} را حساب نمایید.



شکل ۱۱۴-۳

فصل چهارم

تحلیل گرهی و مش

مقدمه

مفاهیم کلیدی

- تحلیل گرهی
- اَبَرگره
- تحلیل مش
- اَبَرمش
- تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه
- تحلیل کامپیوتری مدار

تحلیل یک مدار ساده خطی مجهز به قوانین اهم و کیرشهف برای به‌دست‌آوردن اطلاعات مفیدی مانند جریان، ولتاژ یا توان مربوط به یک قطعه، شاید نقطه شروعی مستقیم به نظر رسد. حداقل برای بررسی فعلی، هر مدار منحصر به نظر می‌رسد، و نیاز به خلاقیت برای رسیدن به هدف توسط روش تحلیل دارد. در این فصل، ما تحلیل دو مدار پایه را می‌آموزیم - یکی تحلیل گرهی و دیگری تحلیل مش (تک‌حلقه). هر دو روش به ما اجازه می‌دهند تا مدارهای مختلف متعددی را با یک روش منسجم و سبک‌دار[1] مورد بررسی و تحقیق قرار دهیم. نتیجه این بررسی تحلیلی پربازده، سطح یکنواختی از پیچیدگی، خطاهای کمتر و شاید مهمتر از همه، کاهش عباراتی چون "من نمی‌دانم حتی چگونه شروع کنم" است.

بسیاری از مدارهایی که تاکنون دیده‌ایم در واقع خیلی ساده بوده‌اند. با این وجود اینگونه مدارها در کمک به ما برای یادگیری اعمال تکنیک‌های اساسی، ارزشمند هستند. هرچند مدارهای پیچیده‌تری که در این فصل آمده‌اند ممکن‌است ارائه‌دهنده انواع سیستم‌های الکتریکی از جمله مدارهای کنترل، شبکه‌های مخابراتی، موتورها، یا مدارهای مجتمع و نیز مدل‌هایی از مدارهای الکتریکی سیستم‌های غیرالکتریکی باشند، ولی معتقدیم بهتر است زیاد بر روی این موارد خاص در این مرحله تأکید نکنیم. بلکه بهتر است که در آغاز بر متدولوژی حل مسئله توجه نماییم که در سرتاسر کتاب تکمیل خواهد شد.

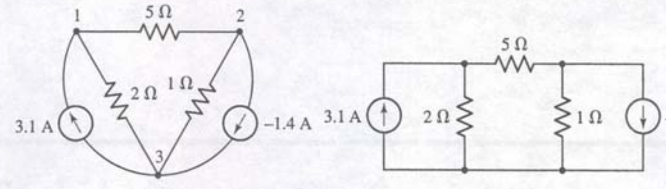
۱-۴ تحلیل گرهی

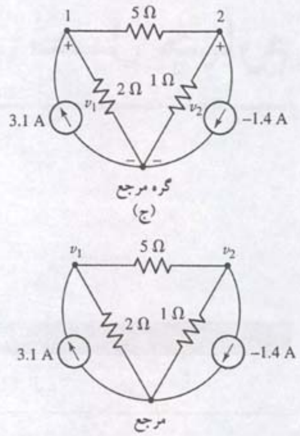
با روش‌های ساده‌سازی مدار را با روش قدرتمند KCL به‌نام **تحلیل گرهی** آغاز می‌کنیم. در فصل ۳، ما تحلیل یک مدار ساده با دو گره را ملاحظه نمودیم. دیدیم که قدم اساسی تحلیل، یافتن یک معادله یک مجهولی، برای ولتاژ بین دو گره بود.

حال تعداد گره‌ها را افزایش می‌دهیم و در نتیجه در ازای هر گره اضافی، یک معادله و یک مجهول اضافه می‌گردد. بنابراین یک مدار سه‌گرهی، دو ولتاژ مجهول و دو معادله، و یک مدار 10 گرهی تعداد 9 ولتاژ مجهول و 9 معادله دارد و بالاخره یک مدار N گرهی، (N - 1) ولتاژ مجهول و (N - 1) معادله خواهد داشت. هر معادله، در واقع یک معادله ساده KCL است.

برای تشریح تکنیک مدار سه‌گرهی شکل ۱-۴ (الف) را در نظر می‌گیریم. در اولین گام، به‌منظور تأکید بر سه‌گرهی بودن مدار، آن را دوباره طبق شکل ۱-۴ (ب) شماره‌گذاری می‌کنیم. هدف تعیین ولتاژ دو سر هر عنصر است و لذا گام بعدی تحلیل حساس خواهد بود. ما یک گره

1. methodical





شکل ۱-۴ (الف) مدار سه‌گرهی ساده. (ب) مداری که برای تأکید بر گره مجدداً ترسیم شده است. (ج) گره مرجع انتخابی و ولتاژهای تخصیص‌یافته. (د) مراجع ولتاژ خلاصه‌شده. اگر صلاح بود به‌جای "مرجع" از علامت زمین استفاده شود.

را به عنوان مرجع اختیار می‌نماییم. این مرجع نقطه منفی ولتاژ گره‌های ($N - 1 = 2$) مدار خواهد بود که در شکل ۱-۴ (ج) نشان داده شده است.

اگر گره مرجع را با بیشترین تعداد انشعاب انتخاب کنیم، کمی در ساده‌سازی معادلات تأثیر دارد. اگر گره به زمین وصل باشد، معمولاً انتخاب آن به‌عنوان مرجع اولویت دارد. غالباً ولی نه همیشه، گره زمین به‌صورت یک سیم مشترک در ته نمودار مدار ظاهر می‌گردد. مثلاً برای این مثال گره 3 به‌عنوان گره مرجع انتخاب شده است.

ولتاژ گره 1 نسبت به گره مرجع را v_1، و ولتاژ v_2 را ولتاژ گره 2 نسبت به گره مرجع تعریف می‌کنیم. این دو ولتاژ برای یافتن هر ولتاژ بین دو گره کافی است. مثلاً ولتاژ گره 1 نسبت به 2 برابر $v_1 - v_2$ است. ولتاژهای v_1 و v_2 و علامت‌های مربوط به آن‌ها در شکل ۱-۴ (ج) نشان داده شده‌اند. معمولاً با مشخص‌شدن گره مرجع، علامت مرجع نیز حذف می‌گردد، و گرهی که با ولتاژی علامت‌گذاری می‌شود پایانه مثبت فرض خواهد شد (شکل ۱-۴ (د)). این روال را نوعی تندنویسی ولتاژ می‌دانیم.

اکنون قانون KCL را به گره‌های 1 و 2 اعمال می‌کنیم. برای این‌کار جریان کل خارج‌شده از گره را با جریان وارده به آن مساوی قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1 \quad (1)$$

یا

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3.1 \quad (2)$$

در گره 2 داریم:

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4) \quad (3)$$

یا

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \quad (4)$$

معادلات (۲) و (۴)، دو معادله مربوط به دو مجهول‌اند و می‌توان آن‌ها را به راحتی حل کرد. نتایج عبارتنداز $v_1 = 5V$ و $v_2 = 2V$.

با نتایج فوق می‌توان ولتاژ دو سر مقاومت 5Ω یعنی $v_{5\Omega} = v_1 - v_2 = 3V$ را معین کرد. جریان و توان جذب‌شده نیز در یک گام قابل محاسبه‌اند.

باید توجه داشته باشیم که در نوشتن معادلات KCL در تحلیل گرهی، بیش از یک روش وجود دارد. مثلاً خواننده ممکن‌است مجموع همه جریان‌های وارده به یک گره مفروض را ترجیح دهد و این مجموع را برابر با صفر قرار دهد. بنابراین برای گره 1، ممکن‌است چنین بنویسیم:

$$3.1 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

یا

$$3.1 + \frac{-v_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{5} = 0$$

گرهٔ مرجع در نمودارهای مداری صفر ولت فرض می‌شود. ولی این نکته را به یاد داشته باشید که هر پایانه‌ای را می‌توان به‌عنوان پایانهٔ مرجع درنظرگرفت. پس گرهٔ مرجع نسبت به بقیهٔ ولتاژهای گرهی صفر است، ولی نسبت به زمین صفر نیست. باید گفت که معمولاً گره مرجع با علامت زمین نشان داده می‌شود.

که هر کدام از آن‌ها معادل با معادله (۱) است. سوال این‌است‌که آیا یک راه از دیگری بهتر است؟ هر معلم یا شاگردی خواسته‌های خود را گسترش می‌دهد و در پایان روز مهمترین چیز این‌است‌که پاسخ درست از آب درآید. نویسندگان ترجیح می‌دهند که معادلات KCL را برای تحلیل گرهی تشکیل دهند و در انتها همه جملات منبع جریان در یک سمت و جملات مقاومت در سمت دیگر قرار خواهد گرفت. یعنی:

> مجموع جریان‌های وارده به یک گره از منابع جریان Σ
> = Σ مجموع جریان‌های خارج‌شده از گره، به مقاومت‌ها

در این‌گونه روش‌ها چندین مزیت وجود دارد. ابتدا این‌که هرگز اشتباهی در رابطه با جملاتی مانند اینکه کدام‌یک از "$v_2 - v_1$" یا "$v_1 - v_2$" صحیح است، وجود نخواهد داشت. اولین ولتاژ در هر عبارت جریان در مقاومت متعلق به گرهی است که برای آن معادله KCL، مانند معادلات (۱) یا (۳)، نوشته شده‌اند. دوم، چک سریعی را فراهم می‌کند تا ببینیم آیا جمله‌ای به‌طور اتفاقی حذف شده است یا نه. کافی است تعد د منابع جریان متصل به یک گره را بشمارید و سپس مقاومت‌ها را شمارش نمایید؛ آن‌ها را به فرمی که بیان‌شده دسته‌بندی نمایید تا مقایسه کمی ساده‌تر شود.

مثال ۱-۴

جریان جاری در مقاومت 15Ω را از چپ به راست در شکل ۲-۴ (الف) به دست آورید.

تحلیل گرهی مستقیماً به مقادیر عددی برای ولتاژهای v_1 و v_2 منتهی می‌شود و جریان موردنظر برابر است با $i = (v_1 - v_2)/15$.

با این وجود قبل از اقدام به تحلیل گرهی، ما دقت می‌کنیم که جزئیاتی در مورد مقاومت 7Ω یا مقاومت 3Ω موردنظر نیست. بنابراین ما ممکن‌است ترکیب سری آن‌ها را با یک مقاومت 10Ω طبق شکل ۲-۴ (ب) جایگزین نماییم. نتیجه کاهش در تعداد معادلات موردحل است.

برای گره 1 معادله KCL را می‌نویسیم:

$$2 = \frac{v_1}{10} + \frac{v_1 - v_2}{15} \quad (۵)$$

و برای گره 2 داریم:

$$4 = \frac{v_2}{5} + \frac{v_2 - v_1}{15} \quad (۶)$$

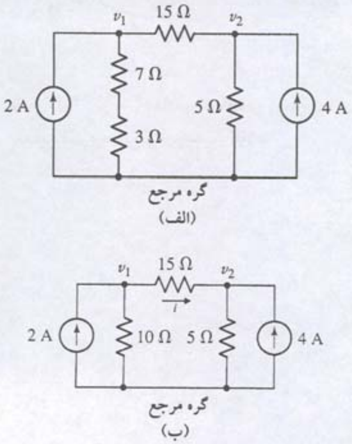
با مرتب‌کردن آن‌ها داریم:

$$5v_1 - 2v_2 = 60$$

و

$$-v_1 + 4v_2 = 60$$

با حل این معادلات داریم $v_1 = 20$ V و $v_2 = 20$ V بنابراین $v_1 - v_2 = 0$. به بیان دیگر در مقاومت 15 Ω مقدار جریان صفر است.

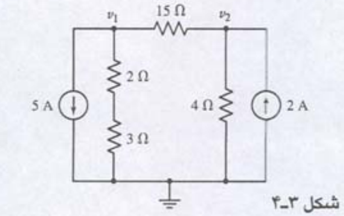


شکل ۲-۴ (الف) مدار چهارگرهی شامل دو منبع جریان مستقل. (ب) دو مقاومت سری با یک مقاومت 10 Ω جایگزین شده است تا تعداد گره‌ها به ۳ برسد.

تمرین

۱-۴ برای مدار شکل ۳-۴ ولتاژهای v_1 و v_2 را محاسبه کنید.

جواب: $v_1 = -145/8V$
$v_2 = 5/2$ V

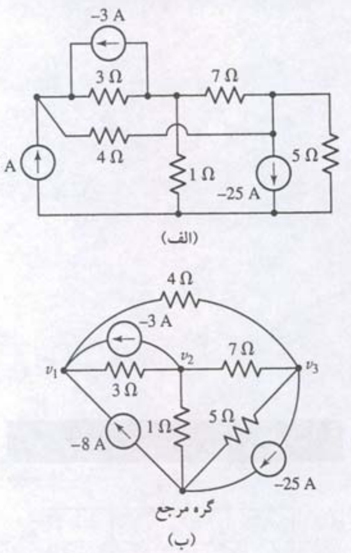


شکل ۳-۴

حال بیایید تعداد گره‌ها را افزایش دهیم و به این ترتیب مسئله را کمی مشکل‌تر کنیم.

مثال ۲ـ۴

ولتاژ گره‌ها را در مدار شکل ۴ـ۴ (الف) بیابید.



شکل ۴ـ۴ (الف) مدار چهارگرهی. (ب) ترسیم مجدد با گره مرجع و برچسب ولتاژها.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

در مدار چهار گره وجود دارد. با انتخاب گره پایین به‌عنوان مرجع، سه گره دیگر را مشابه شکل ۴ـ۴ (ب) نامگذاری می‌کنیم و شکل مدار را هم به صورت مناسب‌تری می‌کشیم.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

سه ولتاژ مجهول v_1، v_2 و v_3 وجود دارند. همه مقاومت‌ها و منابع جریان مقداردهی شده‌اند.

- **ارائه یک طرح.**

روش اخیر تحلیل گرهی برای حل این مسئله بسیار مناسب است. با این روش می‌توان سه معادله KCL مستقل را برحسب منابع جریان و جریان هر مقاومت نوشت.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

حل را با نوشتن KCL برای گره 1 شروع می‌کنیم:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

یا

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.25v_3 = -11 \qquad (۷)$$

در گره 2:

$$-(-3) = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

یا

$$-0.3333v_1 + 1.4762v_2 - 0.1429v_3 = 3 \qquad (۸)$$

و در گره 3:

$$-(-25) = \frac{v_3}{5} + \frac{v_3 - v_2}{7} + \frac{v_3 - v_1}{4}$$

یا ساده‌تر

$$-0.25v_1 - 0.1429v_2 + 0.5929v_3 = 25 \qquad (۹)$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**

ما سه معادله و سه مجهول داریم. با این شرط که آن‌ها مستقلند، این سه معادله برای یافتن ولتاژها کفایت می‌کند.

- **اقدام به حل.**

معادلات (۳) تا (۵) را می‌توان با حذف متوالی متغیرها، روش‌های ماتریسی یا دستور کرامر و دترمینان حل کرد، با به‌کارگیری آخرین روش داریم:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -0.3333 & -0.2500 \\ 3 & 1.4762 & -0.1429 \\ 25 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}} = \frac{1.714}{0.3167} = 5.412 \text{ V}$$

به‌طور مشابه:

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736 \text{ V}$$

و

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32 \text{ V}$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟**

یکی از روش‌های تحقیق، حل سه معادله با روشی دیگر است. بعد از آن، ممکن است منطقی‌بودن مقادیر ولتاژ را بیابیم. حداکثر جریان ممکن در مدار $3 + 8 + 25 = 36\text{A}$ است. بزرگ‌ترین مقاومت مدار 7Ω می‌باشد، بنابراین ولتاژی بزرگ‌تر از $7 \times 36 = 252\text{V}$ را نمی‌توان انتظار داشت.

البته روش‌های متعددی برای حل سیستم معادلات خطی موجود است و ما چند نمونه از آن‌ها را در پیوست ۲ توصیف کرده‌ایم. قبل از پیدایش ماشین حساب‌های علمی، قانون کرامر (Cramer) که در مثال ۲ آن را دیدیم در تحلیل مدارها خیلی رایج بود، هرچند که گاهاً پیاده‌کردن آن‌ها خسته‌کننده است. با این وجود، استفاده از یک ماشین حساب ساده چهار عمل اصلی و آگاهی از تکنیک می‌تواند مفید واقع شود. از طرف دیگر نرم‌افزار متلب (MATLAB) هرچند که چندان در دسترس به‌نظر نمی‌رسد، بسته نرم‌افزاری قوی است که فرآیند حل را بسیار ساده می‌کند؛ در پیوست ۶ می‌توانید خلاصه‌ای راجع‌به آن را برای شروع مطالعه نمایید.

برای وضعیتی که در مثال ۲ـ۴ با آن مواجه شدید، چند انتخاب از طریق متلب وجود دارد. اول، ما می‌توانیم معادلات (۷)–(۹) را به صورت ماتریس درآوریم:

$$\begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

به نحوی که

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

در متلب چنین می‌نویسیم:

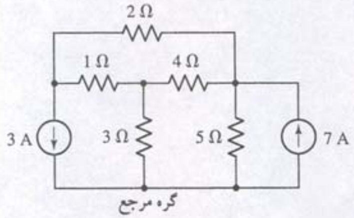
```
>> a = [0.5833 -0.3333 -0.25; -0.3333 1.4762 -0.1429;
   -0.25 -0.1429 0.5929];
>> c = [-11; 3; 25];
>> b = a^-1 * c
b =
    5.4124
    7.7375
   46.3127
>>
```

که در آن فاصله‌ها عناصر را در یک سطر از هم جدا می‌کنند و یک نقطه ویرگول (;) سطرها را جدا می‌نماید. ماتریس **b** که به صورت یک بردار به آن اشاره می‌شود، در حال ما یک ستون است. بنابراین $v_1 = 5.412$ V، $v_2 = 7.738$ V و $v_3 = 46.31$ V (البته خطای گردکردن وجود دارد).

ما می‌توانیم معادلات KCL را همان‌طور که آن‌ها را نوشتیم به کار برده و پردازنده نمادین متلب را استفاده کنیم.

```
>> eqn1 = '-8 -3 = (v1 - v2)/ 3 + (v1 - v3)/ 4';
>> eqn2 = '-(-3) = (v2 - v1)/ 3 + v2/ 1 + (v2 - v3)/ 7';
>> eqn3 = '-(-25) = v3/ 5 + (v3 - v2)/ 7 + (v3 - v1)/ 4';
>> answer = solve(eqn1, eqn2, eqn3, 'v1', 'v2', 'v3');
>> answer.v1
ans =
720/133
>> answer.v2
ans =
147/19
>> answer.v3
ans =
880/19
>>
```

که به پاسخ‌های دقیقاً یکسانی منتهی می‌گردد. روال *solve()* با لیستی از معادلات سمبلیک که ما آن‌ها را eqn1، eqn2 و eqn3 می‌نامیم فراخوانده می‌شود، ولی متغیرهای v1، v2 و v3 باید مشخص شوند. اگر *solve()* با متغیرهای کمتر از مجهولات فراخوانده شود، یک حل جبری بازگردانده می‌شود. فرم حل ارزش یک اظهارنظر سریع را دارد؛ پاسخ به اصطلاحی که در برنامه‌نویسی به آن اشاره می‌شود، یعنی به یک ساختار برمی‌گردد. در این حالت ما ساختار خود را "answer" می‌نامیم. هر مولفه از ساختار به‌طور جداگانه با نام نشان داده شده دستیابی می‌شود.



شکل ۴ـ۵

تمرین

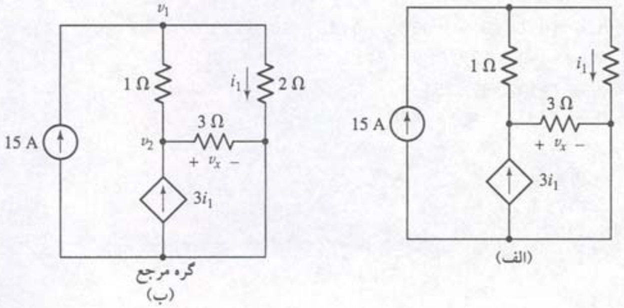
۴ـ۲ برای مدار شکل ۴ـ۵، ولتاژ دو سر هر منبع جریان را محاسبه نمایید.

جواب: $v_{3A} = 5.235$V و $v_{7A} = 11.47$V.

مثال قبل روشی پایه را در تحلیل گرهی نشان می‌دهد، ولی بررسی حالتی که منابع وابسته به هم وجود دارد ارزشمند است.

مثال ۴ـ۳

توان تحویل‌داده‌شده به وسیله منبع وابسته شکل ۴ـ۶ (الف) را معین نمایید.



شکل ۴ـ۶ (الف) یک مدار چهارگرهی حاوی یک منبع جریان وابسته. (ب) مدار برچسب‌دار برای تحلیل گرهی.

ما گره پایین را به عنوان مرجع انتخاب می‌کنیم، زیرا بیشترین تعداد انشعاب را دارد و با برچسب‌زنی ولتاژهای v_1 و v_2 طبق شکل ۴ـ۶ (ب) جلو می‌رویم. در واقع v_x برابر با v_2 است.

در گره 1 داریم:

$$15 = \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad (۱۰)$$

و در گره 2:

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad (۱۱)$$

متأسفانه، ما دو معادله و سه مجهول داریم؛ این نتیجه مستقیم وجود یک منبع جریان وابسته است. زیرا به وسیله یک ولتاژ گره کنترل نمی‌شود. بنابراین ما باید یک معادله دیگری که جریان i_1 را به ولتاژهای گرهی بیشتری ارتباط دهد پیدا کنیم.

در این حالت داریم:

$$i_1 = \frac{v_1}{2} \qquad (۱۲)$$

که با جایگزینی در معادله (۱۱) داریم:

$$3v_1 - 2v_2 = 30 \qquad (۱۳)$$

و معادله (۱۰) منجر می‌شود به:

$$15v_1 + 8v_2 = 0 \qquad (۱۴)$$

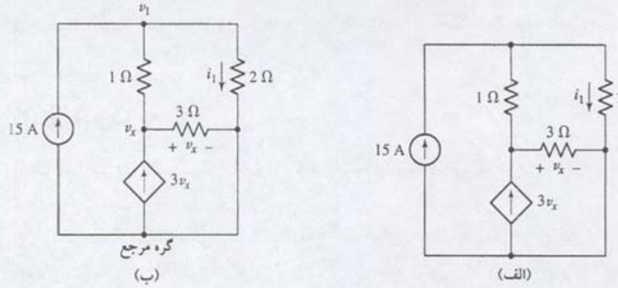
از حل آن‌ها داریم $v_1 = -40$ V، $v_2 = -75$ V و $i_1 = 0.5v_1 = -20$ A. بنابراین توان تحویلی به وسیله منبع وابسته به مدار برابر است با:

$$(3i_1)(v_2) = (-60)(-75) = 4.5 \text{ kW}$$

می‌بینیم که وجود یک منبع وابسته نیاز به خلق یک معادله اضافی در تحلیل ما دارد، و این هنگامی است که کمیت کنترل‌کننده یک ولتاژ گره نباشد. اکنون اجازه بدهید به همین مدار نگاه کنیم ولی این بار متغیر کنترل‌کننده منبع جریان وابسته به کمیت متفاوتی تغییر کند ـ یعنی ولتاژ دو سر مقاومت ۳ اهمی، که در واقع یک ولتاژ گره است. ما درخواهیم یافت که فقط دو معادله برای تکمیل تحلیل لازم است.

مثال ۴ـ۴

توان تولیدشده به وسیله منبع وابسته شکل ۴ـ۷ (الف) را معین نمایید.



شکل ۴ـ۷ (الف) یک مدار چهار گرهی با منبع جریان وابسته. (ب) مدار برچسب‌زده‌شده برای تحلیل گرهی.

ما گره پایین را به عنوان مرجع انتخاب کرده و ولتاژ گره‌ها را طبق شکل ۴ـ۷ (ب) برچسب می‌زنیم. ما ولتاژ v_x را به خاطر صراحت جداگانه نام‌گذاری کرده‌ایم ولی این افزونی در نام‌گذاری لزومی هم ندارد. توجه کنید که انتخاب ما در گره مرجع در این حالت مهم است؛ این انتخاب منجر به کمیت v_x به عنوان ولتاژ گره می‌گردد.

معادله KCL برای گره 1 برابر است با:

$$15 = \frac{v_1 - v_x}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad (۱۵)$$

و برای گره x داریم:

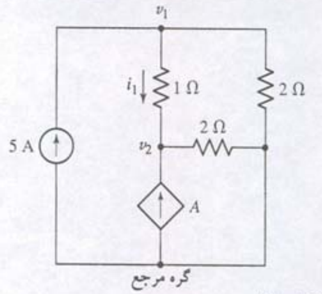
$$3v_x = \frac{v_x - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad (۱۶)$$

با دسته‌بندی و حل مجهولات داریم $v_1 = \frac{50}{7}$ V و $v_x = -\frac{30}{7}$ V. بنابراین منبع وابسته در مدار توان $(3v_x)(v_x) = 55.1$ W را تولید می‌کند.

تمرین

۴-۳ برای مدار شکل ۴-۸ ولتاژ گره v_1 اگر A برابر (الف) $2i_1$؛ (ب) $2v_1$ باشد را پیدا کنید.

جواب: (الف) $\frac{70}{9}$ V؛ (ب) -10 V.



شکل ۴-۸

خلاصه‌ای از رویه تحلیل گرهی پایه

1. **تعداد گره‌ها را بشمارید (N).**
2. **یک گره مرجع انتخاب نمایید.** تعداد جملات در معادلات گره با انتخاب گرهی که بیشترین انشعاب را دارد، حداقل می‌شود.
3. **ولتاژهای گره را برچسب بزنید (نامگذاری کنید).** تعداد آن‌ها $N - 1$ است.
4. **یک معادله KCL برای هر گره غیرمرجع بنویسید.** مجموع جریان‌های جاری به یک گره از منابع در یک سمت معادله است. در سمت دیگر مجموع جریان‌های خارج‌شده از گره به مقاومت‌ها است. توجه دقیقی به علامت‌های "-" بشود.
5. **هر مجهول اضافی دیگر مانند جریان‌ها یا ولتاژها را به جز گره‌ها برحسب ولتاژ گره‌ها بنویسید.** این وضعیت هنگامی اتفاق می‌افتد که منابع ولتاژ یا منابع وابسته در مدار ما پیدا شوند.
6. **معادلات را سازمان‌دهی کنید.** جملات را برطبق ولتاژ گره‌ها دسته‌بندی نمایید.
7. **سیستم معادلات را برای ولتاژ گره‌ها حل کنید** (تعداد $N - 1$ عدد وجود دارد).

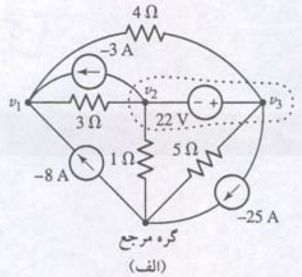
این هفت گام اصلی روی هر مداری که ما با آن مواجه شویم کار می‌کند، در هر صورت وجود منابع ولتاژ دقت بیشتری نیاز دارد. این وضعیت‌ها در بخش ۴-۲ مورد بحث قرار گرفته است.

۲-۴ اَبَرگره

اینک خواهیم دید که چگونه منابع ولتاژ و نیز منابع وابسته بر تحلیل گرهی تأثیر می‌گذارند. ابتدا اثر یک منبع ولتاژ را بررسی می‌کنیم.

به‌عنوان‌مثال، مدار شکل ۴-۹ (الف) را ملاحظه نمایید. مدار چهارگرهی اصلی شکل ۴-۴ با جایگزینی مقاومت 7Ω بین گره‌های 2 و 3، از یک منبع ولتاژ 22V کمی تغییر یافته است. باز هم همان ولتاژهای v_1، v_2 و v_3 را به گره‌ها نسبت می‌دهیم. قبلاً گام بعدی تحلیل شامل اعمال قانون KCL به هر سه گره غیرمرجع بود. اگر ما آن گام را مجدداً تکرار کنیم، در هر دو گره 2 و 3 به اشکال برمی‌خوریم، زیرا جریان شاخه‌ای که منبع ولتاژ در آن است را نمی‌دانیم. چون ولتاژ یک منبع ولتاژ، مستقل از جریان آن است، بهیچ‌وجه نمی‌توانیم جریان آن را بیان کنیم.

برای غلبه بر این مشکل دو راه وجود دارد. مشکل‌ترین راه تخصیص جریان نامعلوم به شاخه‌ای است که منبع ولتاژ در آن قرار دارد. آنگاه KCL را سه بار اعمال می‌کنیم و بین



شکل ۴-۹ (الف) مدار مثال ۴-۲ با منبع 22V. (ب) گسترش ناحیه اَبَرگره؛ KCL بیان می‌کند که جمع همه جریان‌ها در این ناحیه باید صفر باشد و یا در غیر این‌صورت الکترون‌ها تجمع کنند و یا ناحیه با کمبود الکترون مواجه شود.

گره‌های 2 و 3 یک معادله KVL ($v_3 - v_2 = 22$) می‌نویسیم. حاصل این کار برای این مدار چهار معادله است.

راه ساده‌تر این‌است‌که گره‌های 2 و 3 و منبع ولتاژ را به‌صورت نوعی ابرگره تصور کرده و KCL را به‌طور همزمان به هر دو گره اعمال‌نماییم. ابرگره به‌وسیله ناحیه‌ای که با خط‌چین محصور شده شناخته می‌شود (شکل ۴-۹ (الف)). این کار مسلماً مجاز است، زیرا اگر جریان کل خارج‌شده از گره 2 و جریان کل خارج‌شده از گره 3 برابر صفر باشند، آنگاه جریان خارج‌شده از هر دو گره صفر خواهد بود. این مفاهیم در شکل ۴-۹ (ب) با گسترش تصویر نشان داده شده است.

مثال ۴-۵

مقدار ولتاژ گره v_1 در مدار شکل ۴-۹ (الف) را معین کنید.

معادله KCL در گره 1، با توجه به مثال قبل بدون تغییر است:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

یا

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.2500v_3 = -11 \qquad (۱۷)$$

کار را با مساوی قراردادن حاصل‌جمع شش جریان و برابر قراردادن ابرگره با صفر آغاز می‌نماییم. برای اَبَرگره، با انشعاب مقاومت 3Ω شروع کرده و در جهت ساعتگرد کار می‌کنیم.

$$3 + 25 = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_3 - v_1}{4} + \frac{v_3}{5} + \frac{v_2}{1}$$

یا

$$-0.5833v_1 + 1.3333v_2 + 0.45v_3 = 28 \qquad (۱۸)$$

چون سه مجهول داریم، به یک معادله اضافی دیگر نیاز است، همچنین باید این واقعیت که، یک منبع 22V بین گره‌های 2 و 3 واقع است را نیز درنظرگرفت.

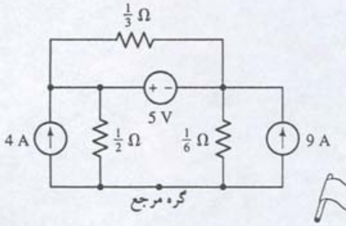
$$v_2 - v_3 = -22 \qquad (۱۹)$$

از حل معادلات (۱۷) تا (۱۹)، حل $v_1 = 1.071$V به‌دست‌می‌آید.

تمرین

۴-۴ برای مدار شکل ۴-۱۰، ولتاژ دو سر هر منبع جریان را به‌دست آورید.

جواب: 5.375V و 375mV



شکل ۴-۱۰

بنابراین جدا از وجود منبع ولتاژ در بین دو گره و یا بین یک گره و مرجع، وجود منبع ولتاژ تعداد گره‌های غیرمرجعی که بایددر آن‌ها قانون KCL ر نوشت، یک واحد کم می‌کند. همچنین در تحلیل مدارهایی چون مسئله ۴-۴ باید دقت کافی مبذول داریم، زیرا هر دو انتهای مقاومت‌ها بخشی از اَبَرگره هستند، و ما باید دو جمله جریان در معادله KCL داشته باشیم ضمن آن که آن‌ها یکدیگر را حذف می‌کنند. می‌توانیم روش اَبَرگره را مطابق زیر خلاصه کنیم.

خلاصه تحلیل رویه تحلیل اَبَرگره

1. **تعدادگره‌ها را بشمارید (N).**
2. **گره مرجع را مشخص نمایید.** تعداد جملات در معادلات گره با انتخاب گرهی که بیشترین تعداد انشعاب را دارد حداقل می‌شود.
3. **ولتاژهای گره را نامگذاری کنید** ($N - 1$ عدد).

۴. **اگر مدار حاوی منابع ولتاژ باشد، حول هر یک، یک اَبَرگره ایجاد کنید.** این کار با محصورکردن منبع، دو پایانه‌اش، و هر عنصر دیگری که بین دو پایانه است در یک حصار خط‌چین انجام می‌شود.

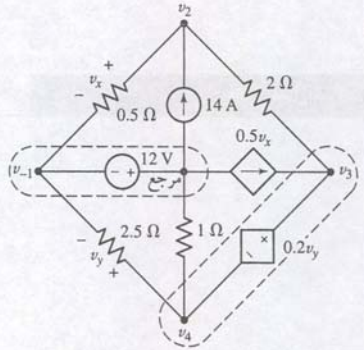
۵. **یک معادله KCL برای هر گره غیرمرجع و هر اَبَرگره که حامل گره مرجع نیست بنویسید.** مجموع جریان‌های جاری در یک گره / اَبَرگره از منابع جریان در یک سمت معادله است. در سمت دیگر مجموع جریان‌های جاری به خارج گره / اَبَرگره قرار دارد که از مقاومت‌ها می‌گذرند. به علامات "−" توجه کنید.

۶. **ولتاژ دو سر هر منبع را به ولتاژهای گره‌ها مرتبط کنید.** این کار با اِعمال KVL انجام می‌شود. تعریف یک چنین معادله‌ای برای هر اَبَرگرهی صورت می‌گیرد.

۷. **هر مجهول دیگر (یعنی جریان یا ولتاژ به‌جز ولتاژهای گره) را برحسب ولتاژهای گره‌های مناسب بنویسید.** این وضعیت هنگامی پیش می‌آید که منابع وابسته در مدار پیدا شود.

۸. **معادلات را سازمان‌دهی کنید.** جملات را برطبق ولتاژ گره‌ها دسته‌بندی کنید.

۹. **سیستم معادلات را برای ولتاژ گره‌ها حل کنید** ($N-1$ عدد از آن‌ها وجود دارد).



شکل ۱۱ـ۴ یک مدار پنج گرهی با چهار نوع منبع متفاوت.

می‌بینیم که ما برای رویه تحلیل گرهی کلی خودگام‌هایی را اضافه کرده‌ایم. با این وجود در واقعیت به‌کارگیری تکنیک اَبَرگره در یک مداری که منابع ولتاژ به گره‌ها وصل نیستند سبب کاهش تعداد معادلات KCL لازم می‌گردد. با توجه به این مطالب اجازه بدهید تا مدار شکل ۱۱ـ۴ را که حاوی هر چهار نوع منبع و پنج گره است بررسی نماییم.

مثال ۶ـ۴

ولتاژهای گره به مرجع را در شکل ۱۱ـ۴ به‌دست‌آورید.

پس از ایجاد ابرگره حول هر منبع ولتاژ، می‌بینیم که KCL را باید فقط در گره 2 و ابرگره مربوط به منبع ولتاژ وابسته بنویسیم. هیچ معادله اضافی برای ابرگره شامل گره 1 و منبع ولتاژ مستقل لازم نیست، زیرا واضح است که $v_1 = -12V$.

در گره 2:

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \qquad (۲۰)$$

ضمن این‌که در ابرگره 3-4

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \qquad (۲۱)$$

سپس ولتاژ منابع را به ولتاژ گره‌ها ربط می‌دهیم:

$$v_3 - v_4 = 0.2v_y \qquad (۲۲)$$

و

$$0.2v_y = 0.2(v_4 - v_1) \qquad (۲۳)$$

بالاخره منبع جریان وابسته را برحسب متغیرها بیان می‌کنیم:

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1) \qquad (۲۴)$$

در تحلیل گرهی چهار KCL، پنج گره لازم است ولی ما این نیاز را به 2 رساندیم و این کار با ایجاد دو اَبَرگره جداگانه حاصل شد. هر اَبَرگره یک معادله KVL لازم دارد (معادله (۲۲) و $v_1 = -12$، که بعدی هم با مشاهده نوشته شده است). هیچ‌یک از منابع ولتاژ با ولتاژهای گره کنترل نشده است، در نتیجه دو معادله اضافی دیگر لازم است.

با انجام این کار، اکنون ما می‌توانیم v_x و v_y را برای به‌دست‌آوردن مجموع چهار معادله در چهار گره ولتاژ، حذف کنیم.

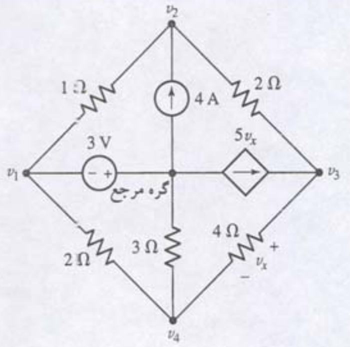
$$\begin{aligned} -2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 \quad &= 14 \\ 0.1v_1 - v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 &= 0 \\ v_1 \quad &= -12 \\ 0.2v_1 + v_3 - 1.2v_4 &= 0 \end{aligned}$$

از حل آن‌ها $v_1 = -12V$، $v_2 = -4V$، $v_3 = 0V$ و $v_4 = -2V$ به‌دست می‌آیند.

تمرین

۵ـ۴ ولتاژهای گره‌ها را در مدار شکل ۱۲ـ۴ معین کنید.

جواب: $v_1 = 3$ V، $v_2 = 5.09$ V، $v_3 = 1.28$ V و $v_4 = 1.68$ V.



شکل ۱۲ـ۴

۳ـ۴ تحلیل مِش[1]

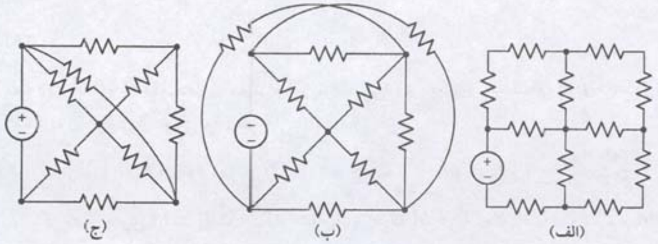
تکنیک تحلیل گرهی مورد بحث در بخش قبل کاملاً کلی و به هر شبکه الکتریکی قابل اعمال است. روشی دیگر که گاهی اعمال آن به بعضی مدارها ساده‌تر است، تحلیل **مش یا تک‌حلقه‌ای** می‌باشد. حتی اگر این تکنیک به هر مداری قابل اعمال نباشد، اکثر مدارهای موردنظر ما با این روش حل می‌شوند. تحلیل مش تنها به آن دسته از مدارها که به‌صورت مسطح هستند قابل اعمال است، و لذا به تعریف این کلمه می‌پردازیم.

می‌توان نمودار یک مدار را در صفحه‌ای مسطح چنان رسم کرد که هیچ انشعابی از بالا و یا از زیر انشعابی دیگر نگذرد. آن‌گاه این مدار را **مسطح یا صفحه‌ای** می‌نامیم. بنابراین شکل ۱۳ـ۴ (الف) مدار مسطح، شکل ۱۳ـ۴ (ب) یک مدار غیرمسطح و شکل ۱۳ـ۴ (ج) هم یک مدار مسطح است، هرچند که این مدار در نگاه اول غیرمسطح به‌نظر می‌رسد.

در بخش ۱ـ۳، کلمات **مسیر**[2]، **مسیر بسته**[3] و **حلقه**[4] را تعریف کردیم. قبل از این‌که **مش** را تعریف کنیم، اجازه بدهید تا مجموعه‌ای از انشعاباتی که در شکل ۱۴ـ۴ پررنگ رسم شده‌اند را بررسی نماییم. اولین انشعاب یا شاخه مسیر نیست، زیرا چهار شاخه به گره مرکزی متصلند و مسلم است که این شاخه‌ها حلقه هم نمی‌باشند. شاخه‌های دوم مسیر نیستند زیرا در طی آن‌ها باید از گره مرکزی بگذریم. چهار مسیر باقیمانده همگی حلقه می‌باشند. این مدار 11 انشعاب دارد.

مش بخشی از مدارهای مسطح است و برای یک مدار غیر مسطح تعریف نمی‌شود. **ما مش را حلقه‌ای تصور می‌کنیم که در داخل آن حلقه دیگری وجود ندارد.** بنابراین حلقه‌های شکل ۱۴ـ۴ (ج) و (د) مش نیستند، ولی آن‌هایی که در (هـ) و (و) آمده‌اند، مش می‌باشند. به محض ترسیم مرتب و مسطح یک مدار، **معمولاً یک مش به‌صورت پنجره‌ای مشبک درمی‌آید که محیط هر شیشه این پنجره را می‌توان یک مش درنظرگرفت.**

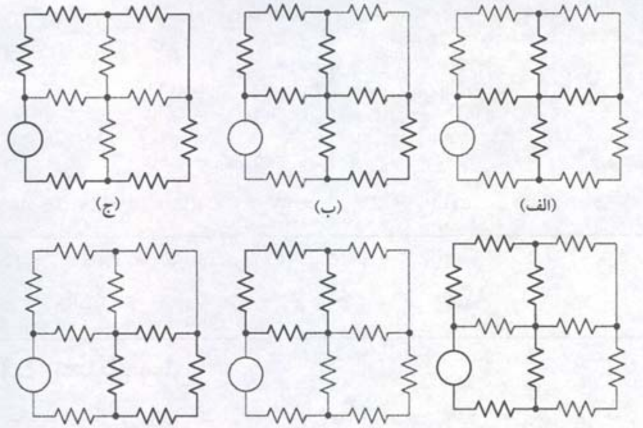
باید متذکر شد تحلیل مش را می‌توان به مدارهای غیرمسطح اعمال نمود ولی چون نمی‌توان مجموعه کاملی از مش‌های منحصر را برای این مدار تعریف کرد، تخصیص جریان‌های مش منحصربه‌فرد امکان‌پذیر نیست.



شکل ۱۳ـ۴ مثال‌هایی از شبکه‌های مسطح (صفحه‌ای) و غیرمسطح. تقاطع‌هایی که در آن‌ها نقطه پررنگ وجود ندارد از لحاظ فیزیکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

1. mesh analysis 2. path
3. closed path 4. loop

شکل ۴ـ۱۴ (الف) شاخه‌های پُررنگ نه مسیرند و نه حلقه. (ب) شاخه‌های پُررنگ مسیر نیستند، زیرا برای پیمودن آن‌ها باید دو بار از گره مرکزی بگذریم. (ج) این مسیر یک حلقه است ولی مش نیست، زیرا حلقه دیگری را دربرمی‌گیرد. (د) این مسیر هم حلقه است، ولی مش نیست. (هـ) و (و) هر دو مسیر هم حلقه هستند و هم مش.



اگر شبکه‌ای مسطح باشد، برای تحلیل آن می‌توان از روش مش استفاده کرد. در این روش مفهوم **جریان مش** به‌کاربرده می‌شود، که ما آن را با توجه به مدار دو مش شکل ۴ـ۱۵ معرفی خواهیم کرد.

به همان فرمی که در مدار تک‌حلقه‌ای عمل کردیم، تحلیل را با تعریف جریان در یکی از شاخه‌ها آغاز می‌نماییم. بیایید جریانی که از مقاومت 6Ω می‌گذرد را i_1 بنامیم. می‌خواهیم KVL را در هر دو مش اعمال کنیم، و دو معادله حاصل از آن هم برای تعیین جریان‌های مجهول کافی است. پس جریان i_2 را معرفی می‌کنیم که از مقاومت 4Ω به سمت راست جاری است. جریانی که از شاخه مرکزی به پایین می‌رود را i_3 می‌خوانیم ولی از KCL واضح است که i_3 را می‌توان به صورت $(i_1 - i_2)$ هم نوشت. جریان‌های انتخابی در شکل ۴ـ۱۵ (ب) نشان داده شده‌اند.

با توجه به روش حل مدار تک‌حلقه، اکنون KVL را به مش سمت چپ اعمال می‌کنیم:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

یا

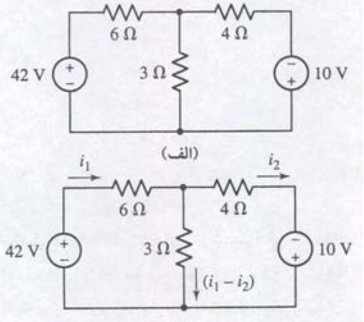
$$9i_1 - 3i_2 = 42 \qquad (۲۵)$$

با اعمال KVL به مش سمت راست داریم:

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

یا

$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \qquad (۲۶)$$



شکل ۴ـ۱۵ مدار ساده‌ای که جریان آن‌ها مورد تقاضا است.

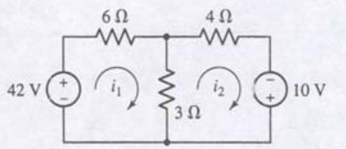
معادلات (۲۵) و (۲۶) مستقل از هم‌اند و نمی‌توان یکی را از دیگری به‌دست‌آورد. دو معادله و دو مجهول وجود دارد و می‌توان به‌راحتی آن‌ها را حل کرد:

$$i_1 = 6A \qquad i_2 = 4A \qquad (i_1 - i_2) = 2A$$

اگر مدار حاوی M مش باشد، آنگاه انتظار می‌رود که M جریان مش انتخاب کنیم و M معادله مستقل بنویسیم.

حال بیایید همین مسئله را با درنظرگرفتن جریان‌های مشی که کمی با روش قبل تفاوت دارد حل کنیم. جریان مش را جریانی که از پیرامون آن می‌گذرد تعریف می‌کنیم. یکی از مزایای مهم در به‌کارگیری جریان‌های مش این‌است‌که قانون جریان کیرشهف به‌طور خودکار رعایت می‌شود. اگر جریان شبکه وارد گرهی شود، مسلماً از آن خارج هم خواهد شد.

اگر مش سمت چپ را با 1 شماره‌گذاری کنیم، می‌توان جریان مش i_1 را در آن و در جهت ساعتگرد ایجاد کرد. یک جریان مش با یک پیکان قوسی که بر روی خودش تقریباً بسته می‌شود طبق شکل ۴ـ۱۶ مشخص می‌گردد. جریان i_2 در مش باقیمانده و دوباره در جهت ساعت‌گرد فرض می‌شود. گرچه انتخاب جهت اختیاری است، ولی همواره جهت ساعت‌گرد انتخاب می‌شود تا خطای ناشی از آن کاهش یابد. در مدار دیگر هیچ جریان یا پیکان جریانی مستقیماً روی هر انشعاب نشان داده نشده است. جریان هر شاخه باید با ملاحظه جریان‌های هر مشی که انشعاب متعلق به آن است معین شود. این کار چندان مشکل نیست، زیرا هیچ انشعابی در بیش از دو مش ظاهر نمی‌گردد. مثلاً مقاومت 3Ω در دو مش وجود دارد و جریان رو به پایین آن، $i_1 - i_2$ است. مقاومت 6Ω تنها در مش 1 قرار داشته و جریان i_1 به سمت راست آن جریان دارد.



شکل ۴ـ۱۶ همان مدار شکل ۴ـ۱۵ (ب) با کمی تفاوت دید.

جریان مش به‌عنوان جریان یک شاخه شناخته می‌شود. مثلاً i_1 و i_2 در این مثال از آن جمله‌اند. البته همیشه این‌طور نیست. به‌زودی خواهیم دید که در یک شبکه 9 حلقه‌ای جریان حلقه وسط در هیچ شاخه یا انشعابی نیست.

برای مش سمت چپ:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

درحالی‌که برای مش سمت راست

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

این دو، معادل با معادلات (۲۵) و (۲۶) می‌باشند.

مثال ۴ـ۷

توان تولیدشده به وسیله منبع 2 V شکل ۴ـ۱۷ (الف) را معین نمایید.

ما ابتدا دو جریان مش در جهت عقربه ساعت را طبق شکل ۴ـ۱۷ (ب) تعریف می‌کنیم.

با شروع در سمت چپ پایین مش 1، ما معادله KVL زیر را ضمن دنبال‌کردن جهت عقربه ساعت از انشعاب‌ها می‌نویسیم:

$$-5 + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) - 2 = 0$$

با تکرار این کار در مش 2 داریم:

$$+2 + 2(i_2 - i_1) + 5i_2 + 1 = 0$$

با مرتب‌کردن و گروه‌بندی جملات داریم:

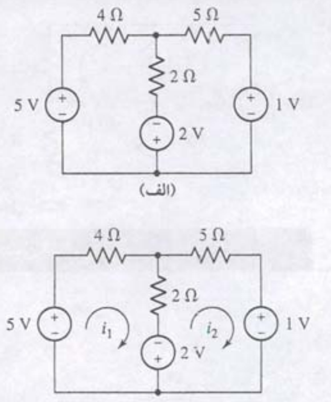
$$6i_1 - 2i_2 = 7$$

$$-2i_1 + 7i_2 = -3$$

با حل آن‌ها داریم:

$$i_1 = \frac{42}{38} = 1.132 \text{ A} \quad \text{و} \quad i_2 = -\frac{2}{19} = -0.1053 \text{ A}$$

جریان خارج‌شده از مرجع مثبت منبع 2 V برابر است با $i_1 - i_2$. بنابراین منبع 2 V توان $(2)(1.237) = 2.474$ W را تولید می‌کند.

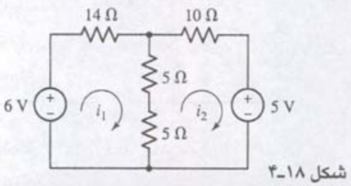


شکل ۴ـ۱۷ (الف) مدار دو مش حامل سه منبع. (ب) مدار برچسب‌خورده برای تحلیل مش.

تمرین

۴ـ۶ در مدار شکل ۱۸ـ۴، i_1 و i_2 را معین کنید.

جواب: $i_1 = +184.2\text{mA}$ و $i_2 = -157.9\text{mA}$



شکل ۱۸ـ۴

بگذارید مدار شکل ۱۹ـ۴ را با پنج گره، هفت انشعاب و سه مش در نظر بگیریم. این مسئله کمی پیچیده‌تر است زیرا یک مش اضافی دارد.

مثال ۸ـ۴

برای تعیین جریان مش شکل ۱۹ـ۴ از تحلیل مش استفاده کنید.

سه جریان مش در شکل ۱۹ـ۴ وجود دارند و ما KVL را حول هر مش اعمال می‌کنیم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

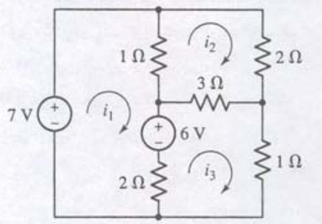
پس از ساده‌سازی:

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

از حل آن‌ها خواهیم داشت $i_1 = 3A$، $i_2 = 2A$ و $i_3 = 3A$.

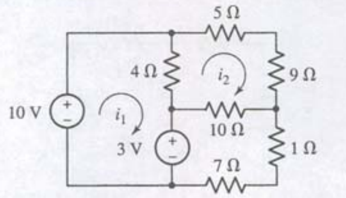


شکل ۱۹ـ۴ مدار پنج‌گرهی، هفت شاخه‌ای و سه مش.

تمرین

۴ـ۷ i_1 و i_2 را در شکل ۲۰ـ۴ بیابید.

جواب: 2.220A و 470.0mA

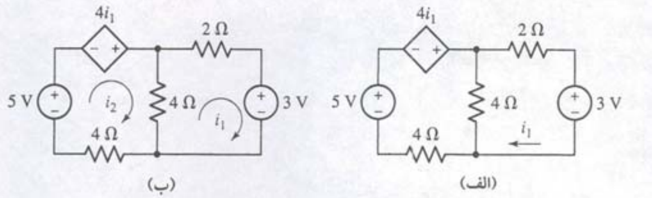


شکل ۲۰ـ۴

مثال‌های قبل در مورد مدارهایی بحث کردند که به وسیله منابع ولتاژ مستقلی فعال می‌شدند. اگر در یک مدار منبع جریانی لحاظ شود، ممکن است طبق بخش ۴ـ۴ تحلیل را ساده و یا پیچیده‌تر کند. طبق معادلات ما در تکنیک تحلیل گرهی، منابع وابسته عموماً به یک معادله اضافی در کنار M معادله مش نیاز دارند، مگر این‌که متغیر کنترل‌کننده یک جریان مش باشد (یا مجموع جریان‌های مش). ما این نکته را با مثال زیر باز می‌کنیم.

مثال ۹ـ۴

جریان i_1 را در مدار شکل ۲۱ـ۴ (الف) معین کنید.



شکل ۲۱ـ۴ (الف) مدار دو مش حاوی یک منبع وابسته. (ب) مدار برچسب‌خورده برای تحلیل مش.

جریان i_1 در واقع یک جریان مش است، لذا به جای تعریف مجدد آن ما جریان مش سمت راست را i_1 می‌نامیم و یک جریان ساعتگرد i_2 را برای مش سمت چپ، طبق شکل ۲۱ـ۴ (ب) برمی‌گزینیم.

برای مش سمت چپ، KVL به ما می‌دهد:

$$-5 - 4i_1 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad (۲۷)$$

و برای مش سمت راست داریم:

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \qquad (۲۸)$$

با دسته‌بندی جملات، این معادلات به صورت فشرده‌تر زیر درمی‌آیند:

$$6i_1 - 4i_2 = -3 \quad \text{و} \quad -8i_1 + 8i_2 = 5$$

با حل آن‌ها $i_2 = 375$ mA و $i_1 = -250$ mA خواهد بود.

چون منبع وابسته در شکل ۲۱ـ۴ به وسیله جریان مش (i_1) کنترل می‌شود، تنها دو معادله (۲۷) و (۲۸) برای تحلیل مدار دو مش لازم شد. در مثال زیر، ما وضعیتی را بررسی می‌کنیم که متغیر کنترل‌کننده یک جریان مش نیست.

مثال ۱۰ـ۴

جریان i_1 را در مدار شکل ۲۲ـ۴ (الف) معین نمایید.

برای این‌که بتوانیم مقایسه‌ای با مثال ۹ـ۴ داشته باشیم، ما همان تعاریف جریان مش را طبق شکل ۲۲ـ۴ (ب) به کار می‌بریم.

برای مش سمت چپ، KVL نتیجه می‌دهد:

$$-5 - 2v_x + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad (۲۹)$$

و برای مش سمت راست، ما مثل قبل عمل می‌کنیم، یعنی:

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \qquad (۳۰)$$

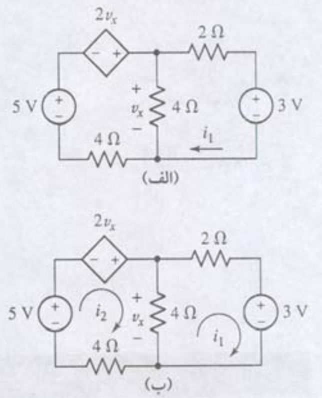
چون منبع وابسته با ولتاژ ناشناخته v_x کنترل شده است، ما با دو معادله و سه مجهول مواجه هستیم. راه خروجی از این مشکل ساخت یک معادله برای v_x برحسب جریان‌های مش مانند زیر است:

$$v_x = 4(i_2 - i_1) \qquad (۳۱)$$

ما این سیستم معادلات را با جایگزینی معادله (۳۱) در معادله (۲۹) ساده می‌کنیم، نتیجه آن چنین است:

$$4i_1 = 5$$

با حل آن $i_1 = 1.25$ A خواهد شد. در این لحظه خاص، معادله (۳۰) لازم نیست مگر این‌که مقداری برای i_2 مورد نظر باشد.

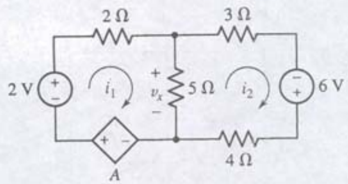


شکل ۲۲ـ۴ (الف) مداری با یک منبع وابسته کنترل‌شده با یک ولتاژ. (ب) مدار برچسب‌خورده برای تحلیل مش.

تمرین

۴ـ۸ i_1 را در مدار شکل ۲۳ـ۴ معین کنید، به شرطی که کمیت A برابر باشد با: (الف) $2i_2$ و (ب) $2v_x$.

جواب: (الف) 1.35 A و (ب) 546 mA.



شکل ۲۳ـ۴

رویه تحلیل مش را می‌توان طی هفت گام مطابق زیر خلاصه کرد. اگر ما روی هر مدار مسطحی کار کنیم همیشه با آن مواجهیم، هرچند منابع جریان نیاز به دقت بیشتری دارد. چنین مواردی در بخش ۴ـ۴ بحث شده است.

خلاصه رویه تحلیل مش پایه

۱. **مشخص کنید که آیا مدار از نوع مسطح است.** اگر خیر در عوض تحلیل گرهی را اجرا کنید.

۲. **تعداد مش‌ها را بشمارید (M).** در صورت لزوم مدار را دوباره رسم کنید.

۳. **هر جریان مش M را نامگذاری نمایید.** معمولاً تعریف همه جریان‌ها در جهت عقربه ساعت تحلیل را ساده‌تر می‌نماید.

۴. **معادله KVL را حول هر مش بنویسید.** از یک گره قراردادی شروع کرده و در جهت جریان مش جلو بروید. توجه خاصی به علامت "-" داشته باشید. اگر منبع جریان در مرز مش باشد، معادله KVL لازم نیست و جریان مش با وارسی معین می‌گردد.

۵. **هر مجهول اضافی مانند ولتاژ یا جریان‌هایی به جز جریان‌های مش را برحسب جریان مش مناسبی بنویسید.** این هنگامی اتفاق می‌افتد که منابع وابسته یا منابع جریان در مدار ما ظاهر گردند.

۶. **معادلات را سازمان‌دهی نمایید.** جملات را برحسب جریان مش‌ها دسته‌بندی کنید.

۷. **سیستم معادلات را برای جریان‌های مش حل کنید** (M عدد از آن‌ها را داریم).

۴ـ۴ آبَرمش

اگر منبع جریانی در شبکه باشد، روش سرراست فوق را چگونه باید اصلاح کرد؟ با توجه به تحلیل گرهی دو روش زیر پیشنهاد می‌شود: اول این‌که ولتاژ مجهولی به دو سر منبع جریان نسبت دهیم و قانون KVL را مثل قبل حول هر مش اعمال کنیم. سپس جریان منبع را به جریان‌های هر مش مربوط نماییم. این روش معمولاً مشکل است.

تکنیکی بهتر این‌است‌که کاملاً مشابه با روش تحلیل گرهی عمل کنیم. در آن‌جا یک ابرگره ایجاد کردیم و منبع ولتاژ را کاملاً با آن احاطه نمودیم و تعداد گره‌های غیرمرجع را 1 واحد در ازای هر منبع ولتاژ کم کردیم. در این‌جا "**ابرمش**" را از دو مش تعریف می‌کنیم که منبع جریان به‌عنوان عنصر مشترک آن‌ها است. بنابراین به ازای هر منبع جریان، تعداد مش‌ها یک واحد کم می‌شود. اگر منبع جریان در محیط مدار قرار داشت، از مشی که آن را شامل می‌شود چشم می‌پوشیم. سپس قانون ولتاژ کیرشهف را تنها به مش‌ها و ابرمش‌های مدار اصلاح‌شده اعمال می‌نماییم.

مثال ۴ـ۱۱

با تکنیک مش، مدار سه‌حلقه‌ای شکل ۴ـ۲۴ (الف) را تحلیل نمایید.

ملاحظه می‌شود که در این شکل یک منبع جریان مستقل 7A در مرز مشترک دو مش قرار دارد. جریان‌های مش i_1، i_2 و i_3 را قبلاً تخصیص داده‌ایم و به علت وجود منبع جریان، مش‌های 1 و 3 را یک ابرمش درنظرمی‌گیریم (شکل ۴ـ۲۴(ب)). با اعمال KVL حول این حلقه داریم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

یا

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \qquad (۳۲)$$

و حول مش 2

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

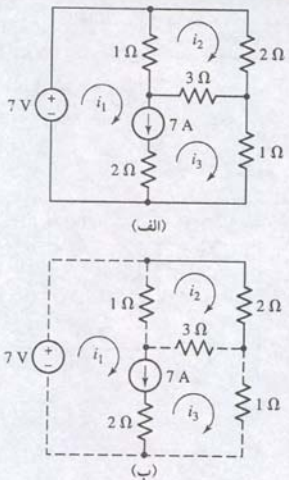
یا

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \qquad (۳۳)$$

بالاخره منبع جریان مستقل به جریان‌های فرضی مش‌ها مربوط می‌شوند.

$$i_1 - i_3 = 7 \qquad (۳۴)$$

با حل معادلات (۳۲) تا (۳۴) داریم $i_1 = 9A$، $i_2 = 2.5A$ و $i_3 = 2A$.

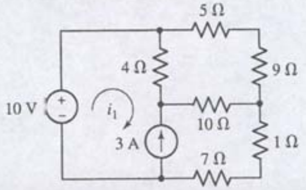


شکل ۴ـ۲۴ (الف) یک مدار سه‌حلقه‌ای با منبع جریان مستقل. (ب) یک آبَرمش با خط‌چین تعریف شده است.

تمرین

۴ـ۹ جریان i_1 را در مدار شکل ۴ـ۲۵ معین نمایید.

جواب: -1.93A



شکل ۴ـ۲۵

حضور یک یا چند منبع وابسته لازم می‌دارد تا مقدار این منابع و متغیر وابسته به آن برحسب جریان‌های مش بیان شوند. مثلاً در شکل ۴ـ۲۶ می‌بینیم که هر دو منبع جریان وابسته و مستقل لحاظ شده‌اند. بگذارید ببینیم چگونه وجود آن‌ها روی تحلیل تأثیر کرده و آن‌ها را در واقع ساده می‌کند.

مثال ۴ـ۱۲

از تحلیل مش برای محاسبه سه جریان مجهول در مدار شکل ۴ـ۲۶ استفاده کنید.

منابع جریان در تک‌حلقه‌های 1 و 3 قرار دارند. چون منبع 15 A در پیرامون مدار واقع است می‌توانیم مش 1 را حذف نماییم، چون واضح است که $i_1 = 15A$ می‌باشد.

چون اکنون یکی از دو جریان مش مربوط به منبع جریان وابسته را می‌دانیم، لازم نیست معادله آبَرمش را درباره مش‌های 1 و 3 بنویسیم. در عوض ما با استفاده از منبع وابسته به‌کمک KCL، i_1 و i_3 را به هم ربط می‌دهیم:

$$\frac{v_x}{9} = i_3 - i_1 = \frac{3(i_3 - i_2)}{9}$$

که به صورت فشرده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 15 \qquad (۳۵)$$

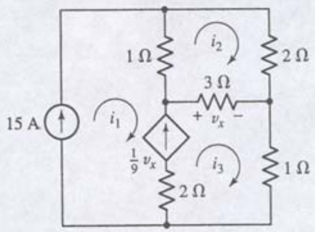
با یک معادله و دو مجهول، آنچه باقی می‌ماند نوشتن قانون ولتاژ کیرشهف KVL حول مش 2است:

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

یا

$$6i_2 - 3i_3 = 15 \qquad (۳۶)$$

با حل معادلات (۳۵) و (۳۶) داریم $i_2 = 11$ A و $i_3 = 17$ A. ما قبلاً مشخص کردیم که $i_1 = 15$ Aاست.

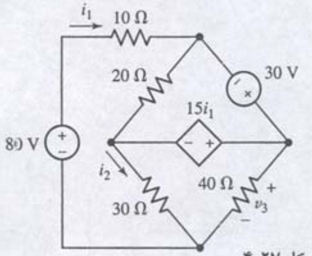


شکل ۴ـ۲۶ مدار سه‌حلقه‌ای با یک منبع جریان وابسته و یک منبع جریان مستقل.

تمرین

۴ـ۱۰ از تحلیل مش برای یافتن v_3 در مدار شکل ۴ـ۲۷ استفاده کنید.

جواب: 104.2 V



شکل ۴ـ۲۷

اکنون روش کلی نوشتن معادلات مش را خلاصه می‌کنیم، خواه منابع وابسته، منابع ولتاژ، و یا منابع جریان وجود داشته باشند یا خیر، به شرطی که مدار را بتوان به‌طور مسطح تصور کرد.

خلاصه رویه تحلیل آبَرمش

۱. **مشخص کنید که آیا مدار مسطح است یا خیر.** اگر خیر درعوض تحلیل گرهی را پیاده کنید.

۲. **تعداد مش‌ها را بشمارید (M).** در صورت لزوم مدار را دوباره رسم کنید.

۳. **هر یک از M جریان مش را نام‌گذاری نمایید.** معمولاً تعریف همه جریان‌های مش در راستای عقربه ساعت تحلیل را ساده‌تر می‌کند.

۴. **اگر مدار دارای منبع جریان مشترکی بین دو مش باشد، یک آبَرمش برای محصورکردن هر دو مش ایجاد نمایید.**

۵. **یک معادله KVL حول هر مش /آبرمش بنویسید.** از یک گره مناسب شروع کرده و در جهت جریان مش پیشروی کنید. توجه به علائم "−" لازم است. اگر منبع جریان حاشیه مش قرار گیرد، معادله KVL لازم نیست و جریان مش با وارسی معین می‌گردد.

۶. **جریان جاری‌شده از هر منبع جریان را به جریان‌های مش مرتبط کنید.** این کار به راحتی با اِعمال KCL انجام می‌شود. برای هر آبرمش تعریف‌شده یک چنین معادله‌ای لازم است.

۷. **هر مجهول اضافی مانند ولتاژها یا جریان‌هایی به جز جریان‌های مش را برحسب جریان‌های مش بیان نمایید.** این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که منابع وابسته در مدار پیدا شوند.

۸. **معادلات را سازمان‌دهی کنید.** جملات را برطبق جریان مش‌ها مرتب کنید.

۹. **سیستم معادلات را برای جریان‌های مش حل کنید** (M عدد از آن‌ها موجود است).

۴_۵ تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه

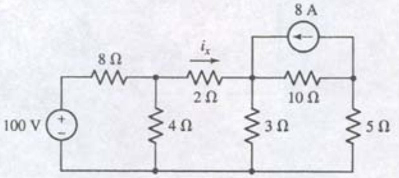
اکنون که دو روش جدا از هم را برای تحلیل مدار بررسی کردیم، به‌نظر می‌رسد طرح این سوال که کدام‌یک بر دیگری مزیت دارد، منطقی باشد. اگر مدار غیرمسطح باشد، آن‌گاه هیچ راهی به‌جز انتخاب گرهی وجود ندارد.

در مواردی که مدار مسطحی را تحلیل می‌کنیم ممکن‌است یک تکنیک نسبت به دیگری کمی توفق داشته باشد. اگر برای استفاده از تحلیل گرهی برنامه‌ریزی کرده‌ایم، آن‌گاه مداری با N گره منجر به (N - 1) معادله KCL می‌گردد. هر ابرگرهی این عدد را یک واحد کم می‌کند. اگر همان مدار M مش جدا داشته باشد، آن‌گاه M معادله KVL را خواهیم داشت. هر ابرمشی این عدد را یک واحد کم می‌نماید. بر اساس این واقعیت‌ها باید روشی را اختیار کنیم که منجر به معادلات همزمان کمتری گردد.

اگر یک یا چند منبع وابسته در مدار لحاظ شوند، آن‌گاه هر کمیت‌کننده ممکن‌است بر انتخاب تحلیل گرهی یا مش ما تأثیر بگذارند. مثلاً یک منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با ولتاژ گره نیازی به یک معادله اضافی در تحلیل گرهی ندارد. به همین ترتیب منابع جریان کنترل‌شده به وسیله یک جریان مش نیازی به یک معادله اضافی به هنگام تحلیل مش ندارد. اما در مورد وضعیتی که یک منبع ولتاژ وابسته به وسیله یک جریان کنترل شود، چگونه است؟ یا برعکس، اگر منبع ولتاژ وابسته به وسیله ولتاژ کنترل شود وضع چگونه می‌باشد؟ با این شرط که کمیت کنترل‌کننده به سادگی به جریان مش مرتبط گردد، ما ممکن‌است انتظار داشته باشیم تحلیل مش سرراست‌تر باشد. به همین ترتیب اگر کمیت کنترل‌کننده به سادگی مرتبط با ولتاژهای گره باشد، تحلیل گرهی ترجیح داده می‌شود. یک نکته نهایی در این رابطه حفظ مکان منبع در ذهن است؛ منابع جریانی که در حواضی مش قرار دارند خواه وابسته و یا مستقل، به راحتی در تحلیل مش قابل استفاده‌اند؛ منابع ولتاژی که متصل به پایانه مرجع هستند به خوبی در تحلیل گرهی استفاده می‌گردند.

اگر هر یک از دو روش به تعداد معادلات برابری دست یابند، آن‌گاه باید کمیت مورد جست‌وجو را مدنظر قرار داد. تحلیل گرهی مستقیماً ولتاژ گره‌ها را محاسبه می‌کند، درصورتی‌که تحلیل مش جریان‌ها را مشخص می‌نماید. اگر جریان‌های درون مقاومت‌ها مورد سوال باشد، باید از قانون اهم در هر مقاومت برای تعیین جریان استفاده کنیم.

به‌عنوان‌مثال، مدار شکل ۲۸_۴ را ملاحظه نمایید. می‌خواهیم جریان i_x را محاسبه نماییم.



شکل ۲۸_۴ یک مدار مسطح با پنج گره و چهار مش.

گره پایینی را به‌عنوان مرجع اختیار می‌کنیم، ضمن این‌که چهار گره غیر مرجع هم وجود دارد. گرچه این بدان معنی است که می‌توان چهار معادله مستقل نوشت، نیازی به نام‌گذاری گره بین منبع 100V و مقاومت 8Ω وجود ندارد، زیرا ولتاژ گره 100V است. ولتاژ بقیه گره‌ها را v_1، v_2 و v_3 می‌نامیم (شکل ۲۹_۴).

سه معادله زیر را می‌نویسیم:

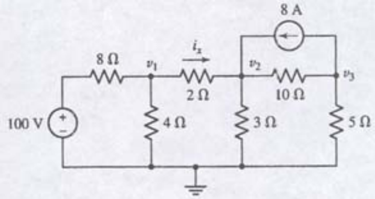
$$\frac{v_1\ 100}{8} + \frac{v_1}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad 0.875v_1 - 0.5v_2 = 12.5 \qquad (۳۷)$$

$$\frac{v_2\ v_1}{2} + \frac{v_2}{3} + \frac{v_2 - v_3}{10} - 8 = 0 \quad \text{یا} \quad -0.5v_1 - 0.9333v_2 - 0.1v_3 = 8 \qquad (۳۸)$$

$$\frac{v_3\ v_2}{10} + \frac{v_3}{5} + 8 = 0 \quad \text{یا} \quad -0.1v_2 + 0.3v_3 = -8 \qquad (۳۹)$$

با حل آن‌ها داریم $v_1 = 25.89V$ و $v_2 = 20.31V$. با اعمال قانون اهم جریان i_x را به‌دست‌می‌آوریم:

$$i_x = \frac{v_1 - v_2}{2} = 2.79A \qquad (۴۰)$$



شکل ۲۹_۴ مدار شکل ۲۸_۴ با ولتاژ گره‌هایی که نام‌گذاری شده‌اند. توجه کنید که سمبل زمین برای نام‌گذاری پایانه مرجع انتخاب شده است.

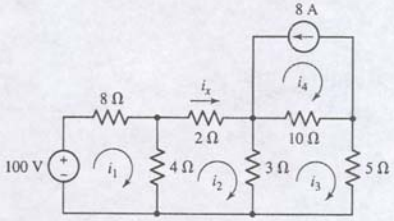
سپس همان مدار را با تحلیل مش بررسی می‌نماییم. در شکل ۳۰_۴ چهار مش داریم، که در آن $i_4 = -8A$ است. بنابراین چهار معادله جداگانه را می‌نویسیم.

معادله KVL را در حلقه‌های 1، 2 و 3 می‌نویسیم:

$$-100 + 8i_1 + 4(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{یا} \quad 12i_1 - 4i_2 = 100 \qquad (۴۱)$$

$$4(i_2 - i_1) + 2i_2 - 3(i_2 - i_3) = 0 \quad \text{یا} \quad -4i_1 + 9i_2 - 3i_3 = 0 \qquad (۴۲)$$

$$3(i_3 - i_2) + 10(i_3 + 8) + 5i_3 = 0 \quad \text{یا} \quad -3i_2 + 18i_3 = -80 \qquad (۴۳)$$



شکل ۳۰_۴ مدار شکل ۲۸_۴ با جریان‌های مش.

با حل آن‌ها، درمی‌یابیم که $i_2(=i_x) = 2.79A$. در این مسئله خاص، تحلیل مش ساده‌تر است. با این وجود چون هر دو روش معتبر است، کار با هر روش می‌تواند به معنی چک‌کردن روش دیگر باشد.

۴_۶ تحلیل کامپیوتری مدار

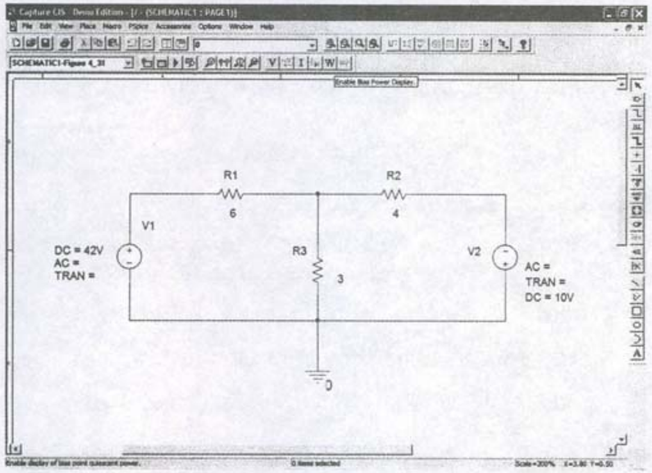
دیدیم که ایجاد یک مدار پیچیده نیاز به قطعات خیلی زیادی ندارد. با ادامه بررسی مدارهای حتی پیچیده‌تر، می‌بینیم که احتمال انجام اشتباه در تحلیل زیاد است، و تحقیق درستی جواب‌ها با دست‌کاری وقت‌گیر است. یک بسته نرم‌افزاری قوی با نام PSpice وجود دارد که به‌طور رایج برای تحلیل سریع مدارها به‌کار می‌رود، و ابزارهای رسم شماتیک[1] آن با ابزارهای مدار چاپی (PCB) یا طرح‌های مجتمع (IC) ارتباط دارند، امروزه PSpice که در دهه ۱۹۷۰ در دانشگاه برکلی ساخته شد در سطح استاندارد است. شرکت MicroSim در سال ۱۹۸۴، PSpice را همراه با امکانات گرافیکی حول هسته ارائه نمود. بسته به نوع کاربرد مدار، اکنون چندین شرکت، گونه‌های مختلف PSpice را ارائه می‌کنند.

گرچه تحلیل کامپیوتری راه سریعی برای تعیین ولتاژها و جریان‌ها در مدار است، ولی نباید بگذاریم که بسته‌های نرم‌افزاری کاملاً جایگزین روش‌های تحلیل سنتی با "کاغذ و قلم" گردند. برای این امر چندین دلیل وجود دارد. اول این‌که برای طراحی باید بتوانیم تحلیل کنیم. اتکاء بیش از حد بر ابزارهای نرم‌افزاری مانع رشد مهارت‌های تحلیلی لازم می‌شود، و مثل این‌است‌که به بچه‌های دبستانی ماشین حساب داده شود. دوم، در استفاده بلندمدت از

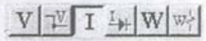
1. schematic capture tools

بسته‌های نرم‌افزاری پیچیده بعید است در تحویل داده اشتباه نکنیم. اگر از قبل ایده‌ای از نوع پاسخ در شبیه‌سازی نداریم، هیچ اطمینانی به پاسخ نمی‌توان داشت. بنابراین نام "تحلیل به کمک کامپیوتر" نام مناسبی است. مغز انسان عضوی هیچ‌کاره نیست. لااقل هنوز نه!

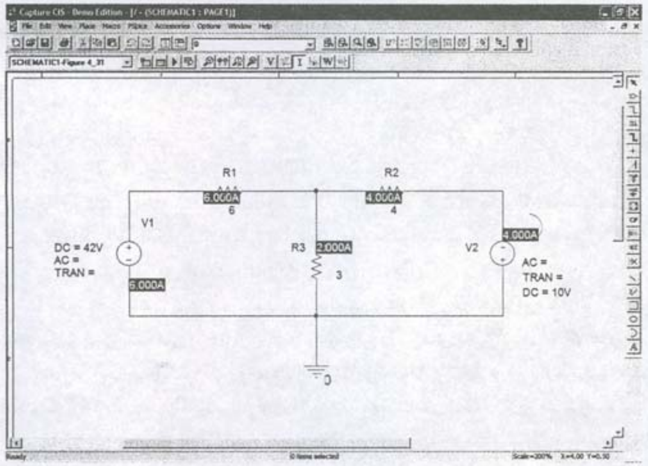
به‌عنوان‌مثال، مدار شکل ۱۵ـ۴ (ب) را درنظر می‌گیریم که دارای دو منبع ولتاژ dc و سه مقاومت است. می‌خواهیم این مدار را با PSpice شبیه‌سازی کنیم به نحوی که جریان‌های i_1و i_2 به‌دست‌آیند. شکل ۳۱ـ۴ (الف) مدار را که با برنامه رسم شماتیکی رسم شده است، نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

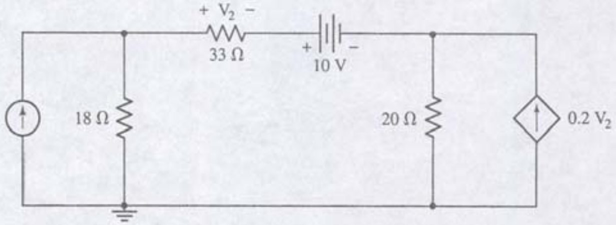


(ج)

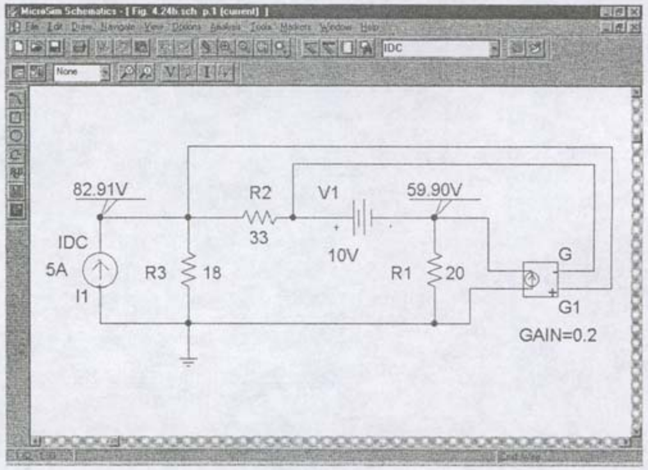
شکل ۳۱ـ۴ (الف) مدار شکل ۱۵ـ۴ (الف) که با نرم‌افزار Orcad رسم شده است. (ب) دکمه جریان، ولتاژ و توان. (ج) مدار پس از اجرای شبیه‌سازی که در آن نمایش جریان فعال شده است.

برای تعیین جریان‌های مش، فقط لازم است یک نقطه بایاس را اجرا کنیم. تحت **PSpice**، پروفایل **New Simulation** را انتخاب کنید. مثال اول را تایپ کنید (یا هرچه را که می‌خواهید) و روی **Create** کلیک نمایید. زیر **Analysis Type** منو را پایین بیاورید، **Bias Point** را انتخاب کرده سپس دکمه OK را کلیک کنید. به پنجره شماتیک اولیه برگردید، زیر **PSpice**، **Run** را انتخاب نمایید (یا هر یک از دو فرم shortcut را به کار ببرید: کلید F11 را فشار دهید یا نماد "Play" آبی را کلیک نمایید). برای مشاهده جریان محاسبه‌شده به وسیله PSpice، مطمئن شوید که دکمه جریان انتخاب شده است (شکل ۳۱ـ۴ (ب)). نتیجه شبیه‌سازی ما در شکل ۳۱ـ۴ (ج) دیده می‌شود. می‌بینیم که جریان‌های i_1و i_2به ترتیب 6A و 4A می‌باشند.

به‌عنوان مثالی دیگر، مدار شکل ۳۲ـ۴ (الف) را درنظر بگیرید. این مدار یک منبع ولتاژ dc، یک منبع جریان dc، و یک منبع جریان کنترل‌شده با ولتاژ مدار است. ما علاقمند به سه ولتاژ گره‌ها هستیم که از هر یک از تحلیل‌های گره یا مش برابر 82.91 V ، 69.9 V و 59.9 V به دست می‌آید، و این ضمن حرکت از چپ به راست در بالای مدار حاصل می‌گردد. شکل ۳۲ـ۴ (ب) این مدار را نشان می‌دهد که از ابزار شماتیک[1] برای رسم آن پس از شبیه‌سازی استفاده شده است. سه ولتاژ گره مستقیماً روی تصویر نشان داده شده‌اند. دقت کنید که در ترسیم یک منبع وابسته با ابزار شماتیک، ما باید دو پایانه منبع کنترل‌کننده ولتاژ یا جریان را متصل کنیم.



(الف)



(ب)

شکل ۳۲ـ۴ (الف) مداری با منبع جریان وابسته. (ب) مداری که با ابزار رسم شماتیک کشیده شده است و نتایج شبیه‌سازی هم روی شماتیک آمده است.

1. schematic capture tool

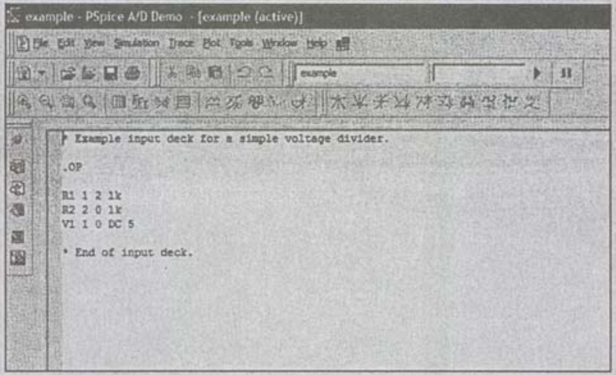
کاربردهای عملی

ایجاد شماتیک PSpice مبتنی بر گره

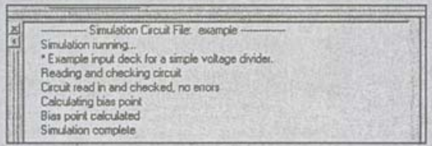
رایج‌ترین روش توصیف یک مدار همراه با تحلیل کامپیوتر استفاده از بعضی بسته‌های ترسیم شماتیک گرافیکی است که مثالی از آن در شکل ۴ـ۳۲ ملاحظه شد. با این وجود SPICE قبل از پیدایش این برنامه‌ها نوشته شده بود و توصیف مدار در آن با قالب‌های متنی صورت می‌گرفت. ریشه قالب در قالب کارت‌های پانچی بوده است و به همین دلیل ظاهری تفاوت دارد. مبنای توصیف مدار تعریف عناصر می‌باشد، که به هر پایانه آن یک شماره گره تخصیص یافته است. بنابراین هر چند که اکنون دو روش کلی تحلیل گرهی و مش را ملاحظه کردیم ولی جالب است بدانیم که SPICE و PSpice بر اساس روش تحلیل گرهی نوشته شده است. گرچه تحلیل مدار مدرن با استفاده از نرم‌افزارهای محاوره‌ای گرافیک محوری انجام می‌شود، وقتی خطایی تولید می‌شود (به‌دلیل اشتباه در ترسیم شماتیک، یا در انتخاب ترکیبی از تحلیل‌های اختیاری)، هنگام ردیابی یک مسئله خاص، خواندن شماتیک تولیدشده می‌تواند باارزش باشد. ساده‌ترین راه در ایجاد این توانمندی، خواندن چگونگی اجرای PSpice از user-written input deck است. مثلاً بسته ورودی زیر را ملاحظه نمایید (خطوط ستاره‌دار، توضیحات است):

* Example input deck for a simple voltage divider.	
.OP	از SPICE تعیین نقطه کار dc مدار را سوال می‌کند.
R1 1 2 1k	R1 بین گره‌های 1 و 2 است؛ مقدار آن 1kΩ است.
R2 2 0 1k	R2 بین گره‌های 2 و 0 است؛ مقدار آن 1kΩ است.
V1 1 0 DC 5	V1 بین گره‌های 1 و 0 است؛ مقدار آن 5 V dc است.
* End of input deck.	

می‌توانیم بسته ورودی را با برنامه Notepad از ویندوز ایجاد کنیم. با ذخیره فایل تحت نام example.cir، PSpice A/D را فرا می‌خوانیم (پیوست ۴). تحت File، **Open** را انتخاب می‌نماییم. دایرکتوری را مشخص کنید و فایل example.cir را انتخاب نمایید. برای **Files of Type:**، **Circuit Files (*.cir)** را انتخاب نمایید. پس از انتخاب فایل و کلیک Open می‌بینیم که پنجره PSpice A/D با فایل مدار ما باز شده است (شکل ۴ـ۳۳ (الف)). یک چنین netlist، حاوی دستورات برای اجرای شبیه‌سازی، می‌تواند تا نرم‌افزار شماتیک یا دستی مثل این مثال، تولید گردد.



(الف)



(ب)

شکل ۴ـ۳۳ (الف) پنجره PSpice A/D با فایل مدار بازشده. (ب) خلاصه آعمال شبیه‌سازی.

ما شبیه‌سازی را با کلیک روی نماد "play" در سمت راست بالا یا انتخاب **Run** زیر **Simulation** انجام می‌دهیم. در گوشه سمت چپ پایین از ویندوز اصلی، یک پنجره خلاصه کوچکتر اطلاع می‌دهد که شبیه‌سازی با موفقیت اجرا شده است (شکل ۴ـ۳۳ (ب)). برای مشاهده نتایج، ما **Output File** را از زیر منوی **View** انتخاب کرده و می‌بینیم:

```
**** 02/18/04 09:53:57 ******** PSpice Lite (Jan 2003) ************
* Example input deck for a simple voltage divider.
****    CIRCUIT DESCRIPTION
**************************************************************************

.OP
R1  1  2  1k
R2  2  0  1k
V1  1  0  DC  5
* End of input deck.
```

(ورودی در خروجی نیز درج می‌شود تا به آن مراجعه شود.)

```
**** 02/18/04  09:53:57  ********  PSpice Lite (Jan 2003)  ********
* Example input deck for a simple voltage divider.
**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION     TEMPERATURE = 27.000 DEG C
**************************************************************************
NODE  VOLTAGE  NODE   VOLTAGE  NODE VOLTAGE NODE  VOLTAGE
(    1)   5.0000  (    2)    2.5000
   VOLTAGE SOURCE CURRENT
   NAME         CURRENT
   V1           -2.500E-03

   TOTAL POWER DISSIPATION 1.25E-02  WATTS
```

(در خلاصه خروجی، ولتاژ بین هر گره و گره 0 داده شده است. منبع 5 V ما بین گره‌های 1 و 0 است؛ مقاومت R2 بین گره‌های 2 و 0 بوده و دو سر آن 2.5 V می‌باشد.)

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، استفاده از روش‌های مبتنی بر متن در توصیف مدارها در مقایسه با ابزارهای رسم شماتیکی چندان آسان نیست. خصوصاً معرفی خطاها به یک شبیه‌ساز از طریق اشتباه در تعداد گره‌ها به سادگی صورت می‌گیرد. با این وجود تفسیر خروجی بسیار ساده است و تلاش در خواندن چند فایل از این نوع ارزش دارد.

۴ـ۷ خلاصه فصل و مرور

- قبل از شروع تحلیل، یک نمودار ساده و مرتب بسازید. همه مقادیر عناصر و منابع را مشخص کنید. هر منبع باید یک سمبل مرجع داشته باشد.
- اگر تحلیل گرهی روش انتخابی است.
  - یکی از گره‌ها را به‌عنوان گره مرجع اختیار نمایید. آن‌گاه ولتاژ گره‌ها را با v_1، v_2، ... و v_{N-1} علامت بزنید و به‌خاطر بسپارید که هر کدام نسبت به مرجع اندازه‌گیری می‌شود.
  - اگر مدار حاوی تنها منبع جریان باشد، در هر گره غیرمرجع KCL را اعمال کنید.
  - اگر مدار حاوی منابع ولتاژ است، یک ابرگره حول هر یک ایجاد نمایید و سپس KCL را در همه گره‌های غیرمرجع و ابرگره اعمال کنید.
- اگر تحلیل مش را انتخاب کرده‌اید، ابتدا مطمئن شوید که مش از نوع مسطح است.
  - در هر مش در جهت ساعتگرد یک جریان تخصیص دهید.
  - اگر مدار حاوی فقط منابع ولتاژ باشد، KVL را حول هر مش اجرا کنید.
  - اگر مدار حاوی منابع جریان باشد، ابرمش را برای هر یک که در بین دو مش مشترک است ایجاد نمایید و سپس KVL را برای هر مش و ابرمش اجرا کنید.

- برای تصمیم‌گیری در استفاده از تحلیل گرهی یا مش برای مدار مسطح، مداری با گره/ابرگره کمتر، معادلات کمتری را در تحلیل گرهی دارد.
- تحلیل به کمک کامپیوتر، برای تست نتایج و تحلیل مدارهایی که تعداد عناصر زیادی دارند مفید است. با این وجود برای تست نتایج شبیه‌سازی، باید موضوع را درک کرد.

۴ـ۸ خواندنی‌های کمکی

A detailed treatment of nodal and mesh analysis can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

A solid guide to SPICE is

P. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE*, 3rd ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice-Hall, 1995.

مسائل

۴ـ۱ تحلیل گرهی

۱. (الف) اگر $0.1v_1 - 0.3v_2 - 0.4v_3 = 0$ ، $-0.5v_1 + 0.1v_2 = 4$ و $-0.2v_1 - 0.3v_2 + 0.4v_3 = 6$ باشد، v_2 را پیدا کنید. (ب) دترمینان زیر را محاسبه نمایید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

۲. (الف) اگر $v_A + v_B + v_C = 27$ ، $2v_B + 16 = v_A - 3v_C$ و $4v_C + 2v_A + 6 = 0$ باشد، v_A، v_B و v_C را بیابید. (ب) دترمینان زیر را محاسبه نمایید.

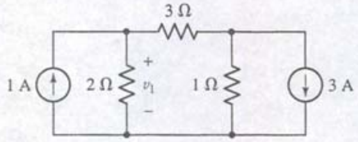
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

۳. (الف) سیستم معادلات زیر را حل کنید:

$$4 = v_1/100 + (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_x)/50$$
$$10 - 4 - (-2) = (v_x - v_1)/50 + (v_x - v_2)/40$$
$$-2 = v_2/25 + (v_2 - v_x)/40 + (v_2 - v_1)/20$$

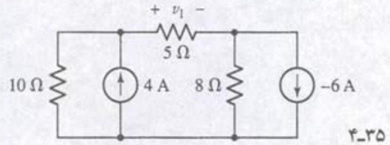
(ب) با متلب حل خود را تصدیق کنید.

۴. مقدار ولتاژ v_1 را در شکل ۴ـ۳۴ معین کنید.



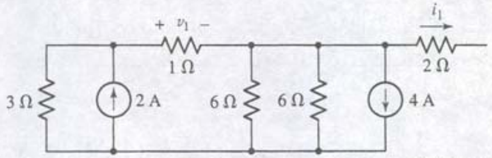
شکل ۴ـ۳۴

۵. مقدار ولتاژ v_1 را در شکل ۴ـ۳۵ معین کنید.



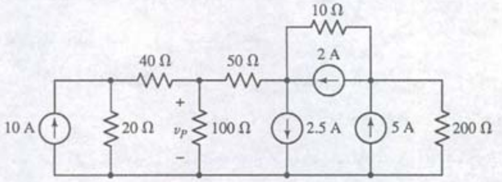
شکل ۴ـ۳۵

۶. برای مدار شکل ۴ـ۳۶ مقدار ولتاژ v_1 و جریان i_1 را به دست آورید.



شکل ۴ـ۳۶

۷. با تحلیل گرهی v_p را در مدار شکل ۴ـ۳۷ به‌دست‌آورید.



شکل ۴ـ۳۷

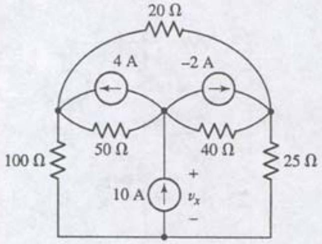
۸. برای یافتن v_x در مدار شکل ۴ـ۳۸ از تحلیل گرهی استفاده نمایید.

۹. برای شکل ۴ـ۳۹، (الف) از تحلیل گرهی برای تعیین v_1 و v_2 استفاده کنید.

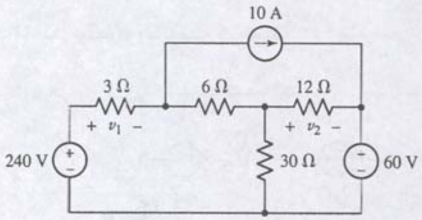
(ب) توان جذب‌شده به‌وسیله مقاومت 6Ω چقدر است.

۱۰. تحلیل گرهی را برای یافتن v_1 و i_2 در مدار شکل ۴ـ۴۰، به‌کاربرید.

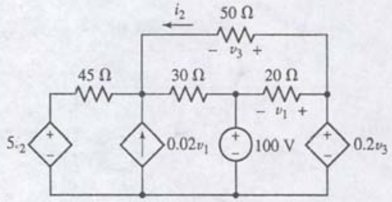
۱۱. با مراجعه به شکل ۴ـ۴۱، تحلیل گرهی را برای تعیین v_2 که $v_1 = 0$ را نتیجه دهد، به‌کاربرید.



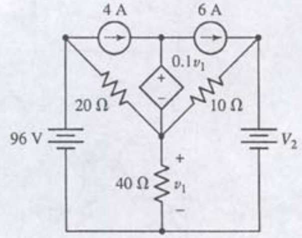
شکل ۴ـ۳۸



شکل ۴ـ۳۹

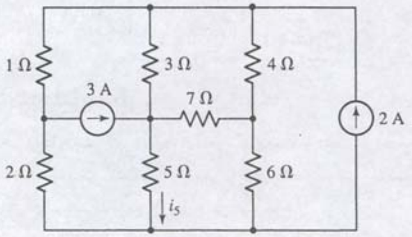


شکل ۴ـ۴۰



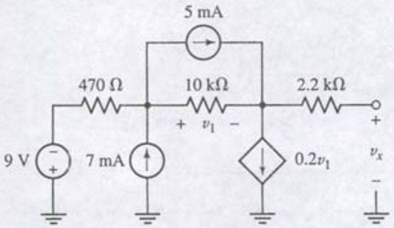
شکل ۴ـ۴۱

۱۲. برای مدار شکل ۴ـ۴۲، تحلیل گرهی را برای تعیین جریان i_5 به کاربرید.



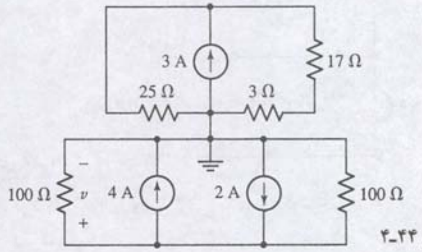
شکل ۴ـ۴۲

۱۳. با تحلیل گرهی، مقدار v_2 را در شکل ۴ـ۴۳ به‌دست‌آورید.



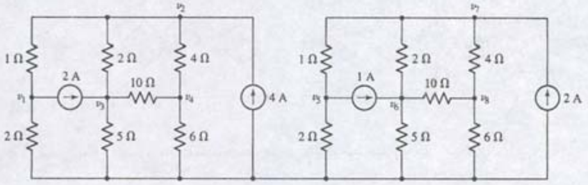
شکل ۴ـ۴۳

۱۴. با تحلیل گرهی، ولتاژ v را در شکل ۴ـ۴۴ معین کنید.



شکل ۴ـ۴۴

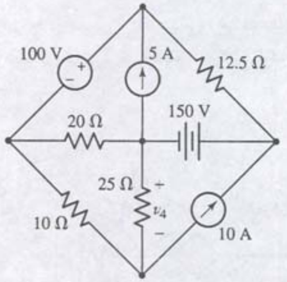
۱۵. ولتاژهای گره مشخص‌شده در شکل ۴ـ۴۵ را معین نمایید.



شکل ۴ـ۴۵

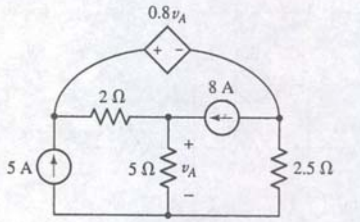
۴ـ۲ ابرگره

۱۶. v_4 را در مدار شکل ۴ـ۴۶ به کمک تحلیل گرهی به‌دست‌آورید.



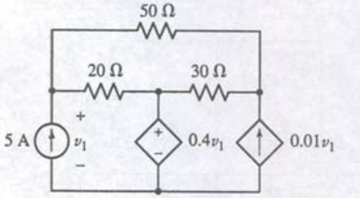
شکل ۴ـ۴۶

۱۷. با تحلیل گرهی مدار شکل ۴ـ۴۷، (الف) v_A را به‌دست‌آورید، (ب) توان تلف‌شده در مقاومت 2.5Ω چقدر است.



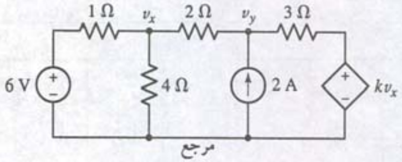
شکل ۴-۴۷

۱۸. v_1 و توان تولیدشده به‌وسیله منبع جریان وابسته در شکل ۴-۴۸ را با تحلیل گرهی مشخص کنید.



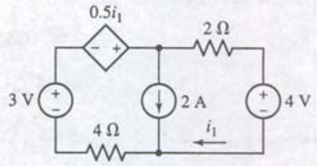
شکل ۴-۴۸

۱۹. در شکل ۴-۴۹، با تحلیل گرهی، مقدار k راکه موجب $v_y = 0$ می‌شود، پیدا کنید.



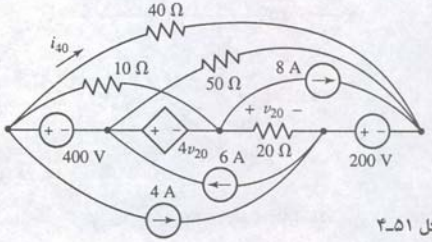
شکل ۴-۴۹

۲۰. مدار شکل ۴-۵۰ را ملاحظه نمایید. جریان i_1 را به‌دست‌آورید.



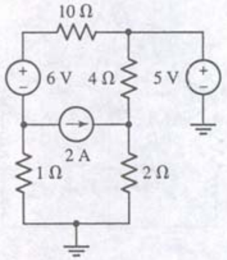
شکل ۴-۵۰

۲۱. از مفهوم ابرگره در تعیین v_{20} در شکل ۴-۵۱ استفاده کنید. خطوط متقاطع از نظر فیزیکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند، مگر این‌که در محل برخورد نقطه سیاه باشد.



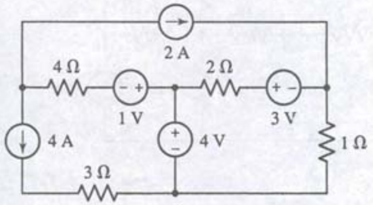
شکل ۴-۵۱

۲۲. برای مدار شکل ۴-۵۲، ولتاژ هر چهار گره را به‌دست‌آورید.



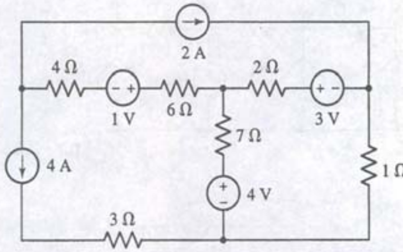
شکل ۴-۵۲

۲۳. توان تولیدی به‌وسیله منبع 2A در شکل ۴-۵۳ چقدر است؟



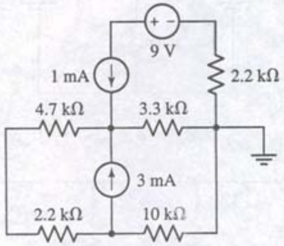
شکل ۴-۵۳

۲۴. توان تولیدی به‌وسیله منبع 2A در شکل ۴-۵۴ چقدر است؟



شکل ۴-۵۴

۲۵. ولتاژهای گره در شکل ۴-۵۵ را تعیین کنید.



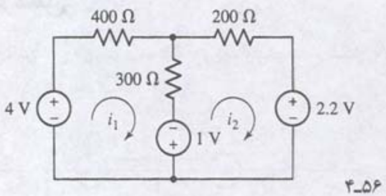
شکل ۴-۵۵

۴-۳ تحلیل مش

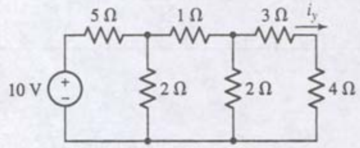
۲۶. جریان‌های مش i_1 و i_2 را طبق مدار شکل ۴-۵۶ به دست آورید.

۲۷. با توجه به شکل ۴-۵۷، تحلیل مش را برای (الف) جریان i_y، (ب) توان تولیدی به‌وسیله منبع 10 V تعیین کنید.

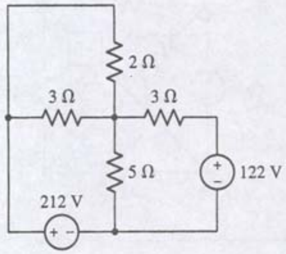
۲۸. تحلیل مش را برای تعیین جریان در مدار شکل ۴-۵۸ از (الف) مقاومت 2Ω و (ب) مقاومت 5Ω به دست آورید.



شکل ۴-۵۶

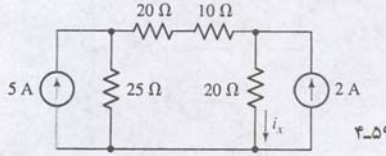


شکل ۴-۵۷



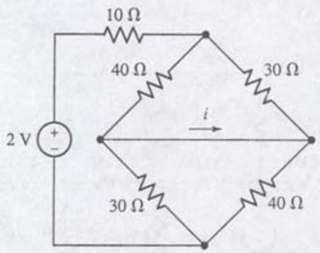
شکل ۴-۵۸

۲۹. در مدار شکل ۴-۵۹، تحلیل مش را برای (الف) جریان i_x و (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 25Ω تعیین کنید.



شکل ۴-۵۹

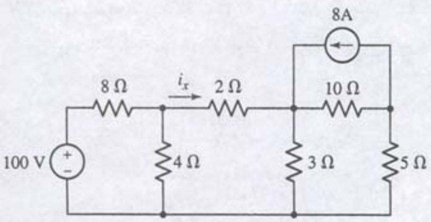
۳۰. از تحلیل مش برای تعیین جریان i در مدار شکل ۴-۶۰ استفاده نمایید.



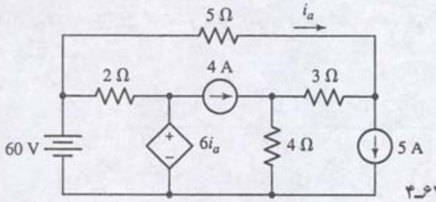
شکل ۴-۶۰

۳۱. برای یافتن i_x در شکل ۴-۶۱ از تحلیل مش استفاده کنید.

۳۲. در مدار شکل ۴-۶۲ توان تلف‌شده در مقاومت 2Ω را محاسبه نمایید.



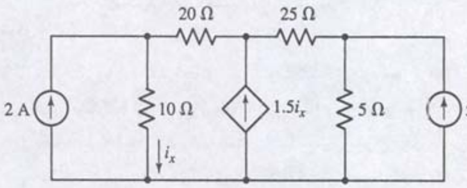
شکل ۴-۶۱



شکل ۴-۶۲

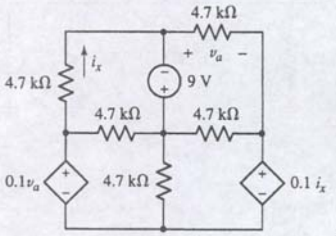
۳۳. از تحلیل مش برای مدار شکل ۴-۴۸ استفاده‌کرده و توان تولیدی به‌وسیله منبع ولتاژ وابسته را حساب کنید.

۳۴. از تحلیل مش برای یافتن i_x در شکل ۴-۶۳ استفاده کنید.



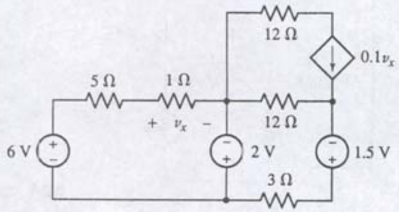
شکل ۴-۶۳

۳۵. برای شکل ۴-۶۴ جریان‌های مش ساعت‌گرد را حساب نمایید.



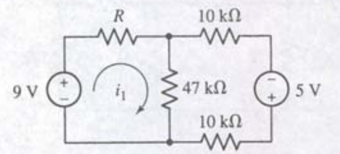
شکل ۴-۶۴

۳۶. هر جریان مش را در مدار شکل ۴-۶۵ محاسبه کنید.



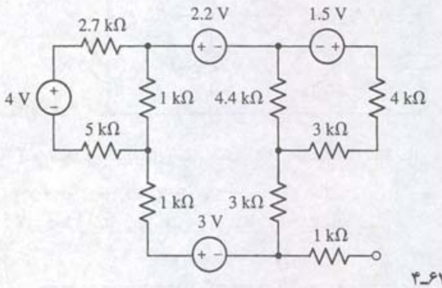
شکل ۴-۶۵

۳۷. (الف) با مراجعه به مدار شکل ۴-۶۶، مقدار R چقدر باشد تا جریان مش $i_1 = 1.5\text{mA}$ شود. (ب) آیا مقدار R لزوماً منحصربه‌فرد است؟ توضیح دهید.



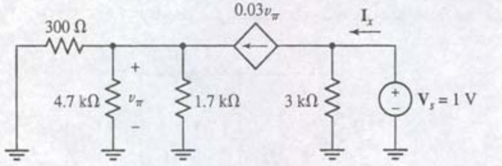
شکل ۴-۶۶

۳۸. در مدار شکل ۴-۶۷، تحلیل مش را برای یافتن توان جذب‌شده در هر مقاومت به‌کاربرید.



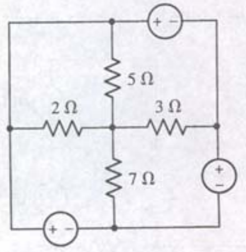
شکل ۴-۶۷

۳۹. مدار شکل ۴-۶۸ مدار معادل یک تقویت‌کننده ترانزیستوری دوقطبی بیس مشترک است. منبع ورودی اتصال کوتاه و به‌جای وسیله خروجی یک منبع 1V جایگزین شده است. (الف) تحلیل مش را برای یافتن I_x استفاده نمایید. (ب) حل بخش (الف) را با روش تحلیل گرهی تحقیق کنید. (ج) اهمیت فیزیکی V_s/I_x چیست؟



شکل ۴-۶۸

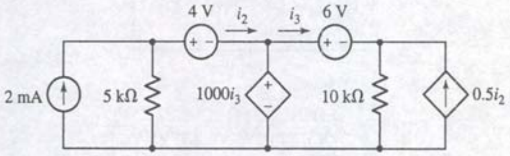
۴۰. مقادیر غیرصفر را برای سه منبع ولتاژ در شکل ۴-۶۹، طوری انتخاب کنید که هیچ جریانی از مقاومت‌ها نگذرد.



شکل ۴-۶۹

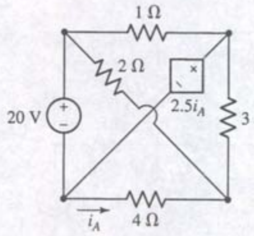
۴-۴ ابرمش

۴۱. برای یافتن توان تولیدی به‌وسیله هر یک از پنج منبع شکل ۴-۷۰ از تحلیل مش استفاده کنید.



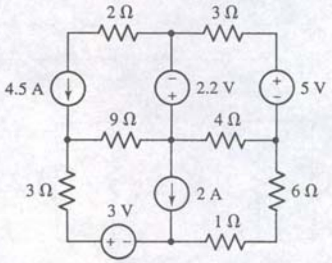
شکل ۴-۷۰

۴۲. در مدار شکل ۴-۷۱، i_A را بیابید.



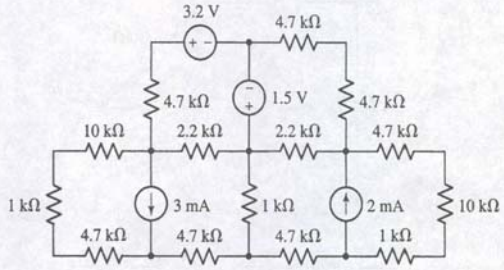
شکل ۴-۷۱

۴۳. با استفاده از مفهوم ابرمش توان تولیدشده به‌وسیله منبع 2.2V در شکل ۴-۷۲ را معین نمایید.



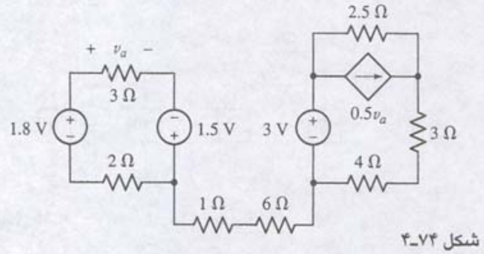
شکل ۴-۷۲

۴۴. ولتاژ دو سر منبع 2mA در شکل ۴-۷۳ را با فرض زمین‌بودن گره پایینی تعیین کنید.



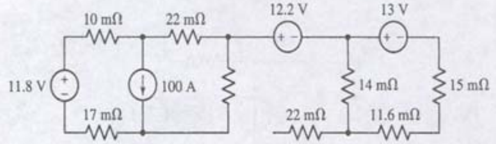
شکل ۴-۷۳

۴۵. برای تهیه ولتاژ دو سر مقاومت 2.5Ω در شکل ۴-۷۴ از تحلیل مش استفاده نمایید.



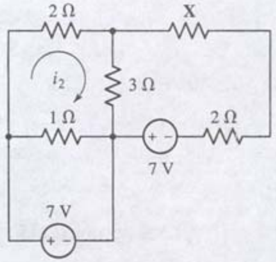
شکل ۴-۷۴

۴۶. جریان‌های مش را برای شکل ۴-۷۵ محاسبه کنید.



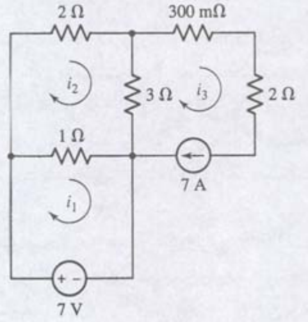
شکل ۴-۷۵

۴۷. برای مدار شکل ۴-۷۶ مقدار مقاومت X را به‌دست‌آورید. به‌شرطی‌که $i_2 = 2.273\text{A}$ باشد.



شکل ۴-۷۶

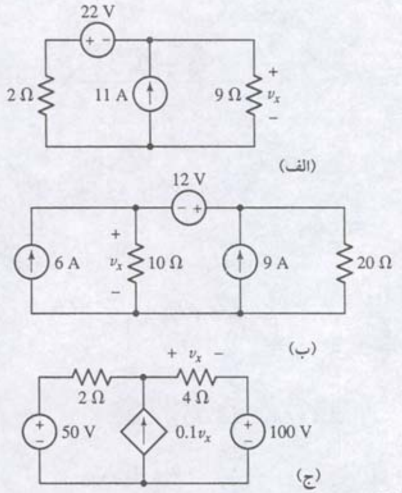
۴۸. مدار شکل ۴-۷۷ را ملاحظه کنید. سه جریان مش را محاسبه کنید



شکل ۴-۷۷

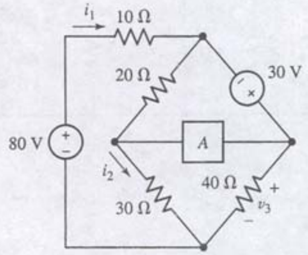
۴-۵ تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه

۴۹. در هر یک از مدارهای شکل ۴-۷۸، ولتاژ v را تعیین نمایید.



شکل ۴-۷۸

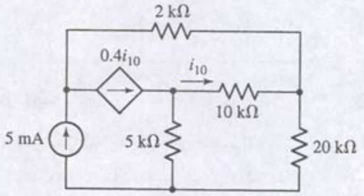
۵۰. v_3 در مدار شکل ۴-۷۹ را پیدا کنید، اگر عنصر A (الف) یک مدار اتصال کوتاه باشد. (ب) یک منبع ولتاژ مستقل 9V، با مرجع مثبت در سمت چپ، (ج) یک منبع جریان وابسته، با پیکان به سمت چپ و برچسب $5i_1$ باشد.



شکل ۴-۷۹

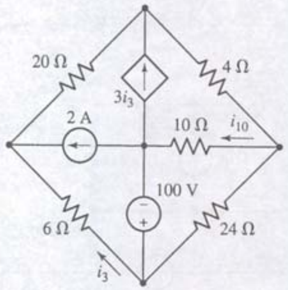
۵۱. جریان‌های i_1 و i_2 در مدار شکل ۴-۷۹ را معین کنید. به‌شرطی‌که عنصر A یک مقاومت 12Ω باشد. منطق خود را در مورد انتخاب تحلیل گرهی مش بیان کنید.

۵۲. در مدار شکل ۴-۸۰، جریان i_{10} را به‌دست‌آورید.



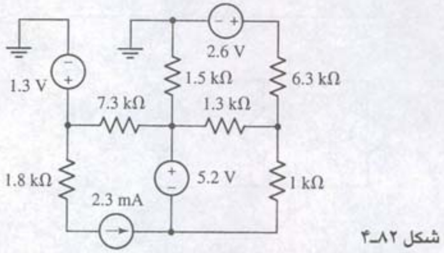
شکل ۴-۸۰

۵۳. دو جریان مجهول را در شکل ۴-۸۱ معین نمایید.



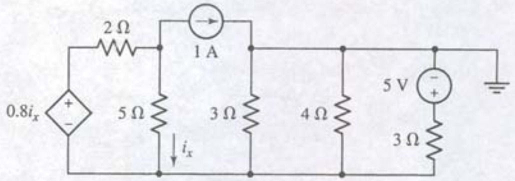
شکل ۴-۸۱

۵۴. برای مدار شکل ۴-۸۲ ولتاژ گره مرکزی را حساب نمایید.



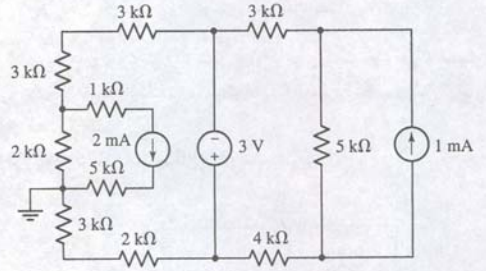
شکل ۴-۸۲

۵۵. جریان درون هر انشعاب را در مدار شکل ۴-۸۳ به‌دست‌آورید.



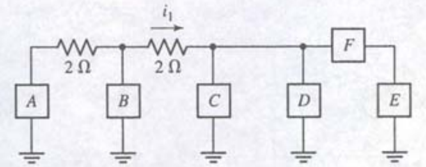
شکل ۴-۸۳

۵۶. ولتاژ دو سر منبع جریان 2mA در شکل ۴-۸۴ را تعیین کنید.



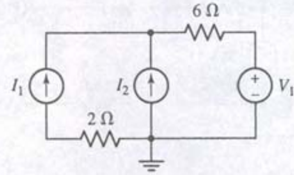
شکل ۴-۸۴

۵۷. برای مدار شکل ۴-۸۵، اجازه بدهید تا A یک منبع ولتاژ 5V با مرجع مثبت در بالا، B یک منبع جریان 3A با پیکانی به سمت زمین، C یک مقاومت 3Ω، D یک منبع جریان 2A با پیکان به سمت زمین، F یک منبع ولتاژ 1V با مرجع منفی به راست و E یک مقاومت 4Ω باشد، i_1 را محاسبه کنید.



شکل ۴-۸۵

۵۸. مقادیر غیرصفری را برای I_1، I_2 و V_1 طوری انتخاب کنید که 6W توان به‌وسیله مقاومت 6Ω در مدار شکل ۴-۸۶ تلف شود.



شکل ۴-۸۶

۵۹. با مراجعه به شکل ۴-۸۴، منبع جریان 2mA را با یک منبع ولتاژ 2V و منبع 3V را با منبع جریان 7mA جایگزین کنید. برای مدار جدید جریان مش را به‌دست‌آورید.

۶۰. در مدار شکل ۴-۸۵، A یک منبع جریان وابسته با پیکانی به سمت پایین و برچسب جریان $5i_1$ است. اگر B و E مقاومت‌های 2Ω باشند، اجازه بدهید که C یک منبع جریان 2A به سمت زمین، F یک منبع ولتاژ با قطب منفی متصل به زمین، D یک منبع جریان در جهت بالا باشد. ولتاژ گره‌ها و جریان مش را به‌دست‌آورید.

۴-۶ تحلیل کامپیوتری مدار

۶۱. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۲ از PSpice استفاده کنید. یک شماتیک با نام‌گذاری مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه نمایید.

۶۲. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۴ از PSpice استفاده نمایید. یک شماتیک با نام‌گذاری مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه نمایید.

۶۳. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۶ از از PSpice استفاده نمایید. یک شماتیک با برچسب‌های مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه کنید.

۶۴. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۸ از از PSpice استفاده نمایید. شماتیک آن را با برچسب‌های مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه نمایید.

۶۵. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۶۰ از PSpice استفاده نمایید. شماتیک آن را با برچسب‌های مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه کنید.

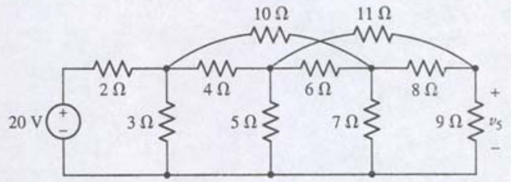
۶۶. مداری متشکل از منبع 5V سری با مقاومت 100Ω به شبکه‌ای حاوی حداقل یک منبع 3A، سه مقاومت مختلف و یک منبع جریان کنترل‌شده با ولتاژ، که به ولتاژ دو سر مقاومت 100Ω وابسته است وصل شده است. (الف) همه ولتاژهای گرهی و همه جریان‌های شاخه‌ها را به‌دست‌آورید. (ج) برای تحقیق نتایج از PSpice استفاده کنید.

۶۷. مداری با باطری 10V، یک منبع 3A و به هر تعداد مقاومت 1Ω بسازید تا پتانسیل 5V در دو سر منبع 3A ایجاد شود. صحت محاسبات دستی را با PSpice تحقیق کنید.

۶۸. یک بسته ورودی برای SPICE بنویسید تا v_S را در مدار شکل ۴-۸۷ پیدا کنید. از فایل خروجی لیست بگیرید، ضمن این‌که حل را پررنگ‌تر چاپ می‌کنید.

۶۹. با باطری 9V و مقاومت‌های مناسب ولتاژهای گره 4V، 3V و 2V بسازید. یک بسته ورودی برای SPICE برای شبیه‌سازی حل خود بنویسید و فایل خروجی را چاپ کنید. یک شماتیک با برچسب روی مرجع رسم کنید و شماره گره‌ها را مشخص کنید.

۷۰. یک رشته طویل از یک سری لامپهای رنگی در یک منزل کشیده شده است. پس از اعمال برق صاحبخانه متوجه می‌شود که دو لامپ سوخته است. (الف) آیا لامپها سری‌اند یا موازی؟ (ب) یک بسته ورودی SPICE برای شبیه‌سازی لامپها بنویسید، با این فرض که سیم 20AWG است، منبع تغذیه 115Vac می‌باشد، و توان هر لامپ 1W است، در رشته 400 لامپ وجود دارد. یک مدار با کمتر از 25 قطعه شبیه‌سازی نمایید. از فایل خروجی لیست بگیرید. توان به‌وسیله سوکت روی دیوار شاخص‌تر باشد. (ج) پس از تعویض لامپهای سوخته، صاحبخانه متوجه می‌شود که لامپهای نزدیک خروجی 10% روشن‌تر از لامپهای انتهای رشته‌اند. توضیح لازم را ارائه نمایید و به‌خاطر بسپارید که رشته سیم مقاومت صفر دارد.



شکل ۴-۸۷

فصل پنجم

تکنیک‌های مفید تحلیل مدار

مقدمه

تکنیک‌های تحلیل گره و مش توصیف‌شده در فصل ۴، روش‌های قابل اطمینان و قدرتمندی هستند. با این وجود به‌طورکلی هر دو لازم می‌دارند تا مجموعه معادلاتی را برای توصیف یک مدار خاص ایجاد کنیم، حتی اگر تنها کمیت یک جریان، ولتاژ یا توان خاصی موردنظر باشد. در این فصل ما چند تکنیک متفاوت دیگر را جهت جداکردن بخش‌های خاصی از یک مدار بررسی می‌کنیم تا تحلیل را ساده‌کنیم. پس از بررسی کاربرد این تکنیک‌ها، ما توجه خود را به چگونگی انتخاب یک روش معطوف خواهیم کرد.

مفاهیم کلیدی

- تجمیع به معنی تعیین سهم تک‌تک منابع مختلف برای هر جریان یا ولتاژ است
- تبدیل منبع برای ساده‌کردن مدار است
- تئوری تونن
- تئوری نورتن
- شبکه‌های معادل تونن و نورتن
- حداکثر انتقال توان
- تبدیل‌های ستاره ـ مثلث برای شبکه‌های مقاومتی
- انتخاب یک ترکیبی خاص از تکنیک‌های تحلیل
- اجرای Sweep Simulations با PSpice

5.1 خطی‌بودن و تجمیع

همه مدارهایی که قصد تحلیل آن‌ها را داریم از نوع خطی‌اند. بنابراین اکنون لحظه مناسبی برای تعریف دقیق‌تر آنچه می‌گوییم است. پس از آن می‌توانیم نتایج مهم‌تر خطی‌بودن یعنی **اصل تجمیع** (برهم‌نهی یا ترکیب) را بررسی نماییم. این اصل بسیار ساده بوده و کراراً در تحلیل مدارهای خطی به‌کارخواهد رفت. در واقع مشکل تحلیل مدارهای غیرخطی به‌دلیل عدم امکان اصل تجمیع است!

اصل تجمیع چنین می‌گوید که پاسخ (جریان ولتاژ) در یک مدار خطی با بیش از یک منبع مستقل می‌تواند از جمع پاسخ‌های جداگانه حاصل از منابع مستقل به‌دست‌آید.

عناصر خطی و مدارهای خطی

بیایید **عنصر خطی** را عنصر غیرفعالی تعریف کنیم که دارای رابطه ولتاژ ـ جریان خطی باشد. منظور ما از رابطه ولتاژ ـ جریان خطی این‌است‌که اگر جریان داخل یک عنصر در ثابت K ضرب شود، ولتاژ روی عنصر در همان ثابت K ضرب می‌شود. تا این‌جا تنها عنصر غیرفعال مقاومت و رابطه ولتاژ ـ جریان آن را تعریف کرده‌ایم:

$$v(t) = Ri(t)$$

که کاملاً خطی است. یعنی اگر $v(t)$ به‌عنوان تابعی از $i(t)$ ترسیم شود، نتیجه یک خط راست است.

منبع وابسته خطی را نیز باید به صورت منبعی تعریف کنیم که جریان یا ولتاژ خروجی آن با توان اول جریان یا ولتاژ متغیری از مدار یا ترکیب آن‌ها متناسب باشد، مثلاً منبع ولتاژ وابسته $v_s = 0.6t_1 - 14v_2$ خطی است، ولی $v_s = 0.6i_1^2$ و $v_s = 0.6i_1v_2$ نیستند.

اکنون مدار خطی را به‌صورت ترکیبی از منابع مستقل، منابع وابسته خطی و عناصر خطی تعریف می‌کنیم. با این تعریف می‌توان نشان داد که پاسخ با منبع متناسب است، یا ضرب تمام منابع مستقل ولتاژ و جریان در ثابت K باعث می‌شود که تمام ولتاژها و جریان‌ها در همان ثابت‌ها ضرب شوند* (حتی ولتاژ یا جریان منابع وابسته).

---

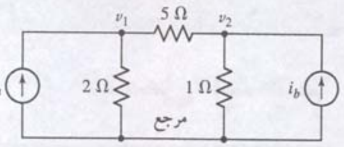
* برای اثبات این مطلب، ابتدا نشان می‌دهیم که اعمال تحلیل گرهی به یک مدار خطی فقط می‌توانند معادلاتی خطی به صورت زیر باشد:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = b$$

که در آن ضرایبی چون a_n مقادیر ثابت (ترکیب مقادیر مقاومت‌ها و هدایت‌ها، ثابت‌های مربوط به منابع وابسته یا ±1) v_n ولتاژهای گرهی (پاسخ) و b مقدار منبع مستقل یا مجموع مقادیر منابع مستقل است.

اگر در چنین مجموعه‌ای از معادلات تمام bها را در K ضرب کنیم، واضح است که حل معادلات جدید، K_1v، Kv_2، ... و Kv_N است.

اصل تجمیع



شکل ۵ـ۱ مداری با دو منبع مستقل.

مهم‌ترین اثر خطی‌بودن تجمیع است. بیایید ابتدا با درنظرگرفتن مدار شکل ۵ـ۱ به بررسی اصل تجمیع بپردازیم. این مدار دو منبع مستقل جریان دارد که جریان‌های i_a و i_b را به مدار می‌فرستند. به این دلیل این منابع را اغلب توابع تحریک و ولتاژ در گره‌های آن‌ها را توابع پاسخ می‌گویند. هر دو تابع تحریک و پاسخ ممکن‌است تابعی از زمان باشند. دو معادله گرهی برای این مدار، عبارتند از:

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad (۱)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (۲)$$

اکنون اجازه بدهید آزمایش x را انجام دهیم. ابتدا دو تابع تحریک را i_{ax} و i_{bx} می‌نامیم و در این حال دو ولتاژ مجهول نیز متفاوت و برابر v_{1x} و v_{2x} خواهند بود. بنابراین:

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \quad (۳)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \quad (۴)$$

سپس آزمایش y را با تغییر جریان‌های منبع به i_{ay} و i_{by} انجام می‌دهیم و پاسخ‌ها را v_{1y} و v_{2y} می‌خوانیم:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \quad (۵)$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \quad (۶)$$

این سه مجموعه معادله، یک مدار را با سه مجموعه جریان‌های منبع توصیف می‌کنند. اجازه بدهید تا دو معادله آخر را با هم جمع یا به اصطلاح **تجمیع** کنیم. از جمع معادلات (۳) و (۵) داریم:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \quad (۷)$$

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad (۱)$$

از جمع معادلات (۴) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \quad (۸)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (۲)$$

که معادله (۱) بلافاصله زیر معادله (۷) و معادله (۲) زیر معادله (۸) نوشته شده است تا مقایسه شوند.

خطی‌بودن همه این معادلات اجازه می‌دهد تا معادله (۷) را با معادله (۱) و معادله (۸) را با معادله (۲) مقایسه نموده و نتیجه جالبی را به‌دست‌آوریم. اگر جمع i_{ax} و i_{ay} را i_a و جمع i_{bx} و i_{by} را i_b درنظربگیریم، آنگاه از جمع v_{1x} و v_{1y}، مقدار v_1 و v_{2x} و v_{2y} نیز مقدار v_2 حاصل می‌شود. به بیان دیگر، ما می‌توانیم آزمایش x را انجام داده و پاسخ را به‌دست آوریم، سپس آزمایش y را انجام داده و پاسخ آن را ملاحظه کنیم و آنگاه دو مجموعه پاسخ را با هم جمع نماییم. این عمل ما را به مفهوم اساسی در اصل تجمیع رهنمون می‌شود و آن این‌که هر بار به یک منبع مستقل (و پاسخ آن) نگاه کرده و دیگر منابع مستقل را خاموش (یعنی خروجی صفر) درنظرمی‌گیریم.

اگر منبع ولتاژ را به صفر ولت کاهش دهیم، درواقع یک **اتصال کوتاه** را ایجاد کرده‌ایم (شکل ۵ـ۲(الف)). صفرکردن منبع جریان به معنی **مدار باز بودن** (شکل ۵ـ۲(ب)) آن است.

شکل ۵ـ۲ (الف) منبع ولتاژ در صفر تنظیم شده تا مثل اتصال کوتاه عمل کند. (ب) منبع جریان در صفر تنظیم شده تا مثل مدار باز عمل نماید.

بنابراین **قضیه تجمیع** به‌صورت زیر بیان می‌شود:

> در هر شبکه مقاومتی خطی، ولتاژ دو سر یا جریان درون هر مقاومت یا منبع با جمع جبری ولتاژها یا جریان‌های حاصل از منابع جدا از هم حاصل می‌گردد. در این حال همه منابع ولتاژ مستقل با اتصال کوتاه و همه منابع جریان مستقل با مدار باز جایگزین می‌شوند.

بنابراین اگر N منبع مستقل وجود داشته باشد، باید N آزمایش انجام داد و هر بار یک منبع مستقل را فعال و بقیه را غیرفعال (خروجی خاموش یا صفر) نمود. توجه کنید که منابع وابسته همواره در هر آزمایش فعالند.

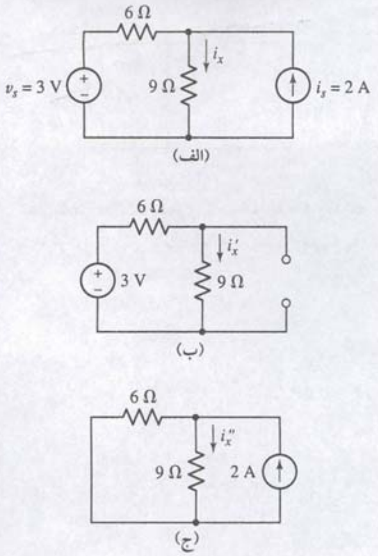
مداری که در بالا به‌عنوان مثال به‌کاربردیم، می‌گوید که باید قضیه قوی‌تری را بیان کرد. اگر بخواهیم می‌توان گروهی از منابع مستقل را به‌طور دلخواه فعال و غیرفعال نمود. مثلاً فرض کنید که سه منبع مستقل وجود داشته باشد. قضیه می‌گوید که می‌توان پاسخ مفروضی را با ملاحظه هر منبع به تنهایی و نتیجه را از جمع آن‌ها به‌دست‌آورد. به همین ترتیب ممکن‌است پاسخ توام جمع منابع اول و دوم را بدون منبع سوم به‌دست‌آوریم. سپس منبع سوم به تنهایی عمل کند و نتیجه به پاسخ دو منبع اول و دوم اضافه شود. این عمل نیز نوعی تجمیع است.

البته لزومی ندارد که برای یک منبع مستقل مقدار اصلی یا صفری را در چند آزمایش فرض کنیم، بلکه فقط کافی است که جمع چند مقدار با مقدار اصلی برابر باشد. با این وجود غیرفعال‌کردن مدار همیشه ساده‌ترین مدار را می‌دهد.

اجازه بدهید کاربرد اصل تجمیع را با بررسی مثالی از یک مدار روشن کنیم که در آن هر دو نوع منبع وجود دارد.

مثال ۵ـ۱

برای مدار شکل ۵ـ۳ (الف) از اصل تجمیع برای نوشتن عبارتی برای جریان i_x استفاده کنید.



شکل ۵ـ۳ (الف) مدار نمونه‌ای با دو منبع که جریان شاخه i_x در آن موردنظر است. (ب) همان مدار با قطع منبع. (ج) مدار اصلی با منبع ولتاژ اتصال کوتاه‌شده.

ابتدا منبع جریان را صفر می‌کنیم و مدار را دوباره طبق شکل ۵ـ۳(ب) رسم می‌نماییم. بخشی از i_x متعلق به منبع ولتاژ، با i'_x نشان داده شده است تا از هرگونه اشتباه جلوگیری شود و به‌راحتی می‌توان مقدار 0.2A را برای آن یافت.

سپس منبع ولتاژ را در شکل ۵ـ۳(الف) صفر کرده و مطابق شکل ۵ـ۳(ج) آن را دوباره ترسیم می‌کنیم. استفاده از روش تقسیم جریان اجازه می‌دهد تا i'' (بخشی از i_x متعلق به منبع 2A) برابر 0.8A گردد.

اکنون می‌توان جریان کل i_x را از جمع دو مولفه جزئی فوق به‌دست‌آورد:

$$i_x = i_x|_{3V} + i_x|_{2A} = i'_x + i''_x$$

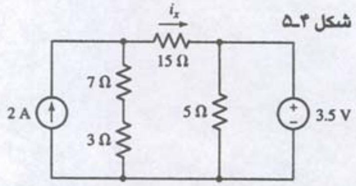
یا

$$i_x = \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0A$$

نگاهی متفاوت به این مثال این‌است که بگوییم منبع 3V و منبع 2A روی مدار کار انجام می‌دهند، تا به این ترتیب جریان i_x از مقاومت 9Ω عبور کند. با این وجود، نقش منبع 3V روی i_x به نقش منبع 2A روی آن وابسته نیست و بالعکس.

مثلاً اگر خروجی منبع 2A را به 4A یعنی دو برابر افزایش دهیم، جریان i_x که از مقاومت 9Ω می‌گذرد نیز دو برابر شده و به 1.6A خواهد شد. با این وجود نقش منبع 3V همان 0.2A بوده و جریان جدید 0.2 + 1.6 = 1.8A می‌شود.

تمرین



شکل ۵-۴

۵-۱ برای مدار شکل ۵-۴، از تجمیع برای محاسبه جریان i_x استفاده نمایید.
جواب: 660mA.

همان‌طور که خواهیم دید، تجمیع، بار کاری ما را حین بررسی یک مدار چندان کاهش نمی‌دهد، زیرا منجر به تحلیل چند مدار جدید برای تهیه پاسخ مطلوب می‌گردد. با این وجود در شناخت نقش اجزای مختلف در یک مدار پیچیده‌تر بسیار مفید می‌باشد.

مثال ۵-۲

با مراجعه به مدار شکل ۵-۵ (الف)، حداکثر جریان مثبتی را معین کنید که قبل از عبور جریان هر مقاومت از حد مجاز و گرم‌شدن آن، می‌تواند وجود داشته باشد.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

هر مقاومت دارای 250mW توان می‌باشد. اگر مدار اجازه دهد که این مقدار فراتر برود (با عبور جریان بالایی از آن) گرمای زایدالوصفی که احتمالاً منجر به حادثه شود تولید می‌گردد. منبع 6V نمی‌تواند تغییر یابد، بنابراین به دنبال معادله‌ای برحسب I_x و جریان حداکثر از هر مقاومت خواهیم گشت.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

بر اساس توان مجاز 250mW، حداکثر جریان قابل تحمل در مقاومت 100Ω برابر است با:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} = \sqrt{\frac{0.250}{100}} = 50\text{mA}$$

و به‌طور مشابه جریان در مقاومت 64Ω باید کمتر از 62.5mA باشد.

- **ارائه طرح.**

تحلیل گره یا تک‌حلقه می‌تواند برای حل این مسئله به‌کار رود، ولی روش تجمیع ممکن است کمی مشکل‌ساز باشد، زیرا ما به اثر منبع جریان علاقمندیم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

با استفاده از اصل تجمیع، مدار را چون شکل ۵-۵(ب) ترسیم می‌کنیم و درمی‌یابیم که منبع 6V به میزان

$$i'_{100\Omega} = \frac{6}{100 + 64} = 36.59\text{mA}$$

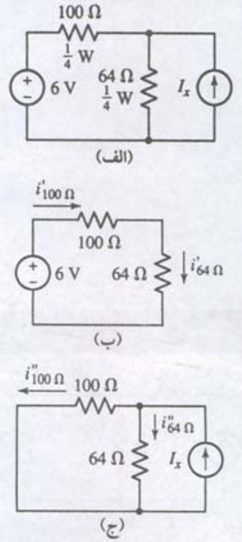
در جریان مقاومت 100Ω نقش دارد و چون با مقاومت 64Ω سری است $i'_{64\Omega} = 36.59$mA خواهد بود. بنابراین، اگر منبع 6V به تنهایی عمل کند مشکل گرمایی برای هیچ مقاومتی به‌وجود نمی‌آورد. با ملاحظه تقسیم‌کننده جریان در شکل ۵-۵(ج) می‌بینیم که $i''_{64\Omega}$ به $i'_{64\Omega} = 36.59$ اضافه می‌شود، ولی $i''_{100\Omega}$ در جهت خلاف $i'_{100\Omega}$ است. بنابراین با اطمینان کافی جریان درون مقاومت 64Ω برابر است با $62.5 - 36.59 = 25.91$mA و جریان درون مقاومت 100Ω تا $50 - (-36.59) = 86.59$mA خواهد بود.

مقاومت 100Ω محدودیت زیر را بر I_x تحمیل می‌نماید:

$$I_x < (86.59 \times 10^{-3})\left(\frac{100 + 64}{64}\right)$$

برای مقاومت 64Ω داریم:

$$I_x < (25.91 \times 10^{-3})\left(\frac{100 + 64}{64}\right)$$



شکل ۵-۵ (الف) مداری با دو مقاومت هر کدام با $\frac{1}{4}$ W. (ب) مدار با منبع 6V. (ج) مدار با منبع I_x فعال.

- **اقدام به حل.**

ابتدا مقاومت 100Ω را ملاحظه نماییم، می‌بینیم که I_x به مقدار $I_x < 221.9$mA محدود شده است. مقاومت 64Ω محدودیت $I_x < 42.49$mA را تحمیل می‌نماید.

- **صحت حل را تحقیق نمایید. آیا جواب منطقی است؟**

برای برآورده کردن هر دو محدودیت، I_x باید کوچک‌تر از 42.49mA باشد. اگر مقدار آن افزایش یابد، مقاومت 64Ω قبل از گرم‌شدن مقاومت 100Ω، گرم می‌شود. روشی مفید برای ارزیابی حل، اجرای تحلیل dc sweep در PSpice است که بعد از مثال بعد تشریح شده است. در هر صورت سوال جالبی که مطرح می‌باشد این است که آیا انتظار داشتیم مقاومت 64Ω ابتدا گرم شود.

در آغاز می‌بینیم که مقاومت 100Ω جریان کمتری دارد بنابراین منطقی است تصور کنیم که I_x را محدود کند. با این وجود چون I_x با جریان ارسالی از منبع 6V از طریق مقاومت 100Ω مخالفت می‌کند ولی به جریان منبع 6V از مقاومت 64Ω اضافه می‌شود، بنابراین عمل عکس صورت خواهد گرفت یعنی مقاومت 64Ω جریان I_x را محدود می‌نماید.

مثال ۵-۳

در مدار شکل ۵-۶ (الف) با استفاده از اصل ترکیب مقدار i_x را مشخص نمایید.

ابتدا منبع 3A را باز می‌کنیم (شکل ۵-۶(ب)). معادله تک‌حلقه برابر است با:

$$-10 + 2i'_x + 1i'_x + 2i'_x = 0$$

به نحوی که

$$i'_x = 2\text{A}$$

سپس منبع 10V را اتصال کوتاه می‌کنیم (شکل ۵-۶(ج)) و معادله تک‌گره را می‌نویسیم.

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i''_x}{1} = 3$$

که کمیت منبع وابسته را به v'' مربوط می‌سازد:

$$v'' = 2(-i''_x)$$

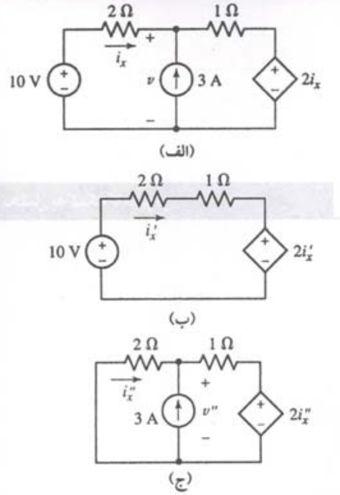
و یا

$$i''_x = -0.6\text{A}$$

و بنابراین

$$i_x = i'_x + i''_x = 2 + (-0.6) = 1.4\text{A}$$

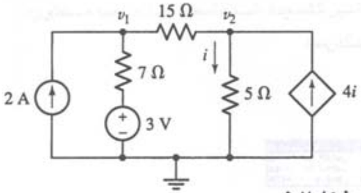
توجه کنید که در ترسیم هر مدار فرعی همیشه باید نمادها را کمی تغییر داد تا مشخص شود که با متغیرهای اصلی کار نمی‌کنیم. در نتیجه از ظهور هر خطای احتمالی جلوگیری خواهد شد.



شکل ۵-۶ (الف) مدار نمونه‌ای با دو منبع مستقل و یک منبع وابسته که در آن جریان i_x مطلوب است. (ب) مدار با منبع 3A قطع‌شده. (ج) مدار اصلی با اتصال کوتاه منبع 10V.

تمرین

۵-۲ در شکل ۵-۷ از تجمیع برای به‌دست‌آوردن ولتاژ دو سر هر منبع جریان استفاده نمایید.
جواب: $v_1|_{2A} = 9.180$V، $v_2|_{2A} = -1.148$V، $v_1|_{3V} = 1.967$V، $v_2|_{3V} = -0.246$V، $v_1 = 11.147$V و $v_2 = -1.394$V.



شکل ۵-۷

خلاصه‌ای از رویه تجمیع مبنا

۱. **یکی از منابع مستقل را انتخاب نمایید. همه منابع مستقل دیگر را صفر کنید.** این بدان معنی است که منابع ولتاژ اتصال کوتاه و منابع جریان با یک مدار باز می‌گردند. منابع وابسته را رها کنید.

۲. **ولتاژها و جریان‌ها را با علائم مناسب نام‌گذاری کنید** (مثل v'، i_2''). دقت کنید که متغیرهای کنترل‌کننده منابع وابسته هم به خاطر پرهیز از اشتباه نام‌گذاری شود.

۳. **مدار ساده‌شده را تحلیل کنید تا جریان‌ها یا ولتاژهای موردنظر به دست آید.**

۴. **مراحل ۱ تا ۳ را تکرار کنید تا هر منبع مستقل مورد بررسی قرار گیرد.**

۵. **جریان‌ها و ولتاژهای جزیی که از تحلیل‌های جدا از هم به دست آمده را با هم جمع کنید.** به دقت توجه کنید تا علامت ولتاژها و جهت جریان‌ها به هنگام جمع، لحاظ شوند.

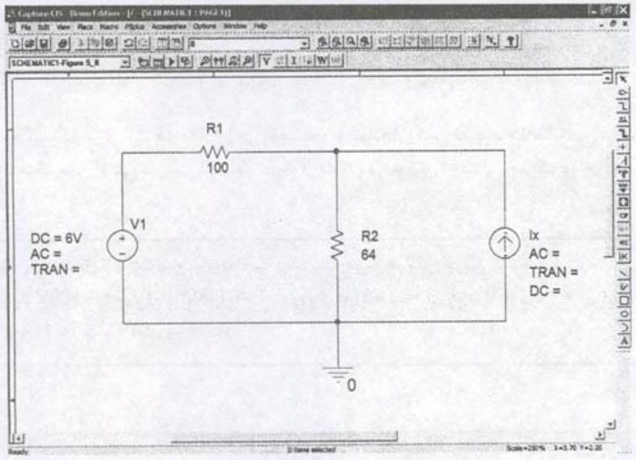
۶. **کمیت‌های توان را جمع نکنید.** اگر کمیت‌های توان مورد توجه است آن را فقط پس از جمع ولتاژها و جریان‌های جزیی به دست آورید.

توجه کنید که گام ۱ ممکن است به چند طریق تغییر یابد. ابتدا منابع مستقل می‌تواند به صورت گروه‌ها برخلاف تک‌تک در نظر گرفته شود، به شرطی که تحلیل ساده‌تر شود، البته شرط دیگر این است که در هر مدار جزیی بیش از یک منبع نباشد. دوم به‌طور تکنیکی لزومی ندارد تا منابع در صفر تنظیم شوند، هر چند این تقریباً بهترین است. مثلاً یک منبع 3 V ممکن است در دو مدار جزیی به صورت 1.5 V ظاهر شود زیرا 3V = 1.5 + 1.5 و یا 3 V = 3 + 0 است. چون به نظر نمی‌رسد تحلیل ما به این ترتیب ساده شود، توجه کمی به این‌گونه تمرین می‌شود.

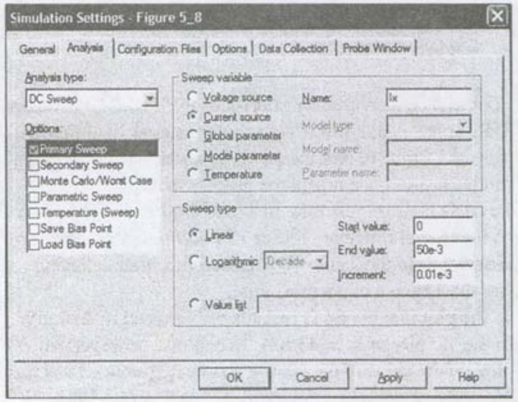
تحلیل به کمک کامپیوتر

گرچه PSpice در تحقیق صحت تحلیل یک مدار بسیار مفید است، ولی می‌تواند در تعیین نقش هر منبع در پاسخ نیز به ما یاری دهد. به این علت از dc parameter sweep (جاروب پارامتر dc) استفاده می‌کنیم.

در مدار مثال ۲ـ۵ خواسته شده بود تا حداکثر جریان مثبت از مقاومت، بدون تجاوز از حد مجاز را مشخص کنیم. مدار در شکل ۸ـ۵ به کمک ابزار رسم شماتیک Orcad CIS کشیده شده است. توجه کنید که برای منبع جریان مقدار معین نکرده‌ایم.



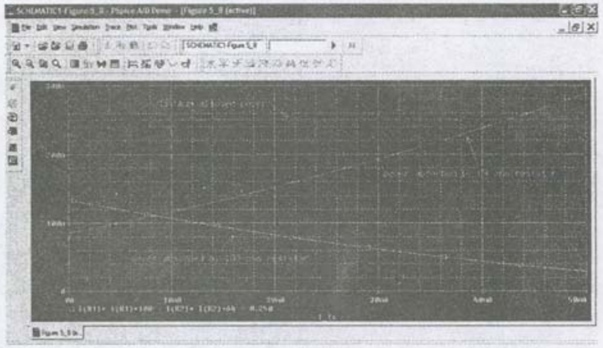
شکل ۸ـ۵ مدار مثال ۲ـ۵.



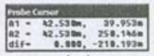
شکل ۹ـ۵ جعبه محاوره dc sweep، با I_x به‌عنوان متغیر.

پس از ورود و ذخیره شماتیک، باید پارامترهای جاروب dc را مشخص کنیم. این انتخاب اجازه می‌دهد تا گستره‌ای از مقادیر را برای یک ولتاژ یا جریان و نه یک مقدار خاص، تعیین نماییم (در این حالت منبع جریان I_x). تحت منوی Analysis، ما setup را اختیار می‌کنیم و سپس روی انتخاب DC sweep کلیک می‌نماییم. در این هنگام یک جعبه محاوره (dialog box) مانند شکل ۹ـ۵ باز می‌گردد. ابتدا "sweep variable type" را به‌عنوان current source مشخص کرده و در جعبه Name، I_x را تایپ می‌نماییم. زیر sweep type چندین گزینه دیده می‌شود: Linear، Logarithmic و Value list. گزینه آخر به ما اجازه می‌دهد تا هر مقداری را به I_x نسبت دهیم. برای ترسیم یک نمودار صاف، ما جاروب خطی (Linear) را اختیار می‌نماییم و به مقدار شروع (Start Value) مقدار صفر و به مقدار نهایی (End value) 50mA می‌دهیم که در آن نمو (increment) نیز 0.1mA است.

پس از انجام شبیه‌سازی بسته خروجی گرافیکی Probe به‌طور خودکار اجرا خواهد شد. پس از ظهور دریچه، محور افقی (متعلق به متغیر I_x) نمایش داده می‌شود، ولی محور عمودی باید انتخاب گردد. با انتخاب Add trace، از منوی Trace، روی I(R1) کلیک می‌کنیم، سپس یک علامت ستاره در جعبه Trace expression تایپ، روی I(R1) یک بار دیگر کلیک، یک ستاره دیگر وارد و بالاخره 100 را وارد می‌کنیم. این کار از probe می‌خواهد تا توان جذب‌شده به‌وسیله مقاومت 100Ω را رسم کند. به‌طریقی مشابه، فرآیند را تکرار می‌کنیم تا توان جذب‌شده به‌وسیله مقاومت 64Ω به‌دست آید و درنتیجه نموداری شبیه به شکل ۱۰ـ۵ (الف) به‌دست آید.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰ـ۵ (الف) خروجی probe با برچسب‌هایی برای شناسایی توان جذب‌شده به وسیله هر یک از مقاومت‌ها. خط افقی 250mA نیز کشیده شده است. (ب) جعبه محاوره مکان‌نما.

خط مرجع افقی در 250mW نیز با تایپ 0.250 در جعبه Trace expression ، پس از انتخاب Add trace از منوی Trace ، اضافه شده است.

می‌بینیم که نمودار مربوط به مقاومت 64Ω در نزدیکی $I = 43mA$ از 250mW تجاوز می‌کند. با این وجود، تازمانی‌که جریان منبع I_x بین 0 تا 50mA باشد، مقاومت 100Ω هرگز 250mW تلف نمی‌کند و در واقع با افزایش جریان منبع توان جذب‌شده در آن کاهش می‌یابد. اگر مایل به کسب جواب دقیق‌تری باشیم فقط کافی است ابزار مکان‌نما را به‌کاربریم. شکل ۵ـ۱۰(ب) نتیجه جابه‌جایی هر دو مکان‌نما به 42.53mA را نشان می‌دهد. درست در این میزان مقاومت 64Ω کمی از سطح توان مجازش گذشته است. دقت بهتری را با کاهش مقدار نمو در dc sweep می‌توان به‌دست آورد. این تکنیک در تحلیل مدارهای الکترونیک بسیار موثر است. در این مدارها ممکن‌است بخواهیم مقدار ولتاژ ورودی به یک مقدار تقویت‌کننده پیچیده را تعیین کنیم تا ولتاژ خروجی صفر به‌دست‌آید. البته باید متذکر شد که چند نوع دیگر پارامتر از جمله dc voltage sweep وجود دارند که می‌توان آن‌ها را اجرا کرد. امکان تغییر حرارت فقط هنگامی مفید است که با مدل قطعات وابسته به پارامتر حرارت مانند دیود و ترانزیستور سروکار داشته باشیم.

متأسفانه زمان صرفه‌جویی‌شده در اصل تجمیع، اگر وجود داشته باشد بسیار کم است، و علاوه بر آن باید حداقل دو منبع وجود داشته باشند: یکی منبع مستقل و بقیه منابع وابسته.

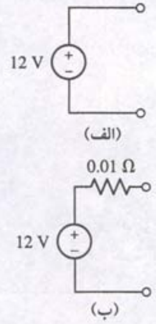
همواره باید **محدودیت‌های روش تجمیع** را درنظرداشته باشیم. این روش فقط به پاسخ‌های خطی اعمال می‌شود و بنابراین بسیاری از پاسخ‌های غیرخطی رایج را پوشش نمی‌دهد. مثلاً دو باطری 1 ولت سری‌شده با مقاومت 1Ω **را درنظربگیرید**. توان تحویلی به مقاومت، مسلماً 4W است: ولی اگر به اشتباه روش تجمیع را به‌کاربریم، هر باطری 1W توان را می‌پوشاند و بنابراین کل توان 2W خواهد شد. این پاسخ اشتباه است ولی به سادگی می‌توان چنین اشتباهی کرد.

۵ـ۲ تبدیل منابع

منابع ولتاژ واقعی

تاکنون با منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل کار می‌کردیم، و حالا وقت آن است که با ملاحظه منابع **واقعی** قدمی به سمت واقعیت برداریم. این منابع موجب می‌شوند تا دید واقع‌بینانه‌تری از وسایل‌فیزیکی داشته باشیم. با تعریف منابع **واقعی** خواهیم دید که منابع ولتاژ و جریان بدون تأثیر بقیه مدار به یکدیگر قابل تبدیل‌اند. این منابع را **معادل** می‌خوانیم. روش ما بر هر دو نوع منبع وابسته و مستقل قابل اعمال است، با این وجود خواهیم دید که این کار در مورد منبع وابسته چندان مفید نیست.

منبع ولتاژ ایده‌آل را به‌صورت منبعی تعریف کردیم که ولتاژ دوسرش مستقل از جریان آن بود. یک منبع dc ، 1V جریان 1 آمپری را از مقاومت 1Ω و جریان 1000000A را از مقاومت 1μΩ عبور می‌دهد و قادر است توان نامحدودی را تولید کند. البته در عمل چنین وسیله‌ای وجود ندارد و قبلاً نشان دادیم که یک منبع ولتاژ فیزیکی در جریان‌ها و یا توان‌های کوچک دریافتی از آن ایده‌آل است. مثلاً یک باطری ماشین می‌تواند، یک منبع ولتاژ 12Vdc ایده‌آل تصور شود، به‌شرطی‌که جریان در چند آمپر محدود باشد (شکل ۵ـ۱۱(الف)). با این وجود هر کسی متوجه شده است که در اتومبیلی که چراغ‌هایش روشن است، هنگام استارت‌زدن چراغ‌ها ضعیف می‌شوند، زیرا از باطری خواسته می‌شود که علاوه بر جریان لازم برای لامپ‌ها، حدود 100A را تحویل دهد. تحت این شرایط، یک منبع ولتاژ ایده‌آل نمایش صحیحی از یک باطری نیست.



شکل ۵ـ۱۱ (الف) یک منبع ولتاژ 12Vdc برای مدل‌سازی باطری یک اتومبیل. (ب) مدل دقیق‌تری که در آن افت ولتاژ در جریان‌های بالا لحاظ شده است.

تعریف بهتری از رفتار یک وسیله واقعی این‌است‌که در جریان‌های بالا برای ولتاژ پایانه‌ها افتی درنظرگرفته شود. اجازه بدهید که فرض کنیم باطری در جریان خروجی صفر، 12V و به ازای جریان 100A ، 11V باشد. چگونه می‌توان این رفتار را مدل‌سازی کرد. مدل دقیق‌تر این منبع می‌تواند از یک منبع ولتاژ 12V ایده‌آل، سری با مقاومتی که در جریان 100Ω ، ولتاژ 1V را در دو سر خود دارد، تشکیل شود. یک محاسبه سرانگشتی نشان می‌دهد که مقدار مقاومت $1V/100A = 0.01\Omega$ است و منبع ولتاژ ایده‌آل به همراه این مقاومت، **منبع ولتاژ واقعی** را تشکیل می‌دهد (شکل ۵ـ۱۱(ب)). بنابراین ما از ترکیب سری عناصر مدار ایده‌آل شامل یک منبع مستقل ولتاژ و یک مقاومت، یک مدل واقعی را پیاده کرده‌ایم. البته نباید انتظار داشته باشیم تا چنین ترکیبی را در باطری اتومبیل خود بیابیم. هر دستگاه واقعی با مشخصه جریان ـ ولتاژ پایانه‌هایش تعریف می‌شود، و تلاش ما باید در این راستا باشد که با ترکیب عناصر ایده‌آل مشخصه جریان ـ ولتاژ مشابهی را حداقل در یک محدوده‌ای از جریان، ولتاژ یا توان به‌دست‌آوریم. در شکل ۵ـ۱۲(الف)، مدل دو جزئی واقعی باطری را که به یک مقاومت بار R_L وصل است می‌بینیم. ولتاژ پایانه منبع واقعی برابر با ولتاژ دو سر R_L است و با V_L نشان داده شده است*. شکل ۵ـ۱۲(ب) نمودار جریان بار I_L را به‌عنوان تابعی از ولتاژ بار V_L برای این منبع واقعی نشان می‌دهد. معادله KVL برای مدار شکل ۵ـ۱۲(الف) برحسب I_L و V_L چنین است:

$$12 = 0.01I_L + V_L$$

و بنابراین

$$I_L = 1200 - 100V_L$$

این یک معادله خطی از I_L و V_L است و نمودار آن در شکل ۵ـ۱۲(ب) نیز خط مستقیمی است. هر نقطه روی خط متعلق به یک مقدار از R_L است. مثلاً، نقطه وسط خط راست وقتی به‌دست‌می‌آید که مقاومت بار برابر مقاومت داخلی منبع واقعی، یا $R_L = 0.01\Omega$ باشد. در این‌جا ولتاژ بار دقیقاً نصف ولتاژ منبع ایده‌آل است.

وقتی $R_L = \infty$ باشد و هیچ جریانی به‌وسیله بار کشیده نشود، منبع واقعی مدار باز بوده و ولتاژ پایانه، یا ولتاژ مدار باز $V_{Loc} = 12V$ می‌گردد. از طرف دیگر اگر $R_L = 0$ باشد، آن‌گاه جریان بار اتصال کوتاه $I_{Lsc} = 1200A$ می‌گردد. در عمل چنین کاری موجب تخریب باطری و تجهیزات اندازه‌گیری می‌شود.

چون نمودار I_L در برابر V_L خط مستقیمی است، بنابراین دو مقدار V_{Loc} و I_{Lsc} به تنهایی منحنی $I_L - V_L$ را معین می‌کنند.

خط بریده افقی در نمودار V_L-I_L شکل ۵ـ۱۲(ب) را برای یک منبع ولتاژ ایده‌آل نشان می‌دهد و در آن ولتاژ پایانه در ازای هر مقدار جریان بار ثابت می‌ماند. برای منبع ولتاژ واقعی، ولتاژ پایانه فقط در جریان‌های پایین مقدار نزدیک به منبع ایده‌آل دارد.

اکنون یک منبع ولتاژ واقعی کلی را مطابق شکل ۵ـ۱۳(الف) درنظربگیرید. ولتاژ منبع ایده‌آل v_s و مقاومت R_s که مقاومت درونی یا مقاومت خروجی نام دارد، با آن سری است. مجدداً ما باید توجه کنیم که مقاومت واقعاً به‌صورت یک مقاومت جداگانه وجود ندارد بلکه فقط کاهش ولتاژ را در ازای افزایش جریان موجب می‌گردد. وجود آن موجب می‌شود تا ما رفتار یک منبع ولتاژ را بهتر مدل‌سازی کنیم.

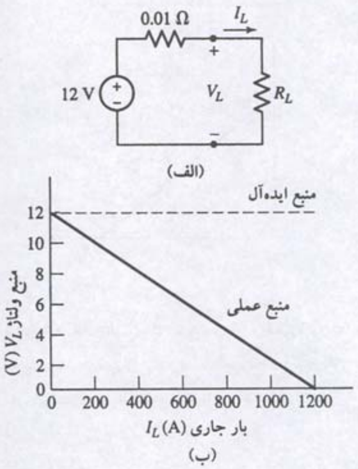
رابطه خطی بین v_L و i_L برابر است با:

$$v_L = v_s - R_s i_L \qquad (۹)$$

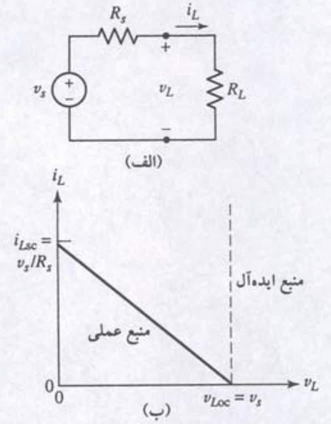
که در شکل ۵ـ۱۳(ب) ترسیم شده است. ولتاژ مدار باز ($R_L = \infty$ و بنابراین $i_L = 0$) برابر است با:

$$v_{Loc} = v_s \qquad (۱۰)$$

* از این پس کمیت‌های dc را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. حروف کوچک کمیتی متغیر با زمان ac را نشان می‌دهند. در مواردی که هم ac و هم dc صحیح است از حروف کوچک استفاده خواهد شد.



شکل ۵ـ۱۲ (الف) منبع واقعی که رفتار یک باطری اتومبیل 12V را تقریب کرده، و به مقاومت بار R_L متصل شده است. (ب) رابطه بین I_L و V_L خطی است.

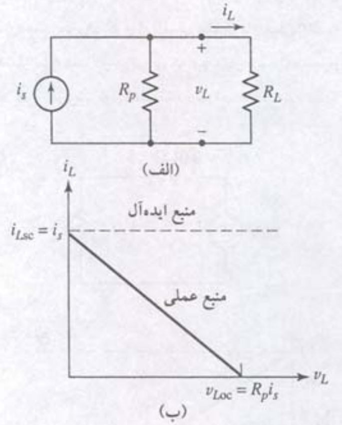


شکل ۵ـ۱۳ (الف) یک منبع ولتاژ واقعی متصل به مقاومت R_L . (ب) ولتاژ پایانه منبع ولتاژ واقعی با افزایش I_L ، کاهش می‌یابد و لذا $R_L = V_L/I_L$ کم می‌شود. ولتاژ پایانه یک منبع ولتاژ ایده‌آل در ازای هر جریان بار ثابت می‌ماند.

و جریان اتصال کوتاه ($R_L = 0$ و $V_L = 0$) برابر است با:

$$i_{Lsc} = \frac{v_s}{R_s} \quad (11)$$

مجدداً ملاحظه می‌شود که این مقادیر محل برخورد خط راست شکل ۱۳ـ۵(ب) با محورها می‌باشند و آن را کاملاً تعریف می‌کنند.



شکل ۱۴ـ۵ (الف) یک منبع جریان واقعی کلی که به یک مقاومت بار R_L وصل است. (ب) جریان بار تولیدشده با منبع جریان واقعی به‌عنوان تابعی از ولتاژ بار.

منابع جریان واقعی

در دنیای واقعی، منبع جریان ایده‌آل وجود ندارد، و نمی‌توان وسیله‌ای فیزیکی یافت که مستقل از مقاومت بار جریان ثابتی را به مداری تحویل دهد یا ولتاژ دو سر پایانه‌هایش ثابت باشد. گرچه مدارهای ترانزیستوری معینی وجود دارند که جریان ثابتی را به گستره وسیعی از مقاومت‌ها حمل می‌کنند، ولی مقاومت بار را می‌توان آنقدر بزرگ اختیار کرد که جریان آن بسیار کوچک باشد. درواقع توان بینهایت متأسفانه هرگز وجود ندارد.

یک منبع جریان واقعی به‌صورت ترکیبی از یک منبع جریان ایده‌آل موازی با یک مقاومت داخلی R_p تعریف می‌شود. چنین منبعی در شکل ۱۴ـ۵ (الف) نشان داده شده است که در آن جریان i_L و ولتاژ v_L مربوط به R_L نیز مشخص شده‌اند، با به‌کارگیری KCL داریم:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_p} \quad (12)$$

که باز هم رابطه‌ای خطی است. ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

$$v_{Loc} = R_p i_s \quad (13)$$

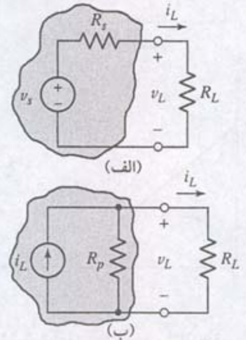
و

$$i_{Lsc} = i_s \quad (14)$$

تغییرات جریان بار و تغییر ولتاژ بار را می‌توان با تغییر مقدار R_L تحقیق کرد، شکل ۱۴ـ۵(ب). خط راست از انتهای اتصال کوتاه (شمال غربی) به مدار باز (در جنوب شرقی) با تغییر R_L از صفر تا بی‌نهایت اهم کشیده می‌شود. نقطه وسط خط در $R_L = R_p$ قرار دارد. واضح است که جریان باز i_L و جریان منبع ایده‌آل تقریباً فقط بر ی مقادیر کوچک ولتاژ بار با هم برابرند و این هنگامی صحیح است که مقاومت R_L نسبت به R_p کوچک باشد.

منابع واقعی معادل

با تعریف هر دو منبع واقعی، اکنون آماده‌ایم تا معادل‌های آن‌ها را مورد بحث قرار دهیم. دو منبع را معادل گوییم اگر بتوانند مقادیری برابر با v_L و i_L را هنگام اتصال به R_L تولید کنند. البته این‌که مقدار R_L چقدر است اهمیتی ندارد. چون $R_L = \infty$ و $R_L = 0$ دو مقاومت بار هستند، منابع معادل ولتاژ مدار باز و جریان مدار بسته یکسانی تولید خواهند کرد. به بیان دیگر، اگر دو منبع معادل ولتاژ واقعی و معادل جریان واقعی داشته باشیم، هر دو را می‌توان در داخل جعبه سیاهی تصور کرد که فقط یک جفت پایانه دارند، و در این حال به هیچ وجه با اندازه‌گیری جریان یا ولتاژ در یک بار مقاومتی نمی‌توان گفت که کدام منبع در کدام جعبه قرار گرفته است.



شکل ۱۵ـ۵ (الف) یک منبع ولتاژ واقعی متصل به بار R_L. (ب) منبع جریان واقعی معادل متصل به همان بار.

منبع ولتاژ واقعی و مقاومت R_L شکل ۱۵ـ۵ (الف) را به همراه مداری مرکب از منبع جریان واقعی و مقاومت R_L شکل ۱۵ـ۵(ب) در نظر بگیرید، محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر مقاومت بار R_L در شکل ۱۵ـ۵(الف) برابر است با:

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \quad (15)$$

محاسبه ساده دیگری نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر مقاومت بار R_L در شکل ۱۵ـ۵(ب) چنین است:

$$v_L = [i_s \frac{R_p}{R_p + R_L}] . R_L$$

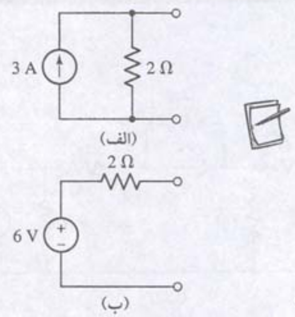
به لحاظ الکتریکی دو منبع واقعی با هم معادلند به‌شرطی‌که:

$$R_s = R_p \quad (16)$$

و

$$v_s = R_p i_s = R_s i_s \quad (17)$$

که در این‌جا به‌عنوان انتخابی مناسب، R_s را به‌عنوان مقاومت داخلی هر یک از دو مقاومت فرض می‌کنیم.



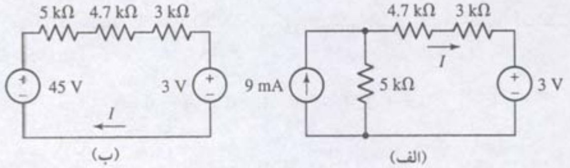
شکل ۱۶ـ۵ (الف) یک منبع جریان واقعی. (ب) منبع ولتاژ معادل واقعی.

به‌منظور شرحی بر کاربرد این ایده، منبع جریان واقعی شکل ۱۶ـ۵(الف) را در نظر بگیرید. چون مقاومت داخلی آن 2Ω است، مقاومت داخلی معادل منبع ولتاژ واقعی نیز 2Ω است. ولتاژ منبع ولتاژ ایده‌آل در منبع ولتاژ واقعی $6V = (3)(2)$ می‌باشد. این منبع ولتاژ واقعی معادل در شکل ۱۶ـ۵(ب) دیده می‌شود.

برای تست معادله، اجازه بدهید، تا مقاومت 4Ω را متصل به هر یک از دو منبع تصور کنیم. در هر دو حال جریان بار 1A ، ولتاژ بار 4V و توان مصرفی 4W را در مقاومت 4Ω ایجاد می‌نماید، با این وجود توجه کنید که منبع جریان ایده‌آل توان 12W را به مقاومت حمل می‌کند، درحالی‌که منبع ولتاژ ایده‌آل فقط 6W حمل می‌نماید. علاوه بر آن، مقاومت داخلی منبع ولتاژ واقعی فقط 8W توان را جذب می‌کند، درحالی‌که مقاومت داخلی منبع ولتاژ واقعی فقط 2W توان مصرف می‌نماید. بنابراین می‌بینیم که دو منبع واقعی فقط نسبت به آن‌چه انتقال می‌دهند معادلند و دروناً با هم معادل نیستند!

مثال ۴ـ۵

جریان داخل مقاومت 4.7kΩ را در شکل ۱۷ـ۵ (الف) پس از تبدیل منبع 9mA به معادل منبع ولتاژ محاسبه کنید.



شکل ۱۷ـ۵ (الف) مداری با هر دو نوع منبع ولتاژ و جریان. (ب) مدار پس از تبدیل منبع جریان به یک منبع ولتاژ معادل.

منبع معادل از یک منبع ولتاژ مستقل $(9mA) \times (5k\Omega) = 45V$ سری با یک مقاومت 5kΩ تشکیل شده است، شکل (۱۷ـ۵(ب)).

معادله KVL حول حلقه را می‌نویسیم:

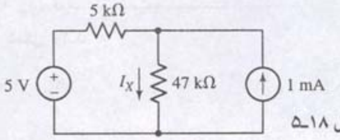
$$-45 + 5000I + 4700I + 3000I + 3 = 0$$

که به راحتی قابل حل بوده و جریان $I = 3.307mA$ از آن حاصل می‌گردد.

تمرین

۵ـ۳ برای مدار شکل ۱۸ـ۵ جریان I_x در مقاومت 47kΩ را پس از اجرای تبدیل منبع ولتاژ به‌دست‌آورید.

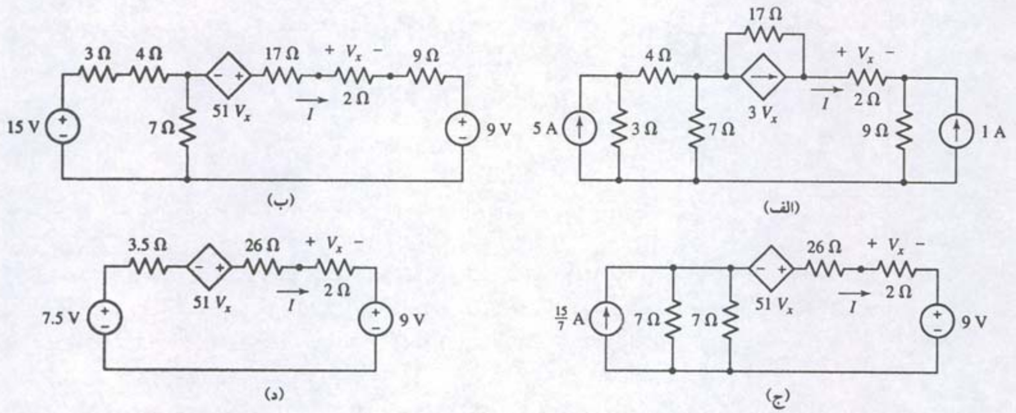
جواب: $192\mu A$



شکل ۱۸ـ۵

مثال ۵ـ۵

با استفاده از تبدیل منبع، جریان عبوری از مقاومت 2Ω در شکل ۵ـ۱۹ (الف) را محاسبه نمایید.



شکل ۵ـ۱۹ (الف) مداری با دو منبع جریان مستقل و یک منبع وابسته. (ب) مدار پس از تبدیل هر منبع به یک منبع ولتاژ. (ج) منبع پس از ادغام بیشتر. (د) مدار نهایی.

حل را با تبدیل هر منبع جریان به منبع ولتاژ (شکل ۵ـ۱۵(ب)) آغاز می‌کنیم و هدف از این کار تبدیل مدار به یک حلقه ساده است.

به دو دلیل باید مراقب باشیم تا مقاومت 2Ω در مدار نگهداری شود: یکی این‌که متغیر کنترل منبع وابسته در دو سر آن ظاهر می‌گردد و دوم می‌خواهیم جریان داخل آن را بیابیم. معهذا می‌توان مقاومت‌های 17Ω و 9Ω را با هم ترکیب کرد، زیرا با هم سری‌اند. همچنین می‌توان مقاومت‌های 3Ω و 4Ω را با هم ترکیب کرده و مقاومت 7Ω را به‌دست‌آورد. سپس در تبدیل منبع 15V به منبع 15/7A طبق شکل ۵ـ۱۹(ج) از آن استفاده می‌شود.

در آخرین گام ساده‌سازی می‌بینیم که می‌توان دو مقاومت 7Ω را با هم ترکیب کرده و به یک مقاومت 3.5Ω تبدیل نمود، و سپس به کمک آن منبع جریان 15/7A به منبع ولتاژ 7.5V تبدیل می‌گردد. حاصل کار مدار تک‌حلقه شکل ۵ـ۱۹(د) است. اکنون جریان I با استفاده از KVL به‌دست‌می‌آید:

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

که

$$V_x = 2I$$

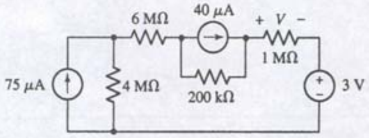
بنابراین

$$I = 21.28\text{mA}$$

تمرین

۵ـ۴ برای مدار شکل ۵ـ۲۰، ولتاژ V را در دو سر مقاومت 1MΩ با تبدیلات متوالی منبع به‌دست‌آورید.

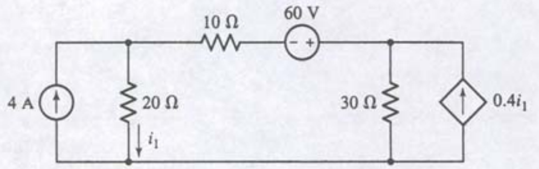
جواب: 27.23V



شکل ۵ـ۲۰

چند نکته کلیدی

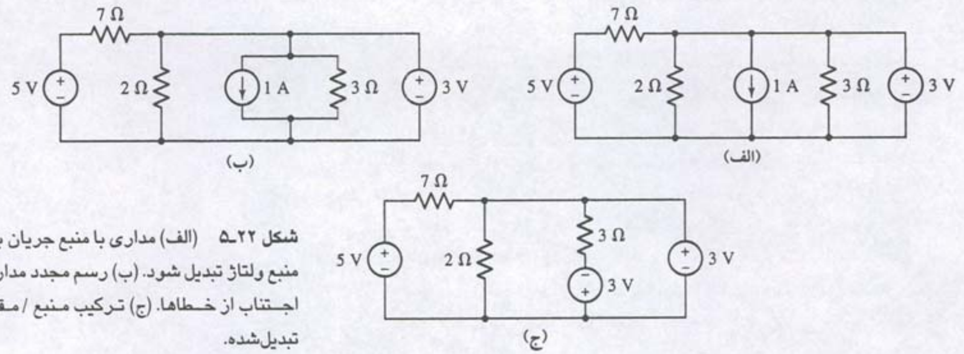
ما از منابع واقعی و تبدیل منابع با چند مشاهده خاص چنین جمع‌بندی می‌کنیم. اول، وقتی ما یک منبع ولتاژ را تبدیل می‌کنیم، باید مطمئن باشیم که منبع با مقاومت تحت بررسی سری است. مثلاً در شکل ۵ـ۲۱، تبدیل منبع ولتاژ با استفاده از مقاومت 10 Ω پذیرفته است، زیرا آن‌ها سری هستند. با این وجود این درست نیست که با منبع ولتاژ 60 V و مقاومت 30 Ω عمل تبدیل صورت گیرد و این خطایی است که به دفعات رخ می‌دهد.



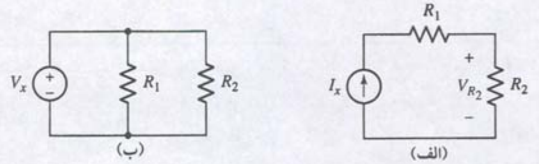
شکل ۵ـ۲۱ مدار نمونه‌ای که نشان می‌دهد تبدیل منبع چگونه می‌تواند تعیین شود.

به طریقی مشابه وقتی منبع جریانی را با ترکیبی از مقاومت تبدیل می‌کنیم باید مطمئن باشیم که آن‌ها موازی‌اند. منبع جریان شکل ۵ـ۲۲ (الف) را درنظربگیرید. ما می‌توانیم تبدیل منبع جریانی را با مقاومت Ω 3 انجام دهیم چون آن‌ها موازی‌اند. اما پس از تبدیل ممکن‌است این ابهام پیش آید که مقاومت را کجا بگذاریم. در این مواقع بهتر است تا قطعات تبدیل شونده را مطابق شکل ۵ـ۲۲ (ب) دوباره ترسیم نماییم. آنگاه تبدیل به یک منبع ولتاژ با استقرار صحیح مقاومت طبق شکل ۵ـ۲۲ (ج) را انجام می‌دهیم. البته مقاومت می‌تواند بالا یا پایین منبع ولتاژ باشد.

همچنین بررسی حالت غیرعادی سری‌بودن منبع جریان با یک مقاومت و دوگان آن ارزشمند است. بگذارید با مدار ساده شکل ۵ـ۲۳ (الف) شروع کنیم که در آن ما علاقمند به ولتاژ دو سر مقاومت R_2 هستیم. توجه داریم که جدا از مقدار R_1، $V_{R_2} = I_x R_2$ است. گرچه ممکن‌است تلاش در تبدیل نامناسب منبع در چنین مداری بکنیم، در واقع ممکن‌است به سادگی R_1 را چشم‌پوشی کنیم (با این شرط که مورد توجه ما نباشد). وضع مشابهی هنگامی رخ می‌دهد که منبع ولتاژ موازی مقاومتی باشد (شکل ۵ـ۲۳(ب)). دوباره اگر ما فقط به کمیتی مربوط به R_2 علاقمند باشیم، ممکن‌است خود را درگیر با نوعی تبدیل منبع روی منبع ولتاژ و مقاومت R_1 ببینیم. در واقعیت ما ممکن‌است تا جایی که R_2 مورد توجه است، از مقاومت R_1 چشم بپوشیم ـ یعنی وجود آن تغییر در ولتاژ دو سر R_2 یا جریان درون آن و یا توان تلف‌شده به وسیله آن را نخواهد داشت.



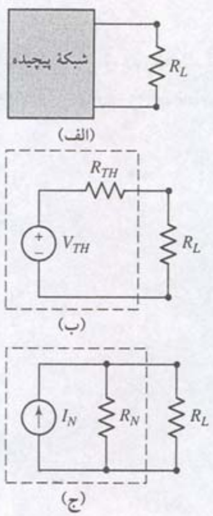
شکل ۵ـ۲۲ (الف) مداری با منبع جریان باید به منبع ولتاژ تبدیل شود. (ب) رسم مجدد مدار برای اجتناب از خطاها. (ج) ترکیب منبع / مقاومت تبدیل‌شده.



شکل ۵ـ۲۳ (الف) مدار با یک مقاومت سری با منبع جریان. (ب) منبع ولتاژ موازی با دو مقاومت.

خلاصه تبدیل منبع

1. **هدف رایج در تبدیل منبع داشتن فقط منبع جریان یا فقط منبع ولتاژ در مدار است.** خصوصاً اگر روش تحلیل مدار تحلیل گرهی یا تحلیل مش باشد، روشن و ساده‌تر خواهد بود.
2. **تکرار تبدیل منبع می‌تواند برای ساده‌سازی مدار و نهایتاً ترکیب منابع و مقاومت‌ها استفاده شود.**
3. **مقدار مقاومت در حین یک انتقال منبع تغییر نمی‌یابد ولی همان مقاومت نیست (در همان مکان نیست).** این بدان معنی است که جریان‌ها و ولتاژهای مربوط به مقاومت اصلی به‌طور غیرقابل برگشتی وقتی که تبدیل منبع انجام می‌شود از دست می‌روند.
4. **اگر ولتاژ یا جریان مربوط به یک مقاومت خاص به صورت متغیر کنترل‌کننده برای منبع وابسته عمل می‌نماید، نباید در هیچ تبدیل منبعی نقش داشته باشد.** مقاومت اولیه باید در مدار نهایی حفظ شود و دست نخورد.
5. **اگر ولتاژ یا جریان یک عنصر خاص موردنظر است، آن عنصر نباید در تبدیل منبع شرکت داشته باشد.** عنصر اصلی باید در مدار نهایی دست‌نخورده بماند.
6. **در یک تبدیل منبع، نوک پیکان منبع جریان مربوط به پایانه «+» منبع ولتاژ است.**
7. **یک تبدیل منبع روی یک منبع جریان و مقاومت لازم دارد که دو عنصر موازی باشند.**
8. **یک تبدیل منبع روی یک منبع ولتاژ و مقاومت لازم دارد که دو عنصر سری باشند.**



شکل ۵ـ۲۴ (الف) یک شبکه پیچیده با مقاومت بار R_L. (ب) یک شبکه معادل تونن متصل به مقاومت R_L. (ج) شبکه معادل نورتن متصل به مقاومت R_L.

۵ـ۳ مدارهای معادل تونن و نورتن

اکنون که تبدیل منبع و اصل تجمیع را معرفی کردیم، دو تکنیک دیگر را بیان می‌کنیم تا به‌طور گسترده در تحلیل مدارهای خطی به‌کار روند. اولین تکنیک به‌نام مهندس فرانسوی ام.ال تونن[1] که در زمینه تلگراف کار می‌کرد و در سال ۱۸۸۳ طی مقاله‌ای تئوری را به‌چاپ رساند، خوانده شده است. تکنیک دوم نتیجه‌ای از اولی است و به‌نام دانشمند آزمایشگاه تلفن بل، ای.ال. نورتن[2] نامیده شده است.

اکنون فرض کنید فقط به تحلیل بخشی از مدار علاقمندیم. مثلاً، بخواهیم جریان، ولتاژ و توان انتقالی به یک بار مقاومتی را توسط بقیه مدار معین کنیم. بقیه مدار می‌تواند از مقاومت‌ها و منابع تشکیل شده باشد (شکل ۵ـ۲۴ (الف)). یا شاید بخواهیم پاسخ را برای مقادیر متفاوت مقاومت به‌دست‌آوریم. قضیه تونن می‌گوید که می‌توان همه چیز، به‌جز مقاومت بار را، با یک منبع ولتاژ مستقل سری‌شده با یک مقاومت جایگزین کرد (شکل ۵ـ۲۴(ب)).

در این تبدیل پاسخ اندازه‌گیری‌شده در مقاومت بدون تغییر باقی می‌ماند. با استفاده از قضیه نورتن، مدار معادلی متشکل از یک منبع جریان مستقل موازی با یک مقاومت، حاصل می‌گردد (شکل ۵ـ۲۴(ج)).

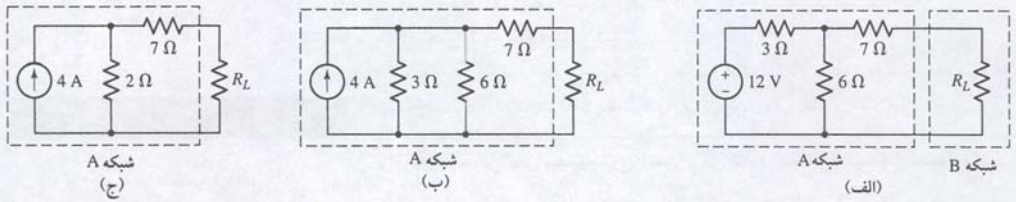
بنابراین واضح است که یکی از کاربردهای قضایای نورتن و تونن جایگزینی بخش عمده‌ای از مدار، یعنی بخش پیچیده و نامطلوب با معادل بسیار ساده آن است. مدار جدید و ساده اجازه می‌دهد تا محاسبات ولتاژ، جریان و توان انتقالی به بار از مدار اصلی به سادگی محاسبه گردد. همچنین این مدار معادل، ما را در انتخاب مناسب‌ترین مقاومت کمک می‌کند. مثلاً در یک مدار ترانزیستوری، معادل تونن و نورتن ما را قادر می‌سازد تا حداکثر توان دریافتی از تقویت‌کننده و انتقالی به بلندگو تعیین شود.

مثال ۵ـ۶

در مدار شکل ۵ـ۲۵ (الف)، معادل‌های تونن و نورتن را برای بخش سمت چپ R_L معین کنید.

نواحی خط‌چین، شبکه را به بخش‌های A و B تفکیک می‌کنند. فرض می‌کنیم شبکه B که تنها از مقاومت بار R_L تشکیل شده، مورد توجه ما باشد. شبکه A با تکرار تبدیل منبع و جایگزینی آن با یک منبع جریان واقعی 4A، موازی با مقاومت 3Ω، ساده می‌گردد (شکل ۵ـ۲۵(ب)).

1. M.L.Thevenin 2. E.L.Norton

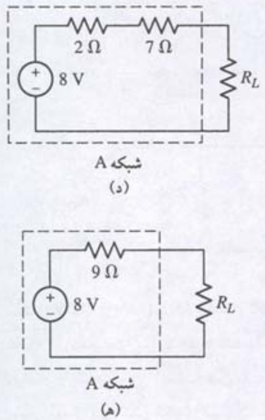


آنگاه، مقاومت‌های موازی با هم ترکیب شده و از آن مقاومت 2Ω حاصل می‌شود (شکل ۵ـ۲۵(ج)) و منبع جریان واقعی حاصل از تبدیل نیز به منبع ولتاژ واقعی بازگردانده می‌شود (شکل ۵ـ۲۵(د)). نتیجه نهایی در شکل ۵ـ۲۵(ه) دیده می‌شود.

از دید مقاومت بار R_L، این مدار (معادل تونن) معادل است با مدار اصلی، و از دید ما، مدار بسیار ساده‌تر می‌باشد، و ما می‌توانیم به راحتی توان انتقالی به بار را محاسبه کنیم:

$$P_L = \left(\frac{8}{9 + R_L}\right)^2 R_L$$

علاوه بر آن از مدار معادل می‌بینیم که حداکثر ولتاژ حاصل در دو سر R_L برابر 8V است که مربوط به $R_L = \infty$ می‌باشد. تبدیل سریع شبکه A به منبع جریان واقعی (معادل نورتن) بیان می‌دارد که حداکثر جریان انتقالی به بار، 8/9A است و در $R_L = 0$ رخ می‌دهد. هیچ‌یک از این واقعیت‌ها به راحتی در مدار اصلی آشکار نیست.

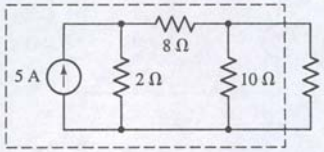


شکل ۵ـ۲۵ (الف) مداری که به دو بخش تقسیم شده است. (ب) تا (د) مراحل میانی ساده‌سازی شبکه. (ه) مدار معادل تونن.

تمرین

۵ـ۵ با روش تکرار تبدیل منبع، معادل نورتن داخل بخش خط‌چین شکل ۵ـ۲۶ را به‌دست‌آورید.

جواب: 1A و 5Ω.



شکل ۵ـ۲۶

قضیه تونن

استفاده از تبدیل منبع برای یافتن شبکه معادل تونن یا نورتن به خوبی در مثال ۵ـ۶ کار کرد، ولی به سرعت می‌تواند در مواردی که منابع وابسته وجود دارند یا مدار مرکب از تعداد زیادی عنصر باشد، غیر عملی گردد. روشی دیگر استفاده از تئوری یا قضیه تونن (یا نورتن) است. ما قضیه را به نحوی به صورت رویه‌ای اسلوب‌دار بیان می‌کنیم تا روش طبق وضعیتی که با آن مواجه می‌شود عملی‌تر گردد.

قضیه تونن*

1. **با داشتن هر مدار خطی، آن را دوباره مرتب کنید تا به فرم دو شبکه A و B درآمده و به وسیله دو سیم مرتب گردد.** A شبکه‌ای است که باید ساده شود و B دست‌نخورده می‌ماند.
2. **شبکه B را جدا کنید.** ولتاژ v_{oc} را به عنوان ولتاژی که اکنون در دو سر پایانه‌های شبکه A ظاهر می‌گردد تعریف نمایید.
3. **هر منبع مستقل را در شبکه A خاموش (حذف) نمایید تا یک شبکه غیرفعال حاصل شود.** منابع وابسته را به همان شکل رها کنید.
4. **یک منبع ولتاژ مستقل با مقدار v_{oc} را با شبکه غیرفعال سری کنید.** مدار را کامل نبندید. دو پایانه را غیرمتصل رها کنید.
5. **شبکه B را به پایانه‌های شبکه A جدید وصل نمایید.** همه جریان‌ها و ولتاژها در B دست‌نخورده می‌مانند.

* اثبات قضیه تونن چون طولانی است در پیوست (۳) قرار داده شده است تا دانشجویان علاقمند به آن مراجعه نمایند.

توجه کنید که اگر هر قسمت از شبکه دارای منبع وابسته باشد، متغیر کنترل آن باید در همان بخش شبکه منبع وابسته باشد.

بگذارید ببینیم که آیا قضیه تونن را می‌توان به مدار شکل ۲۵ـ۵ با موفقیت اعمال نمود. ما معادل سمت چپ R_L را در مثال ۶ـ۵ ملاحظه کردیم، ولی مایلیم با روشی ساده‌تر همان حل را به‌دست‌آوریم.

مثال ۷ـ۵

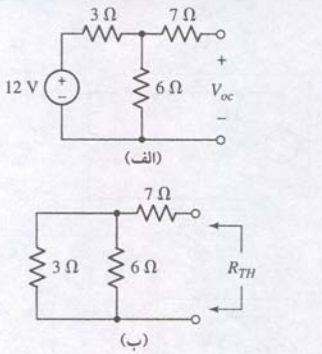
برای تعیین معادل تونن سمت چپ R_L مدار شکل ۲۵ـ۵ (الف) از قضیه تونن استفاده کنید.

کار را با قطع R_L و توجه به این نکته که جریانی از مقاومت 7Ω در مدار شکل ۲۷ـ۵ (الف) عبور نمی‌کند آغاز می‌کنیم. بنابراین V_{oc} در دو سر مقاومت 6Ω افت می‌کند (وقتی از مقاومت 7Ω جریانی نگذرد، افت ولتاژی هم در آن نداریم). پس با تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_{oc} = 12(\frac{6}{3 + 6}) = 8V$$

با کشتن شبکه A یعنی جایگزینی منبع 12V با یک مدار اتصال کوتاه، می‌بینیم که در شبکه مرده مقاومت 7Ω با ترکیب موازی مقاومت‌های 6Ω و 3Ω به‌طور سری بسته شده است (شکل ۲۷ـ۵ (ب)).

بنابراین، شبکه مرده قابل نمایش با یک مقاومت 9Ω با نام **مقاومت معادل تونن شبکه A** می‌باشد. پس معادل تونن برابر v_{oc} سری شده با مقاومت 9Ω بوده و با نتیجه قبلی ما وفاق دارد.

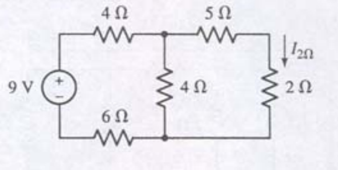


شکل ۲۷ـ۵ (الف) مدار شکل ۲۵ـ۵ (الف) با شبکه B (مقاومت R_L) که قطع شده است و ولتاژ دو سر پایانه‌ها با V_{oc} مشخص شده است. (ب) منبع متصل در شکل ۲۵ـ۵ (الف) کشته شده و ما به پایانه‌ای نگاه می‌کنیم که شبکه B برای تعیین مقاومت موثر شبکه A به آن وصل شده است.

تمرین

۶ـ۵ به‌وسیله قضیه تونن جریان درون مقاومت 2Ω را در مدار شکل ۲۸ـ۵ بیابید (راهنمایی: مقاومت 2Ω را به‌عنوان بخش B درنظربگیرید).

جواب: $V_{TH} = 2.571V$ ، $R_{TH} = 7.857\Omega$ و $I_{2\Omega} = 260.8mA$



شکل ۲۸ـ۵

چند نکته کلیدی

مدار معادلی که چگونگی به‌دست‌آوردن آن را آموختیم کلاً از شبکه B مستقل است، زیرا ابتدا شبکه B را حذف کردیم سپس ولتاژ مدار باز تولیدی به‌وسیله شبکه A را به هر طریقی به‌دست‌آوردیم. شبکه B را به این خاطر ذکر کردیم که بگوییم فرقی نمی‌کند چه شبکه‌ای به دو سر شبکه A متصل است. شبکه B بیانگر این شبکه کلی است.

نکاتی چند در مورد این قضیه وجود دارد که ذکر آن‌ها ارزشمند است:

- تنها محدودیت اعمال‌شده در A یا B این‌است‌که همه منابع وابسته در A (یا B) متغیرهای کنترلی را نیز در همان سمت A (یا B) دارند.
- در مورد پیچیدگی A یا B هیچ محدودیتی موجود نیست. هر یک از آن‌ها ممکن‌است هر ترکیبی از منابع ولتاژ یا جریان مستقل، منابع جریان یا ولتاژ وابسته خطی، مقاومت یا هر عنصری که خطی باشد را دارا باشند.
- شبکه مرده A را می‌توان با یک مقاومت R_{TH} که آن را مقاومت تونن می‌خوانیم نمایش داد. وجود منابع وابسته یا عدم وجود آن‌ها در شبکه مرده A اهمیتی ندارد.
- معادل تونن از دو مولفه تشکیل شده است: یک منبع ولتاژ سری با یک مقاومت. هر یک از آن‌ها ممکن‌است صفر هم باشد ولی معمولاً این چنین نیست.

قضیه نورتن

قضیه نورتن مفهوم نزدیکی به قضیه تونن دارد و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

نورتن

۱. **هر مدار خطی مفروض را دوباره به صورت دو شبکه A و B مرتب کنید که با دو سیم به هم وصل شده باشند.** A شبکه‌ای است که قرار است ساده شود؛ B دست‌نخورده می‌ماند. مثل قبل، اگر هر یک از دو شبکه حاوی منبع وابسته باشد، متغیر کنترل‌کننده آن باید در همان شبکه باشد.

۲. **شبکه B را قطع کنید و پایانه‌های A را اتصال کوتاه نمایید.** یک جریان i_{sc} را به‌عنوان جریانی که اکنون از پایانه‌های اتصال کوتاه‌شده A می‌گذرد، تعریف نمایید.

۳. **منابع مستقل را در شبکه خاموش (صفر یا حذف) نمایید تا یک شبکه غیرفعال حاصل شود.** منابع وابسته را دست‌نخورده بگذارید.

۴. **منبع جریان مستقل با مقدار i_{sc} را موازی با شبکه غیرفعال وصل کنید.** مدار را کامل نکنید. دو پایانه آزاد رها شود.

۵. **شبکه B را به پایانه‌های جدید شبکه A وصل کنید.**

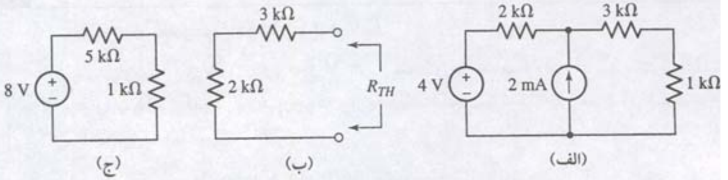
معادل نورتن یک شبکه خطی برابر است با منبع جریان i_{sc} که با مقاومت R_{TH} موازی شده باشد. بنابراین ملاحظه می‌شود که می‌توان معادل نورتن شبکه را از تبدیل معادل تونن هم به‌دست‌آورد. حاصل این عمل رابطه مستقیم بین v_{oc}، i_{sc} و R_{TH} است.

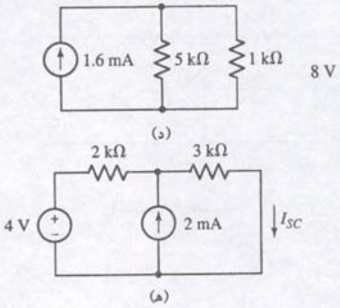
$$v_{oc} = R_{TH} i_{sc} \qquad (18)$$

در مدارهای مقاومتی با منابع وابسته، اغلب می‌بینیم که در تعیین معادل تونن یا نورتن بهتر است که هم ولتاژ مدار باز و هم جریان اتصال کوتاه را پیدا کنیم و R_{TH} را از تقسیم این دو مقدار به‌دست‌آوریم. بنابراین توصیه می‌شود در هنگام یافتن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه، حتی در مسائل ساده بعدی مهارت لازم را کسب نمایید. اگر معادل‌های تونن و نورتن مستقیماً به‌دست‌آمدند رابطه (۱۸) برای تست بسیار مفید است. اکنون سه مثال متفاوت را برای تعیین مدار معادل تونن یا نورتن ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۸ـ۵

مدارهای معادل تونن و نورتن شبکه‌ای را که در شکل ۲۹ـ۵ (الف) به مقاومت $1k\Omega$ وصل است بیابید.





شکل ۲۹ـ۵ (الف) مدار مفروضی که در آن مقاومت $1k\Omega$ به‌عنوان شبکه B است. (ب) شبکه A با همه منابع کشته‌شده. (ج) معادل تونن در شبکه A نشان داده شده است. (د) معادل نورتن برای شبکه A. (ه) مداری برای تعیین I_{sc}.

با توجه به صورت مسئله می‌بینیم که شبکه B یک مقاومت $1k\Omega$، و شبکه A بقیه مدار است. مدار فاقد منابع وابسته است و ساده‌ترین راه یافتن معادل تونن، یافتن مستقیم R_{TH} برای شبکه مرده و به دنبال آن محاسبه v_{oc} یا i_{sc} است.

ابتدا ولتاژ مدار باز را به‌دست‌می‌آوریم. در این مسئله یافتن آن از راه تجمیع ساده‌تر می‌باشد. اگر فقط منبع 4V کار کند، ولتاژ مدار باز 4V است. اگر فقط منبع 2A روشن باشد ولتاژ مدار باز $2mA \times 2k\Omega = 4V$ خواهد شد. به‌هنگام قطع مقاومت $1k\Omega$، هیچ جریانی از مقاومت $3k\Omega$ عبور نمی‌کند. اگر هر دو منبع مستقل روشن فرض شوند داریم: $v_{oc} = 4 + 4 = 8V$.

سپس هر دو منبع مستقل را می‌کشیم تا شبکه مرده A به‌دست‌آید. به این ترتیب با اتصال کوتاه‌شدن منبع ولتاژ 4V و قطع منبع جریان 2mA، طبق شکل ۲۹ـ۵ (ب) دو مقاومت $2k\Omega$ و $3k\Omega$ به‌صورت سری درمی‌آیند و معادل آن‌ها مقاومت $5k\Omega$ است.

• اگر مقاومت‌ها به kΩ باشند، و ولتاژ به ولت، آن‌گاه به‌طور خودکار جریان به mA است.

به‌این‌ترتیب معادل تونن مدار مطابق شکل ۵ـ۲۹ (ج) به‌دست‌می‌آید و از آن نیز می‌توان سریعاً معادل نورتن شکل ۵ـ۲۹ (د) را تعیین نمود. به منظور تست، اجازه بدهید I_{sc} را برای مدار مفروض شکل ۵ـ۲۹ (و) به‌دست‌آوریم. از روش تجمیع و کمی تقسیم جریان استفاده می‌کنیم:

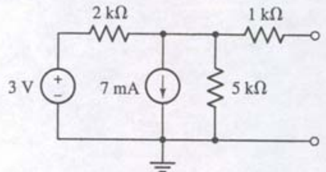
$$I_{sc} = I_{sc}\Big|_{4V} + I_{sc}\Big|_{2mA} = \frac{4}{2+3} + (2)\,\frac{2}{2+3} = 0.8 + 0.8 = 1.6\text{mA}$$

که صحت پاسخ را نشان می‌دهد*.

تمرین

۵ـ۷ معادل‌های تونن و نورتن مدار شکل ۵ـ۳۰ را معین کنید.

جواب: -7.857 V، -3.235 mA، و 2.429 kΩ.

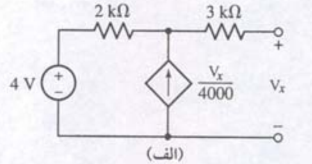


شکل ۵ـ۳۰

چه وقت منابع وابسته وجود دارند

فنی‌تر صحبت کنیم، همیشه برای ما یک "شبکه B" وجود ندارد تا ما قضیه تونن یا نورتن را برای آن به‌کار ببریم؛ در عوض می‌توانیم مدار معادلی از یک شبکه با دو پایانه را جست‌وجو کنیم که هنوز به شبکه دیگری وصل نیست. به‌هرحال اگر یک شبکه مانند B وجود داشته باشد که ما نمی‌خواهیم آن را در روند ساده‌سازی دخالت دهیم، ما باید اگر حاوی منابع وابسته است، کمی احتیاط را رعایت کنیم. در این‌گونه وضعیت‌ها، متغیر کنترل‌کننده یا عنصر مربوطه باید در شبکه B لحاظ شده و از شبکه A جدا شوند. در غیر این‌صورت راهی برای تحلیل مدار نهایی وجود ندارد زیرا کمیت منبع کنترل‌کننده از دست می‌رود.

اگر شبکه A حاوی منبع وابسته باشد، آنگاه دوباره ما باید مطمئن شویم که متغیر کنترل‌کننده و عنصر یا عناصر مربوط به آن نمی‌توانند در شبکه B باشند. تا این‌جا، ما فقط مدارهایی را ملاحظه کردیم که مقاومت‌ها و منابع مستقل داشتند. هر چند تکنیکی بگوییم رهاکردن یک منبع به صورت "مرده" یا "غیرفعال" هنگام ایجاد یک معادل تونن یا نورتن صحیح است، در عمل هیچ ساده‌سازی صورت نمی‌گیرد. چیزی که ما می‌خواهیم منبع ولتاژ مستقلی است که با یک مقاومت سری باشد، و یا منبع جریان مستقلی که با یک مقاومت تنها موازی شود ـ به بیان دیگر، یک معادل دو قطعه‌ای را نیاز داریم. در مثال‌های زیر ما معانی کاهش شبکه‌ها را با منابع وابسته و مقاومت‌ها به صورت یک مقاومت تنها ملاحظه می‌کنیم.



شکل ۵ـ۳۱ (الف) شبکه مفروضی که در آن معادل تونن موردنظر است.

مثال ۵ـ۹

مطلوبست معادل تونن در شکل ۵ـ۳۱ (الف).

برای یافتن V_{oc}، می‌بینیم که $v_x = V_{oc}$ است و جریان منبع وابسته هم باید از مسیر مقاومت 2kΩ بگذرد زیرا هیچ جریانی از مقاومت 3kΩ نمی‌تواند عبور نماید. با استفاده از KVL حول حلقه بیرونی داریم:

$$-4 + 2\times10^3\left(-\frac{v_x}{4000}\right) + 3\times10^3(0) + v_x = 0$$

و

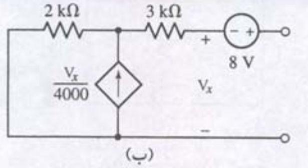
$$v_x = 8\text{V} = V_{oc}$$

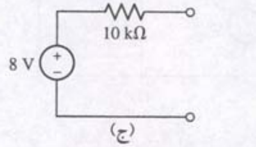
سپس به‌کمک قضیه تونن، می‌توان مدار معادل را با شبکه مرده A که طبق شکل ۵ـ۳۱ (ب) به منبع 8V سری شده است، به‌دست‌آورد. البته بیان این مطلب صحیح است ولی چندان ساده و مفید نیست. در شبکه‌های مقاومتی خطی، مطمئناً معادل ساده‌تری مثل R_{TH}، برای شبکه A می‌توان به‌دست‌آورد.

وجود مدار وابسته مانع از این می‌شود تا R_{TH} را مستقیماً از ترکیب مقاومت در شبکه غیرفعال به‌دست‌آوریم. پس از اتصال کوتاه پایانه‌های خروجی در شکل ۵ـ۳۱ (الف) واضح است که $v_x = 0$ و جریان منبع وابسته صفر است. بنابراین $I_{sc} = 4/(5\times10^3) = 0.8\text{mA}$ خواهد شد. به این ترتیب:

$$R_{TH} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{8}{(0.8\times10^3)} = 10\text{k}\Omega$$

و لذا معادل تونن در شکل ۵ـ۳۱ (ج) به‌دست آمده است.



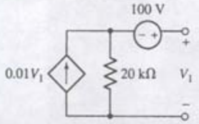


شکل ۵ـ۳۱ (ب) فرم ممکن ولی بدون استفاده معادل تونن. (ج) بهترین معادل تونن برای این شبکه مقاومتی خطی.

تمرین

۵ـ۸ معادل تونن را برای شبکه ۵ـ۳۲ به‌دست‌آورید (راهنمایی: تبدیل سریع روی منبع وابسته می‌تواند کارساز باشد).

جواب: -502.5mV و $-100.5Ω$.



شکل ۵ـ۳۲

به‌عنوان آخرین مثال، شبکه‌ای که فقط منبع وابسته دارد را ملاحظه می‌نماییم.

مثال ۵ـ۱۰

معادل تونن مدار شکل ۵ـ۳۳ (الف) را به‌دست‌آورید.

چون پایانه‌های سمت راست مدار قبلاً باز بوده‌اند، $i = 0$ است. درنتیجه، منبع وابسته مرده است، و لذا $v_{oc} = 0$ خواهد بود.

اکنون به جست‌وجوی مقدار R_{TH} که نمایشگر شبکه دو پایانه است می‌پردازیم. با این وجود نمی‌توانیم v_{oc} و i_{sc} را یافته و حاصل تقسیم آن‌ها را بیابیم، زیرا مدار فاقد منبع مستقل است و v_{oc} و i_{sc} هر دو صفرند. بنابراین باید حقه‌ای سوار کنیم.

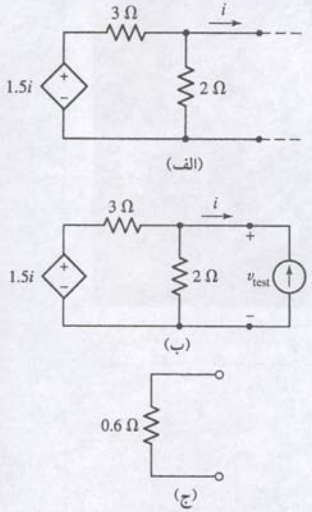
از خارج مدار یک منبع 1A به آن وصل می‌کنیم، و ولتاژ v_{test} حاصل را اندازه می‌گیریم و سپس $R_{TH} = v_{test}/1$ را به‌دست‌می‌آوریم. با مراجعه به شکل ۵ـ۳۳ (ب)، می‌بینیم که $i = -1$A است. با تحلیل گره داریم:

$$\frac{v_{test} - 1.5(-1)}{3} + \frac{v_{test}}{2} = 1$$

پس

$$v_{test} = 0.6\text{V}$$

و بنابراین $R_{TH} = 0.6\Omega$. معادل تونن در شکل ۵ـ۳۳ (ج) نشان داده شده است.



شکل ۵ـ۳۳ (الف) شبکه بدون منبع مستقل و (ب) روشی برای تهیه R_{th}. (ج) معادل تونن برای مدار اصلی.

خلاصه‌ای از روش‌های به‌کاررفته

اکنون سه مثالی را بررسی می‌کنیم که برای آن‌ها معادل تونن و نورتن را به‌دست‌آوردیم. اولین مثال (شکل ۵ـ۲۹) فقط منابع مستقل و مقاومت داشت و می‌توانستیم چند روش مختلف را به آن اعمال نماییم. در تحلیل آن می‌باید R_{TH} را برای شبکه مرده و v_{oc} را برای شبکه روشن یا زنده حساب کنیم. همچنین می‌توانستیم R_{TH}، I_{sc}، یا v_{oc} و I_{sc} را به‌دست‌آوریم.

کاربرد عملی

مولتی‌متر دیجیتال

یکی از رایج‌ترین وسایل تست الکتریکی در آزمایشگاه، DMM یا مولتی‌متر دیجیتال است (شکل ۵ـ۳۴)، که برای اندازه‌گیری ولتاژ، جریان و مقاومت طراحی شده است.

برای اندازه‌گیری ولتاژ، دو سیم از DMM به دو طرف عنصر مداری (شکل ۵ـ۳۵) وصل می‌شود. یک پایانه معمولاً با "V/Ω" مشخص می‌شود که مثبت است و پایانه دیگر معمولاً با علامت زمین مشخص می‌گردد. در این نوع اندازه‌گیری هیچ توانی از DMM به مدار منتقل نمی‌شود.

با توجه به بحث معادل‌های تونن و نورتن قبلی، واضح است که DMM دارای مقاومت تونن خاص خود است. این مقاومت معادل تونن موازی با مدار خواهد بود و مقدار آن ممکن است بر مقادیر اندازه‌گیری R_{DMM} تأثیر بگذارد (شکل ۵ـ۳۶).

مقاومت ورودی یک DMM حدود 10MΩ یا بیشتر است. بنابراین ولتاژ اندازه‌گیری شده V در دو سر 1kΩ $\|$ 10MΩ = 999.9Ω ظاهر می‌گردد. با استفاده از تقسیم ولتاژ درمی‌یابیم که V = 4.4998 ولت است، که کمی کمتراز مقدار مورد انتظار 4.5 ولت می‌باشد. بنابراین مقدار مقاومت معین ولت‌متر خطایی جزیی را در مقدار اندازه‌گیری‌شده ایجاد می‌نماید.

برای اندازه‌گیری جریان، DMM باید با یک عنصر از مدار سری باشد و عموماً برای انجام آن باید سیمی را ببرید (شکل ۵ـ۳۷).

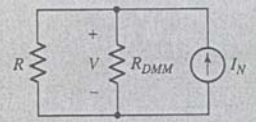
یک سیم DMM به پایانه زمین دستگاه و سیم دیگر به ورودی "A" وصل می‌شود تا جریان را اندازه بگیرد. در این حالت نیز DMM هیچ توانی را به مدار تحویل نمی‌دهد. در این شکل مقاومت معادل تونن (R_{DMM}) مربوط به DMM با مدار ما سری و بنابراین مقاومت آن می‌تواند اندازه‌گیری را متأثر سازد. معادله KVL را حول حلقه می‌نویسیم:

$$-9 + 1000I + R_{DMM}I + 1000I = 0$$

توجه کنید که چون آرایش دستگاه را برای اندازه‌گیری جریان تغییر داده‌ایم، مقاومت معادل تونن با حالتی که برای اندازه‌گیری ولتاژ به‌کاررفت یکی نیست. در واقع ما مایلیم که به‌طور ایده‌آل R_{DMM} به هنگام اندازه‌گیری جریان برابر صفر، و در اندازه‌گیری ولتاژ برابر ∞ باشد. اگر در اندازه‌گیری جریان $R_{DMM} = 0.1\Omega$ باشد، جریان 4.4998mA است که مختصر اختلافی را با مقدار مورد انتظار 4.5 دارا است. بسته به تعداد ارقام قابل نمایش به وسیله دستگاه، ما ممکن‌است حتی متوجه اثر مقاومت غیرصفر DMM روی اندازه‌گیری خود نشویم.

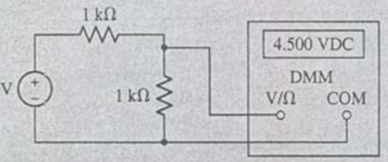
از همین دستگاه می‌توان برای اندازه‌گیری مقاومت موردنظری استفاده کرد به‌شرطی‌که در حین اندازه‌گیری هیچ منبع مستقلی فعال نباشد. از درون دستگاه جریانی به مقاومت موردنظر ارسال می‌گردد و مدار ولتمتر برای اندازه‌گیری ولتاژ حاصل به‌کارمی‌رود. از جایگزینی DMM با معادل نورتن (که اکنون شامل یک منبع جریان مستقل برای تولید جریان از پیش تعیین شده است) می‌بینیم که R_{DMM} با مقاومت معلوم R موازی می‌شود (شکل ۵ـ۳۸).

در نتیجه، در واقع DMM مقدار $R_{DMM} \parallel R$ را اندازه می‌گیرد. اگر $R_{DMM} = 10M\Omega$ و $R = 10\Omega$ باشد، $R_{\text{اندازه‌گیری‌شده}} = 9.99999\Omega$ خواهد شد، که برای بسیاری از اهداف بیش از اندازه دقیق است، با این وجود اگر $R = 10M\Omega$ باشد $R_{\text{اندازه‌گیری‌شده}} = 5M\Omega$ می‌گردد. بنابراین مقاومت ورودی DMM عملاً محدوده بالایی را برای مقادیر مقاومت زیر تست ایجاد می‌کند. باید توجه داشت که اگر یک مولتی متر دیجیتال بر اساس آگاهی از R_{DMM} برنامه‌ریزی شود، امکان جبران و اندازه‌گیری مقاومت‌های بزرگ‌تر در آن وجود دارد.

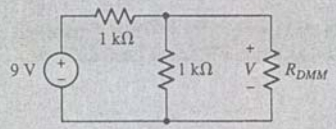


شکل ۵ـ۳۸ DMM برای اندازه‌گیری مقاومت که با معادل نورتن جایگزین شده است. دیده می‌شود که R_{DMM} با مقاومت مجهول مورد اندازه‌گیری موازی است.

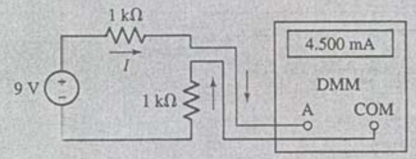
شکل ۵ـ۳۴ یک مولتی‌متر دیجیتال دستی.



شکل ۵ـ۳۵ DMM برای اندازه‌گیری ولتاژ dc وصل شده است.



شکل ۵ـ۳۶ DMM شکل ۵ـ۳۵ به فرم مقاومت معادل تونن R_{DMM}.



شکل ۵ـ۳۷ DMM متصل‌شده تا جریان را اندازه بگیرد.

در مثال دوم (شکل ۵ـ۳۱) هر دو منبع وابسته و مستقل وجود داشتند، و در روش به‌کاررفته لازم بود تا v_{oc} و I_{sc} به‌دست‌آید. در این مثال مقدار R_{TH} به راحتی برای شبکه مرده به‌دست‌نمی‌آمد زیرا امکان غیرفعال کردن منبع وابسته وجود نداشت.

مثال سوم فاقد هر گونه منبع مستقل بود، و بنابراین معادل‌های تونن و نورتن منبع مستقل نداشتند. ما R_{TH} را با اعمال جریان 1A و یافتن $v_{test} = 1 \times R_{TH}$ به‌دست‌آوردیم. می‌توانستیم 1V به مدار اعمال کنیم و از $i = 1/R_{TH}$ مقاومت را به‌دست آوریم. این دو تکنیک مرتبط را می‌توان به هر مداری با منابع وابسته و با صفرکردن منابع مستقل، اعمال نمود.

دو روش دیگر دارای جاذبه هستند زیرا می‌توان آن‌ها را برای هر یک از سه شبکه مورد بحث فوق به‌کاربرد. در اولی کافی است که شبکه B را با v_s جایگزین کنید، جریانی که از پایانه مثبت آن خارج می‌شود را i بنامید. بعد با تحلیل شبکه A، i را به‌دست‌آورید و سپس معادله را به شکل $v_s = ai + b$ درآورید. در این صورت $a = R_{TH}$ و $b = v_{oc}$ خواهد بود.

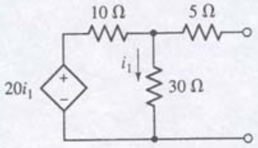
می‌توان منبع جریانی چون i_s را به کاربرد، ولتاژ آن را v درنظرگرفت و سپس $i_s = cv - d$ را تشکیل داد که $c = 1/R_{TH}$ و $d = i_{sc}$. این دو روش اخیر به هر مداری قابل اعمال است ولی دیگر روش‌هایی نیز می‌توان یافت که ساده‌تر و سریع‌ترند.

هرچند که ما همه توجه خود را به تحلیل مدارهای خطی معطوف داشته‌ایم، ولی بد نیست بدانیم که هر دو قضیه تونن و نورتن در شبکه غیرخطی B نیز معتبراند و کافی است فقط شبکه A خطی باشد.

تمرین

۵ـ۹ معادل تونن شبکه شکل ۵ـ۳۹ را پیدا کنید (**راهنمایی**: از منبع تست 1V استفاده نمایید).

جواب: $I_{test} = 50mA$ پس $R_{TH} = 20\Omega$.

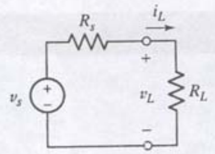


شکل ۵ـ۳۹

۵ـ٤ حداکثر انتقال توان

با توجه به یک منبع ولتاژ یا جریان واقعی می‌توان قضیه جالبی را برای توان بیان کرد. برای منبع ولتاژ واقعی (شکل ۵ـ۴۰) توان انتقالی به بار R_L برابر است با:

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2} \qquad (19)$$



شکل ۵ـ۴۰ منبع ولتاژ واقعی متصل به بار مقاومتی R_L.

برای یافتن مقداری از R_L که حداکثر توان ممکن را از یک منبع جذب کند، از رابطه فوق نسبت به R_L مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\,p_L}{d\,R_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

آن‌گاه مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

یا

$$R_s = R_L$$

چون مقادیر $R_L = 0$ و $R_L = \infty$ هر دو یک می‌نیمم را به‌دست‌می‌دهند ($p_L = 0$) و نیز معادل‌بودن منبع ولتاژ واقعی و منبع جریان واقعی بیان شد، می‌توان **قضیه حداکثر انتقال توان** را اثبات‌شده دانست:

> یک منبع ولتاژ مستقل سری با مقاومت R_s، یا یک منبع جریان مستقل موازی با مقاومت R_s حداکثر توان را به‌شرطی به بار R_L می‌دهد که در آن $R_L = R_s$ باشد.

خواننده ممکن‌است این قضیه را برحسب مقاومت معادل تونن شبکه بیان کند:

> یک شبکه، حداکثر توان را هنگامی به مقاومت بار R_L تحویل می‌دهد که در آن R_L با مقاومت معادل تونن شبکه برابر باشد.

با توجه به قضیه حداکثر انتقال توان در شکل ۵ـ۱۶ یک مقاومت 2 اهمی از هر دو منبع واقعی بیشترین توان را می‌گیرد (4.5W). مقدار مقاومتی که حداکثر توان (3.6kW) را از منبع شکل ۵ـ۱۱ جذب می‌کند 0.01Ω می‌باشد.

تفاوت عمده‌ای بین کشیدن حداکثر توان از یک منبع و حمل حداکثر توان به یک بار وجود دارد. اگر بار طوری باشد که مقاومت تونن آن معادل با مقاومت تونن شبکه‌ای باشد که به آن متصل است، حداکثر توان را از آن شبکه خواهد گرفت. هر تغییر در مقاومت بار موجب کاهش توان حمل‌شده به بار می‌گردد. با این وجود، فقط معادل تونن خود شبکه را درنظر بگیرید. ما حداکثر توان ممکن را از منبع ولتاژ با کشیدن حداکثر جریان ممکن اخذ می‌کنیم، که این کار با اتصال کوتاه پایانه‌ها انجام می‌شود! با این وجود در این حالت غیرمتعارف ما توان صفر را به بار منتقل می‌نماییم - زیرا در این حالت $p = i^2R$ است و ما با $R = 0$ عمل اتصال کوتاه را انجام داده‌ایم.

با اعمال عملیات جبری کمی به معادله (۱۹) که با حداکثر توان انتقالی برای $R_L = R_S = R_{TH}$ مرتبط است داریم:

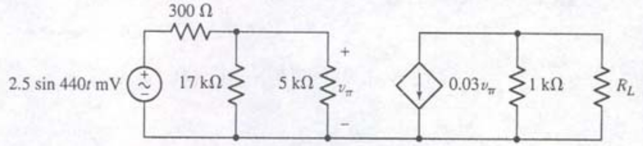
$$p_{max}\Big|_{\text{delivered to load}} = \frac{v_s^2}{4R_s} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

که v_{TH} و R_{TH} نشان می‌دهند که منبع ولتاژ عملی شکل ۵ـ۴۰ هم به عنوان منبع معادل بعضی از منابع خاص می‌تواند شناخته شود.

همچنین غیرعادی نیست که قضیه حداکثر توان به غلط تفسیر شود. این قضیه برای کمک به ما برای یک بار بهینه جهت جذب حداکثر توان ارائه شده است. اگر مقاومت بار قبلاً مشخص شده باشد قضیه حداکثر توان کمکی نمی‌نماید. اگر به دلایلی ما بتوانیم مقاومت معادله معادل تونن شبکه را که به بار وصل است عوض کنیم، با تنظیم آن با بار تضمین‌کننده انتقال حداکثر توان نیست. یک بررسی سریع اتلاف توان در مقاومت تونن این مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۵ـ۱۱

در مدار شکل ۵ـ۴۱ مدلی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری امیتر مشترک دیده می‌شود. مقدار مقاومت بار R_L را طوری معین نمایید که طبقه اول حداکثر توان را به طبقه دوم منتقل کند و توان جذب‌شده واقعی را محاسبه کند.

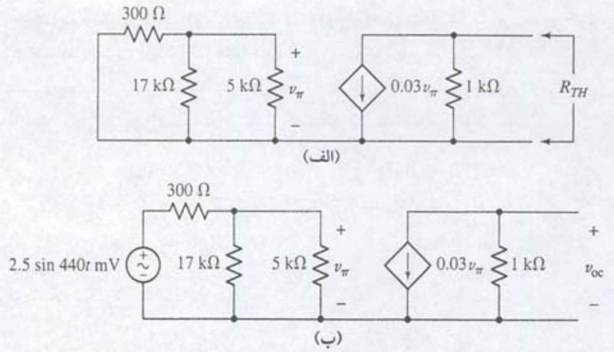


شکل ۵ـ۴۱ یک تقویت‌کننده امیتر مشترک که در آن R_L برای انتقال توان ماکزیمم نامشخص است.

چون از ما تعیین مقاومت بار خواسته شده است، تئوری حداکثر توان را اعمال می‌کنیم. گام اول یافتن معادل تونن بقیه مدار است.

ما ابتدا مقاومت معادل تونن را به دست می‌آوریم که لازم می‌دارد تا R_L حذف شده و منبع مستقل اتصال کوتاه گردد (شکل ۵ـ۴۲(الف)).

چون $v_\pi = 0$ است، منبع جریان وابسته یک مدار باز است، پس $R_{TH} = 1\ k\Omega$ می‌باشد. این مقدار را می‌توان با اتصال یک منبع جریان 1 A به دو سر مقاومت 1 kΩ تصدیق نمود؛ v_π هنوز صفر خواهد بود، بنابراین منبع وابسته غیرفعال باقی می‌ماند و لذا برای R_{TH} نقشی ندارد.



شکل ۵ـ۴۲ (الف) مدار پس از حذف R_L و اتصال کوتاه‌شدن منبع مستقل. (ب) مدار برای تعیین V_{TH}.

برای حمل حداکثر توان به مقاومت بار باید R_L در مقدار $R_{TH} = 1\ k\Omega$ تنظیم شود.

برای یافتن v_{TH} مدار شکل ۵ـ۴۲(ب) را ملاحظه نمایید که همان شکل ۵ـ۴۱ است که R_L در آن حذف شده است. ما ممکن است بنویسیم:

$$v_{oc} = -0.03v_\pi(1000) = -30v_\pi$$

که v_π از یک رابطه تقسیم ولتاژ ساده به دست می‌آید:

$$v_\pi = (2.5 \times 10^{-3} \sin 440t)\left(\frac{3864}{300 + 3864}\right)$$

به نحوی که معادله تونن یک ولتاژ -69.6 sin440t mV است که با مقاومت 1 kΩ سری است.

حداکثر توان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$p_{max} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = \boxed{1.211 \sin^2 440t\ \mu W}$$

تمرین

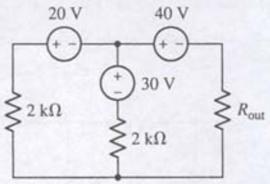
۵ـ۱۰ مدار شکل ۵ـ۴۳ را ملاحظه نمایید.

الف. اگر $R_{out} = 3k\Omega$ باشد، توان حمل‌شده به آن را پیدا کنید.

ب. حداکثر توان حمل‌شده به هر مقاومت R_{out} چقدر است؟

ج. R_{out} در دو مقدار 20mW توان جذب می‌کند. این دو مقدار را بیابید.

جواب: 230mW، 306mW، 59.2kΩ و 16.88Ω



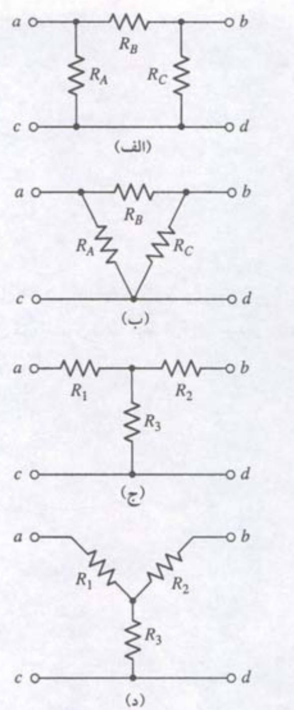
شکل ۵ـ۴۳

۵ـ۵ تبدیل ستاره - مثلث[1]

قبلاً دیدیم که ترکیب‌های سری و موازی مقاومت‌ها اغلب به کاهش قابل توجه پیچیدگی مدار منجر می‌گردد. در مواردی که چنین ترکیباتی وجود ندارد، برای دستیابی به آن، می‌توان منابع را تبدیل نمود. راه دیگر حصول به این هدف تکنیک مفیدی به‌نام تبدیل Δ-Y (ستاره - مثلث) است که از نظریه شبکه‌ها حاصل می‌شود.

مدارهای شکل ۵ـ۴۴ را ملاحظه کنید، در این شکل هیچ ترکیب موازی یا سری از مقاومت‌ها که مدار را ساده کند دیده نمی‌شود (توجه کنید که شکل ۵ـ۴۴(الف) و (ب) و نیز ۵ـ۴۴(ج) و (د) یکسانند و چون منبعی وجود ندارد، نمی‌توان تبدیل منبع انجام داد. با این وجود می‌توان این دو نوع شبکه را به هم تبدیل کرد.

1. delta-wye conversion



شکل ۵ـ۴۴ (الف) شبکه π متشکل از سه مقاومت و سه اتصال منحصربه‌فرد. (ب) همان شبکه به صورت Δ ترسیم شده است. (ج) یک شبکه T متشکل از سه مقاومت. (د) همان شبکه به صورت یک شبکه Y.

ما ابتدا دو ولتاژ v_{ab} و v_{cd} و سه جریان i_1، i_2 و i_3 را طبق شکل ۵ـ۴۵ تعریف می‌کنیم. اگر دو شبکه معادل باشند، آنگاه ولتاژها و جریان‌های پایانه‌ها باید برابر باشند (جریان i_2 در شبکه T متصل وجود ندارد). اینک مجموعه‌ای از روابط بین R_A، R_B و R_C و R_1، R_2 و R_3 با تحلیل مش قابل تعریف است. مثلاً برای شبکه شکل ۵ـ۴۵ (الف) می‌توان نوشت:

$$R_A i_1 - R_A i_2 = v_{ac} \tag{20}$$

$$-R_A i_1 + (R_A + R_B + R_C) i_2 - R_C i_3 = 0 \tag{21}$$

$$-R_C i_2 + R_C i_3 = -v_{bc} \tag{22}$$

و برای شبکه شکل ۵ـ۴۵ (ب) داریم:

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = v_{ac} \tag{23}$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_3 = -v_{bc} \tag{24}$$

سپس i_2 را با استفاده از معادله (۲۱) از معادلات (۲۰) و (۲۲) حذف می‌کنیم. در نتیجه:

$$\left(R_A - \frac{R_A^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_1 - \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_3 = v_{ac} \tag{25}$$

و

$$-\frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_1 + \left(R_C - \frac{R_C^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_3 = -v_{bc} \tag{26}$$

با مقایسه جملات بین معادله (۲۵) و معادله (۲۳) می‌بینیم که:

$$R_3 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

به طریقی مشابه ما ممکن‌است عباراتی برای R_1 و R_2 برحسب R_A، R_B و R_C و نیز عباراتی برای R_A، R_B و R_C برحسب R_1، R_2 و R_3 بنویسیم. ما بقیه کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. بنابراین برای تبدیل از شبکه Y به یک شبکه Δ مقادیر جدید مقاومت چنین محاسبه می‌شوند:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

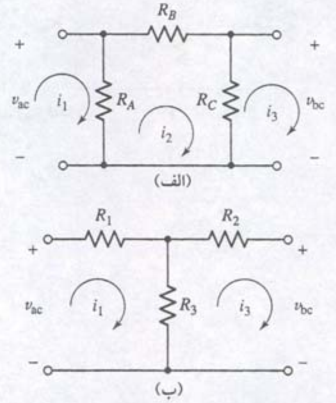
$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

و در تبدیل شبکه Δ به Y، روابط زیر به کار می‌رود:

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

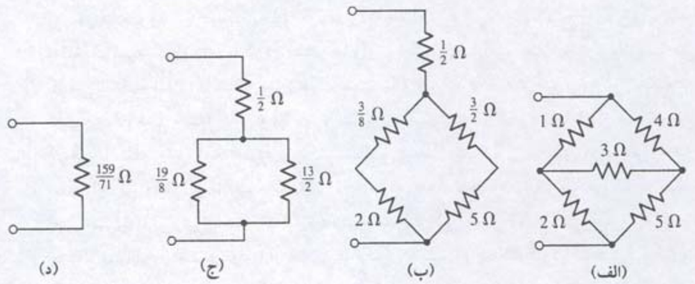


شکل ۵ـ۴۵ (الف) شبکه با برچسب Π. (ب) شبکه با برچسب T.

استفاده از این روابط بسیار ساده است، معهذا شناخت چنین شبکه‌هاکمی تمرکز نیاز دارد.

مثال ۵ـ۱۲

با تبدیل Δ-Y مقاومت معادل تونن شکل ۵ـ۴۶ (الف) را پیدا کنید.



شکل ۵ـ۴۶ (الف) یک شبکه مقاومتی مفروض که مقاومت ورودی آن خواسته شده است. (ب) شبکه Δ فوقانی با یک شبکه Y معادل جایگزین شده است. (ج) و (د) ترکیبات سری و موازی که به یک مقاومت تنها تبدیل شده‌اند.

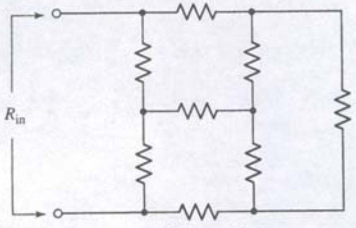
می‌بینیم که شبکه شکل ۵ـ۴۶ (الف) از دو شبکه Δ که در مقاومت 3Ω شریکند تشکیل شده است. باید دقت کنیم که عجولانه هر دو شبکه Δ را به شبکه‌های Y تبدیل نکنیم. دلیل این امر پس از تبدیل شبکه فوقانی متشکل از مقاومت‌های 3Ω، 1Ω و 4Ω به شبکه Y واضح‌تر خواهد شد (شکل ۵ـ۴۶ (ب)).

توجه کنید که در تبدیل شبکه بالایی به شبکه Y، مقاومت 3Ω را حذف کرده‌ایم. درنتیجه، راهی برای تبدیل شبکه اولیه Δ متشکل از مقاومت‌های 5، 2 و 3 اهم به شبکه Y وجود ندارد. تبدیل را با ترکیب مقاومت‌های $\frac{3}{8}\,\Omega$ و 2Ω و مقاومت‌های $\frac{3}{2}\,\Omega$ و 5Ω طبق شکل ۵ـ۴۶ (ج) پیش می‌بریم. آنگاه مقاومت $\frac{19}{8}\,\Omega$ موازی با $\frac{13}{2}\,\Omega$ خواهد بود و این ترکیب با مقاومت $\frac{1}{2}\,\Omega$ سری است. بنابراین می‌توان مدار اصلی شکل ۵ـ۴۶ (الف) را با یک مقاومت $\frac{159}{71}\,\Omega$ جایگزین کرد (شکل ۵ـ۴۶ (د)).

تمرین

۵ـ۱۱ با استفاده از تبدیل Δ-Y مقاومت معادل تونن مدار شکل ۵ـ۴۷ را به‌دست‌آورید.

جواب: 11.43Ω



هر مقاومت 10 Ω است

شکل ۵ـ۴۷

۵ـ۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها

در فصل ۳، قوانین جریان کیرشهف (KCL) و ولتاژ کیرشهف (KVL) معرفی شدند. این دو قانون به هر مداری قابل اعمال هستند، مشروط بر این‌که مدار را درنظرداشته باشیم. دلیل این‌است KCL و KVL به‌ترتیب از اصل بقاء بار و بقاء انرژی، که اصول اساسی‌اند، اخذ شده‌اند. بر اساس KCL، روش قوی تحلیل گرهی را خواهیم داشت. تکنیکی مشابه که بر KVL متکی است (و متأسفانه بر مدارهای سطح قابل اعمال است) و به تحلیل تک‌حلقه معروف است، نیز روش تحلیل مدار مفیدی به‌حساب می‌آید. در بیشتر بخش‌های این کتاب به مهارت‌های تحلیلی مربوط به مدارهای خطی توجه می‌شود. اگر بدانیم که مدار از اجزای خطی ساخته شده است، به بیان دیگر، همه ولتاژها و جریان‌ها با توابع خطی به هم مرتبطاند، آنگاه مدار را قبل از به‌کارگیری تحلیل گرهی یا تک‌حلقه ساده می‌کنیم. شاید مهم‌ترین نتیجه حاصل از این‌که با سیستم‌های کاملاً خطی سروکار داریم این باشد که بتوانیم اصل تجمیع را اعمال نماییم. با داشتن چندین منبع مستقل که بر روی مدار عمل می‌کنند، می‌توانیم سهم هر منبع را مستقل از دیگر منابع در پاسخ کل تعیین کنیم. این تکنیک در همه زمینه‌های مهندسی فراگیر بوده و ما با آن به دفعات سروکار خواهیم داشت. در بسیاری از موارد واقعی خواهیم

دیدکه هر چند منابع به‌طور همزمان روی سیستم ما عمل می‌کنند، ولی معمولاً یکی از آن‌ها بر پاسخ سیستم غلبه داشته و کنترل آن را در دست دارد. اصل تجمیع امکان شناسایی سریع آن منبع را برای ما فراهم می‌سازد، به‌شرطی‌که مدل سیستم با دقتی کافی خطی باشد.

در هر صورت، از دیدگاه تحلیل یک مدار، به‌جز در مواردی که سهم منبع خاصی روی یک پاسخ خواسته شده باشد، با لازدن آستین‌ها و به‌کارگیری مستقیم یکی از دو روش تحلیل گرهی یا تک‌حلقه‌ای تاکتیکی سر راست است. دلیل این‌است‌که به‌کارگیری روش تجمیع در مداری با 12 منبع مستقل نیاز به 12 بار ترسیم مدار اصلی دارد و آن وقت باید باز هم تحلیل گرهی یا حلقه را به‌کاربگیریم. ولی تکنیک تبدیل منابع اغلب ابزار مفیدی در تحلیل مدار است. اجرای روش تبدیل منابع به ما این اجازه را می‌دهد تا مقاومت‌ها و منابعی که در مدار اصلی سری یا موازی نیستند را یکپارچه کنیم. همچنین این روش اجازه می‌دهد تا همه یا حداقل بسیاری از منابع در مدار اصلی از یک نوع شده و به‌کارگیری تحلیل گرهی یا تک‌حلقه‌ای سرراست‌تر شود.

قضیه تونن به دلایل متعددی بسیار مهم است. هنگام کار با مدارهای الکترونیک، همواره نگران مقاومت معادل تونن در بخش‌های مختلف آن هستیم. این نگرانی خصوصاً در ورودی و خروجی طبقات مختلف اهمیت بیشتری دارد. علت این‌است‌که بهترین راه رسیدن به یک سیستم با رفتار بهینه، تطبیق مقاومت‌های آن‌ها است. ما مختصری از این خاصیت را در بحث انتقال توان حداکثر ملاحظه کردیم و دیدیم که مقاومت بار باید طوری انتخاب شود که با مقاومت معادل تونن مداری که بار به آن وصل است تطابق داشته باشد. با این وجود، در تحلیل‌های مکرر روزانه می‌بینیم که تبدیل بخشی از یک مدار به معادل تونن یا نورتن به اندازه تحلیل کامل آن کار می‌برد. بنابراین همچون روش تجمیع، روش‌های تونن و نورتن هنگامی اعمال می‌گردند که اطلاعات خاصی از بخش موردنظری از مدار لازم باشد.

۵_۷ خلاصه فصل و مرور

- اصل تجمیع بیان می‌داردکه پاسخ‌کل در یک مدار خطی را، از جمع پاسخ‌های جزئی حاصل از تک‌تک منابع که به تنهایی عمل می‌کنند می‌توان به‌دست‌آورد.
- روش تجمیع در مواردی به‌کارمی‌رود که هدف تعیین سهم یک منبع خاص در پاسخ باشد.
- مدلی عملی برای یک ولتاژ واقعی ترکیب سری مقاومت و یک منبع ولتاژ مستقل است. همچنین مدلی عملی برای یک منبع جریان واقعی، عبارت‌است‌از مقاومتی موازی با یک منبع جریان مستقل.
- تبدیل منابع به ما اجازه می‌دهد تا یک منبع ولتاژ واقعی را به یک منبع جریان واقعی تبدیل کنیم.
- تکرار تبدیل منابع که ضمن آن ترکیب مقاومت‌ها و منابع صورت می‌گیرد در ساده‌سازی مدار اهمیت بسزایی دارد.
- معادل تونن یک شبکه، مقاومتی سری با یک منبع ولتاژ مستقل است. مدار معادل نورتن نیز همان مقاومت ولی موازی با یک منبع جریان می‌باشد.
- روش‌های متنوعی برای به‌دست‌آوردن مقاومت معادل تونن وجود داردکه به بود یا نبود منابع وابسته، بستگی دارد.
- حداکثر توان انتقالی هنگامی رخ می‌دهد که مقاومت بار با مقاومت معادل تونن شبکه متصل به آن تطابق داشته باشد.
- وقتی که با یک شبکه مقاومتی اتصال Δ مواجه می‌شوید تبدیل آن به یک شبکه Y ساده است. این می‌تواند در ساده‌سازی شبکه قبل از تحلیل کمک کند. برعکس یک شبکه مقاومتی اتصال Y می‌تواند به شبکه اتصال Δ تبدیل شود تا در ساده‌کردن یک شبکه کمک کند.

۵_۸ خواندنی‌های کمکی

A book about battery technology, including characteristics of built-in resistance:

D. Linden, *Handbook of Batteries,* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1995.

An excellent discussion of pathological cases and various circuit analysis theorems can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

مسائل

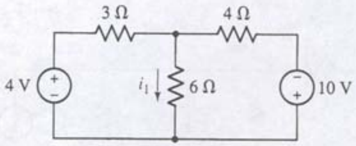
۵_۱ خطی‌بودن و تجمیع

۱. مفهوم خطی‌بودن بسیار با اهمیت است به این دلیل که سیستم‌های خطی راحت‌تر از سیستم‌های غیرخطی تحلیل می‌شوند. متأسفانه اکثر سیستم‌های واقعی طبیعتاً غیرخطی‌اند. با این وجود ممکن‌است برای یک سیستم غیرخطی مدلی خطی ایجاد کرد تا در محدوده کوچکی از متغیر کنترل معتبر باشد. به‌عنوان مثالی از این مطلب تابع نمایی ساده e^x را ملاحظه کنید. نمایش سری تیلور این تابع عبارت‌است‌از:

$$e^x \approx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

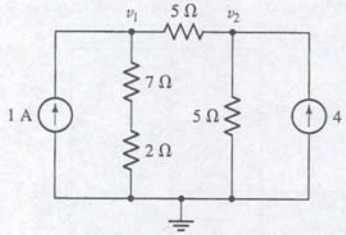
برای این تابع پس از حذف جملات x به بعد، یک مدل خطی بسازید. تابع جدید خود را در $x = 0.001,\ 0.005,\ 0.01,\ 0.05,\ 0.10,\ 0.5,\ 1.0,\ 5.0$ ارزیابی کنید. برای چه مقداری از x مدل خطی تقریب خوبی را برای e^x تولید می‌کند؟

۲. در شکل ۵.۴۸، (الف) سهم منبع 4 V را در جریان i_1 مشخص کنید، (ب) سهم منبع 10 V را در i_1 معین نمایید و (ج) i_1 را تعیین کنید.



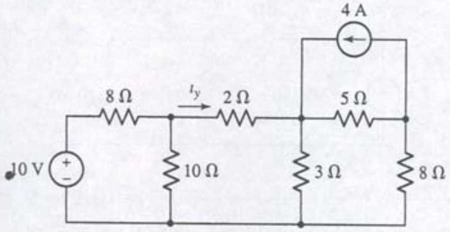
شکل ۵_۴۸

۳. با مراجعه به مدار دومنبعی شکل ۵.۴۹ سهم منبع 1 A را در v_1 به دست آورید و جریان کل درون مقاومت 7 Ω را معین سازید.



شکل ۵_۴۹

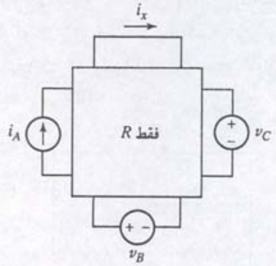
۴. اصل تجمیع را برای تعیین جریان i_y در مدار شکل ۵.۵۰ با ملاحظه تک‌تک منابع تعیین نمایید.



شکل ۵_۵۰

۵. برای مدار شکل ۵.۴۸ تنها مقادیر منبع را عوض کنید تا جریان i_1، ۱۰ برابر شود. هر دو مقدار جریان باید عوض شود و هیچ‌کدام صفر نباشد.

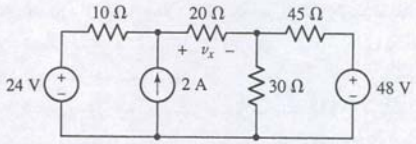
۶. وقتی در مدار شکل ۵.۵۱، منابع i_A و v_B فعالند و $v_C = 0$، $i_x = 20A$، با فعال‌بودن i_A، v_C و $v_B = 0$ آنگاه $i_x = -5A$ و بالاخره با روشن‌بودن هر سه منبع، $i_x = 12A$ است. اگر تنها منبع فعال، (الف) i_A، (ب) v_B و (ج) v_C باشد، i_x را حساب کنید. (د) اگر i_A و v_C از نظر اندازه دوبرابر شوند و v_B منفی شود، i_x را به‌دست‌آورید.



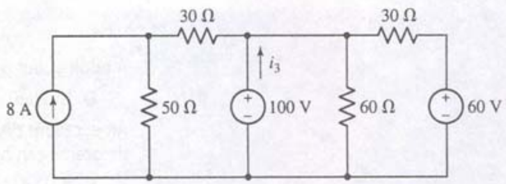
شکل ۵_۵۱

۷. با استفاده از تجمیع مقدار v_x در مدار شکل ۵.۵۲ را پیدا کنید.

۸. با به‌کارگیری تجمیع به مدار شکل ۵.۵۳، i_3 را بیابید.

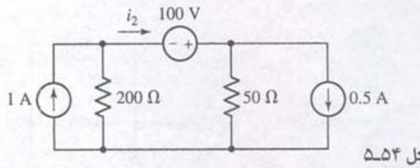


شکل ۵_۵۲



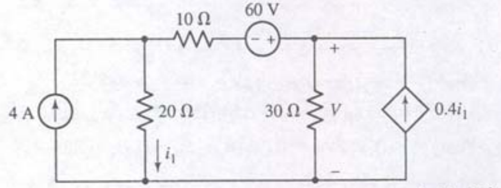
شکل ۵ـ۵۳

۹. (الف) با استفاده از قضیه تجمیع، i_2 را در مدار شکل ۵ـ۵۴ به‌دست‌آورید و (ب) توان جذب‌شده به‌وسیله هر یک از پنج عنصر مدار را محاسبه کنید.



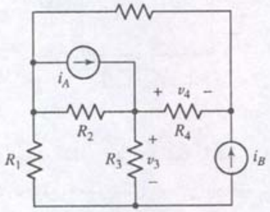
شکل ۵ـ۵۴

۱۰. تجمیع را روی مدار شکل ۵ـ۵۵ اعمال کرده و ولتاژ V را به‌دست‌آورید. توجه کنید که یک منبع وابسته وجود دارد.



شکل ۵ـ۵۵

۱۱. در مدار شکل ۵ـ۵۶: (الف) اگر $i_A = 10A$ و $i_B = 0$ باشد، آن‌گاه $v_3 = 80V$ است. اگر $i_A = 25A$ و $i_B = 0$ باشد، v_3 را پیدا کنید. (ب) اگر $i_A = 10A$ و $i_B = 25A$ باشد در این صورت $v_4 = 100V$ است ولی اگر $i_A = 25A$ و $i_B = 10A$ شود، $v_4 = -50V$ می‌گردد، اگر $i_A = 20A$ و $i_B = -10A$ باشد، v_4 را بیابید.

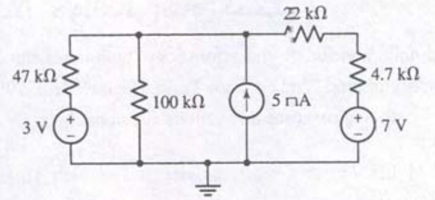


شکل ۵ـ۵۶

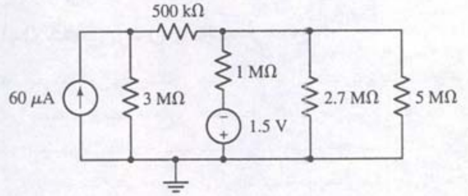
۱۲. از تجمیع برای تعیین ولتاژ دو سر منبع جریان شکل ۵ـ۵۷ استفاده کنید.

۱۳. از تجمیع استفاده کنید و توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 500kΩ در شکل ۵ـ۵۸ را محاسبه نمایید.

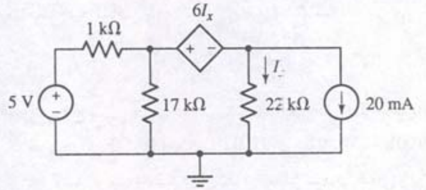
۱۴. از تجمیع برای تعیین ولتاژ دو سر مقاومت 17kΩ در شکل ۵ـ۵۹ استفاده نمایید. اگر میزان توان تلف‌شده مقاومت 250mW باشد حداکثر ولتاژ مثبتی که منبع 5V قبل از داغ‌شدن دارد چقدر است؟



شکل ۵ـ۵۷

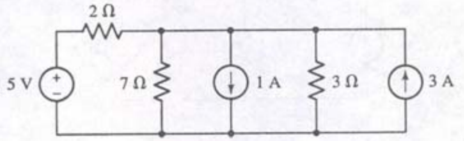


شکل ۵ـ۵۸



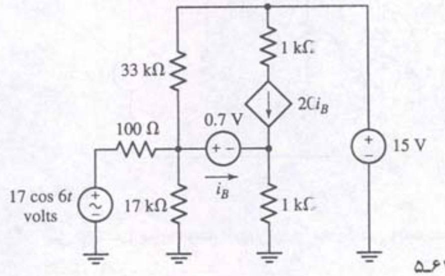
شکل ۵ـ۵۹

۱۵. کدام منبع در شکل ۵ـ۶۰ در توان تلف‌شده در مقاومت 2Ω سهم بیشتری دارد؟ کمترین سهم کدام است؟ مقدار توان تلف‌شده در مقاومت 2Ω را به‌دست‌آورید.



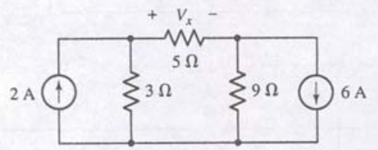
شکل ۵ـ۶۰

۱۶. از اصل تجمیع برای یافتن i_B در مدار شکل ۵ـ۶۱ استفاده کنید. این مدل متعلق به تقویت‌کننده ترانزیستوری دوقطبی است.



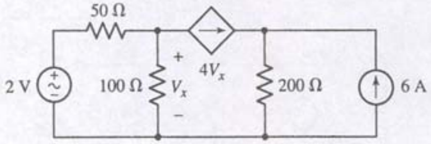
شکل ۵ـ۶۱

۱۷. برای مدار شکل ۵ـ۶۲: (الف) از تجمیع برای محاسبه V_x استفاده نمایید. (ب) سهم هر منبع در V_x را با استفاده از تحلیل dc sweep PSpice تحقیق کنید. یک شماتیک نامگذاری‌شده، خروجی probe وابسته به آن و خلاصه‌ای از نتایج را ارائه کنید.



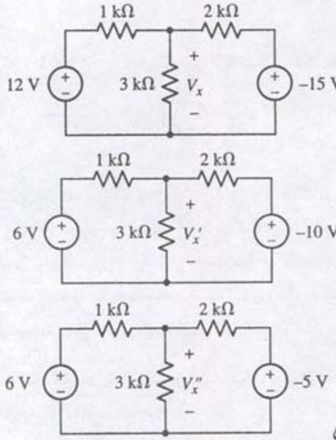
شکل ۵ـ۶۲

۱۸. برای مدار شکل ۵ـ۶۳: (الف) از تجمیع برای محاسبه v_x استفاده نمایید. (ب) نقش و سهم هر منبع را در v_x با تحلیل dc sweep PSpice تحقیق کنید. یک شماتیک نامگذاری‌شده، خروجی probe و خلاصه‌ای از نتایج را ارائه دهید.



شکل ۵ـ۶۳

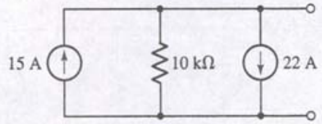
۱۹. سه مدار شکل ۵ـ۶۴ را ملاحظه نمایید. هر مدار را تحلیل کنید و نشان دهید که $V_x = V'_x + V''_x$ (یعنی تجمیع هنگامی ارجحیت دارد که منابع صفر شوند، ولی این اصل خیلی فراتر از آن است).



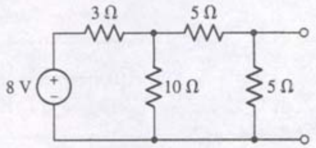
شکل ۵ـ۶۴

۵ـ۲ تبدیل منابع

۲۰. به کمک روش تبدیل منبع، (الف) مدار شکل ۵ـ۶۵ (الف) را به یک منبع ولتاژ مستقل سری با یک مقاومت تقریباً برابر و (ب) مدار شکل ۵ـ۶۵ (ب) را به یک منبع جریان مستقل با مقاومتی برابر و موازی با منبع تبدیل کنید. برای هر دو (الف) و (ب)، پایانه‌های سمت راست را در مدار نهایی آزاد بگذارید.



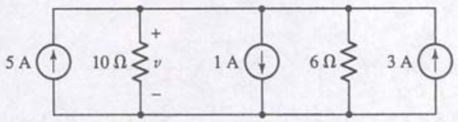
(الف)



(ب)

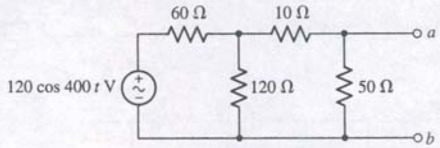
شکل ۵ـ۶۵

۲۱. (الف) از روش تبدیل منبع برای کاهش مدار شکل ۵ـ۶۶ به یک منبع ولتاژ واقعی سری با مقاومت 10 Ω استفاده کنید. (ب) v را محاسبه کنید. (ج) توضیح دهید که چرا مقاومت 10 Ω نباید در تبدیل منبع لحاظ شود.

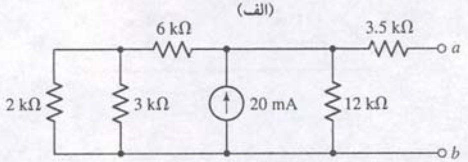


شکل ۵ـ۶۶

۲۲. از تبدیل منابع و ترکیب مقاومت‌ها برای ساده‌سازی هر دو شبکه شکل ۵ـ۶۷ استفاده کنید تا در سمت چپ پایانه‌های a و b فقط دو عنصر باقی بمانند.



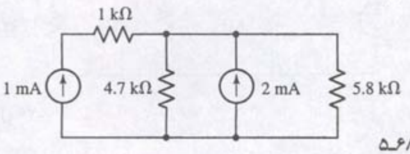
(الف)



(ب)

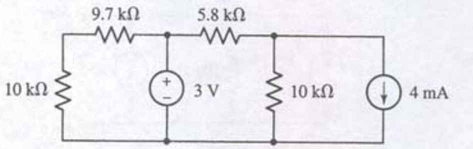
شکل ۵ـ۶۷

۲۳. با تبدیل منبع، توان تلف‌شده در مقاومت 5.8kΩ شکل ۵ـ۶۸ را معین نمایید.



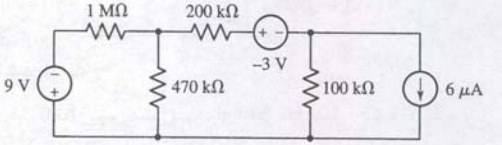
شکل ۵ـ۶۸

۲۴. با تبدیل منبع، توان تلف‌شده در مقاومت 5.8kΩ شکل ۵ـ۶۹ را معین نمایید.



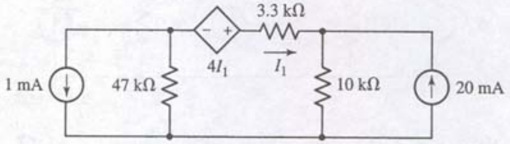
شکل ۵ـ۶۹

۲۵. توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 1MΩ را با استفاده از تبدیل منبع در مدار شکل ۵ـ۷۰ به‌دست‌آورید.



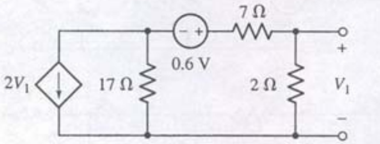
شکل ۵ـ۷۰

۲۶. با تبدیل منبع، مدار شکل ۵ـ۷۱ را ساده کنید و I_1 را مشخص نمایید.



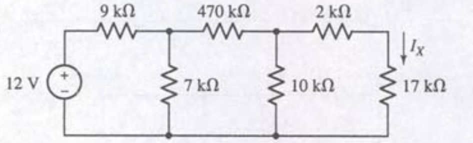
شکل ۵ـ۷۱

۲۷. (الف) با تبدیل منبع مدار شکل ۵ـ۷۲ را ساده کنید و سپس V_1 را به‌دست آورید. (ب) صحت تحلیل خود را با اجرای تحلیل PSpice مدار شکل ۵ـ۷۲ تحقیق نمایید.



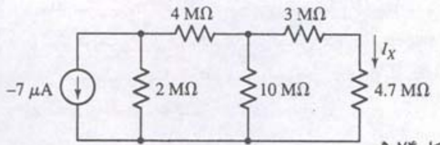
شکل ۵ـ۷۲

۲۸. (الف) با تکرار تبدیل منبع، I_x را در شکل ۵ـ۷۳ بیابید. (ب) با تحلیل PSpice در شکل ۵ـ۷۳، صحت تحلیل خود را تحقیق نمایید.



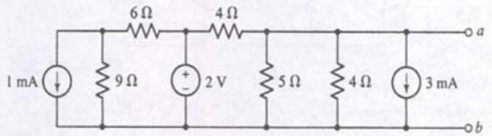
شکل ۵ـ۷۳

۲۹. با تکرار تبدیل منبع، جریان I_x را در مدار شکل ۵ـ۷۴ معین کنید.



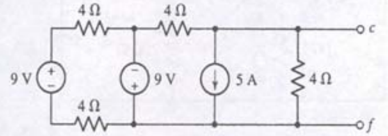
شکل ۵ـ۷۴

۳۰. مدار شکل ۵ـ۷۵ را به یک منبع موازی با یک مقاومت تبدیل نمایید.



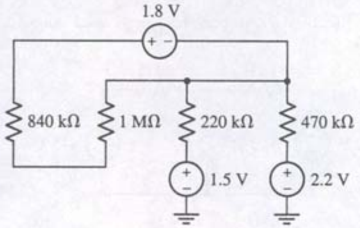
شکل ۵ـ۷۵

۳۱. با تبدیل منبع مدار شکل ۵ـ۷۶ را به یک منبع جریان موازی با یک مقاومت تبدیل نمایید.



شکل ۵ـ۷۶

۳۲. توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت 1MΩ در مدار شکل ۵ـ۷۷ را معین کنید.



شکل ۵ـ۷۷

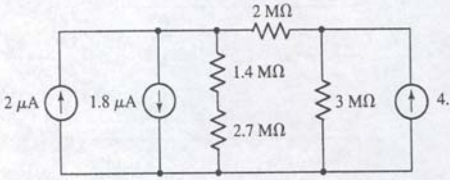
۳۳. اندازه‌گیری‌های جدول ۵ـ۱ روی یک باطری 1.5V آلکالاین انجام شده است. از اطلاعات موجود استفاده کرده، یک مدل منبع ولتاژ عملی دوعنصری برای باطری بسازید تا در محدودهٔ 1 الی 20mA نسبتاً دقیق باشد. توجه کنید که علاوه بر خطای اندازه‌گیری مسلم، مقاومت درونی باطری به مقدار قابل توجهی در محدوده اندازه‌گیری تغییر می‌یابد.

جدول ۵ـ۱ مشخصات اندازه‌گیری‌شدهٔ ولتاژ ـ جریان یک باطری 1.5V متصل به یک مقاومت متغیر.

جریان خروجی (mA)	ولتاژ پایانه‌ای (V)
0.0000589	1.584
0.3183	1.582
1.4398	1.567
7.010	1.563
12.58	1.558

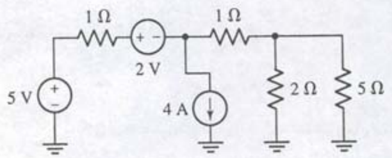
۳۴. از داده‌های جدول ۵ـ۱ برای ساخت یک مدل منبع جریان واقعی دوعنصری، که در محدوده 1 الی 20mA نسبتاً دقیق است، استفاده نمایید. توجه کنید که علاوه بر خطای مسلم اندازه‌گیری مقاومت داخلی باطری به میزان قابل توجهی در محدوده جریان اندازه‌گیری شده تغییر می‌کند.

۳۵. مدار شکل ۵ـ۷۸ را به یک منبع ولتاژ موازی با یک مقاومت تقلیل دهید.



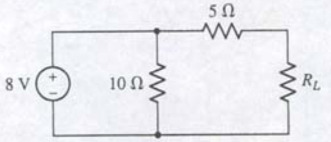
شکل ۵ـ۷۸

۳۶. توان جذب‌شده در مقاومت 5Ω شکل ۵ـ۷۹ چقدر است؟



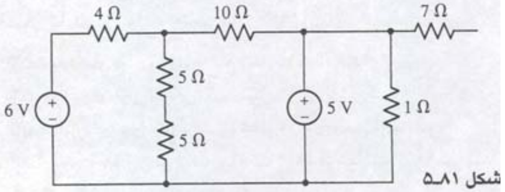
شکل ۵ـ۷۹

۳۷. (الف) مدار شکل ۵ـ۸۰ را به یک منبع جریان واقعی موازی با R_L تبدیل کنید. صحت پاسخ خود را با PSpice با مقدار 5 Ω برای R_L تحقیق کنید. برای هر مدار شماتیک مناسب را تحویل دهید و در آن ولتاژ دو سر R_L را مشخص کنید.



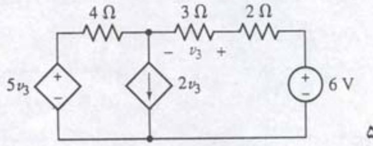
شکل ۵ـ۸۰

۳۸. (الف) مدار شکل ۵ـ۸۱ را تا حد ممکن کاهش دهید، دو منبع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل نمایید، سپس توان تلف‌شده در مقاومت 5 Ω بالا را محاسبه کنید. (ب) صحت پاسخ خود را با شبیه‌سازی هر دو مدار به وسیله PSpice تحقیق نمایید. یک مدار با برچسب‌های مناسب را برای هر مدار تحویل دهید به نحوی که توان تلف‌شده در مقاومت موردنظر به وضوح مشخص باشد. (ج) آیا مقدار 1 Ω یا 7 Ω در پاسخ شما به هر طریقی تأثیرگذارند. توضیح دهید؟ بگویید چرا بلی و چرا خیر؟



شکل ۵ـ۸۱

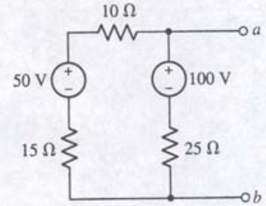
۳۹. برای مدار شکل ۵ـ۸۲ همه منابع را (هم وابسته و هم مستقل) به منابع جریان تبدیل کنید، منابع مستقل را ترکیب نموده و v_3 را محاسبه نمایید.



شکل ۵ـ۸۲

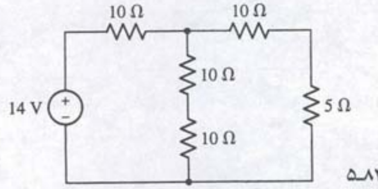
۵ـ۳ مدارهای معادل تونن و نورتن

۴۰. (الف) معادل تونن را در پایانه‌های a و b شکل ۵ـ۸۳ بیابید. به مقاومت متصل به a و b چقدر توان منتقل می‌گردد به‌شرطی‌که R_{ab} برابر (ب) 50Ω و (ج) 12.5Ω باشد.



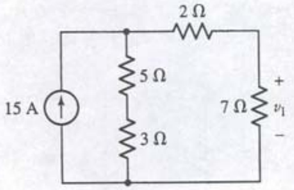
شکل ۵ـ۸۳

۴۱. (الف) قضیه تونن را برای ساده‌کردن شبکه متصل به مقاومت 5 Ω شکل ۵ـ۸۴ (الف) به کار ببرید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 5 Ω را با استفاده از مدار ساده‌شده حساب کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice به دست آورید. شماتیک برچسب‌خورده را برای هر مدار با توان موردنظر مشخص‌شده تحویل دهید.



شکل ۵ـ۸۴

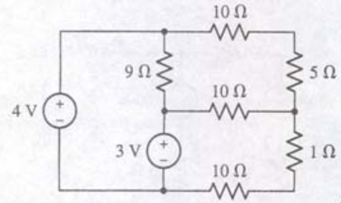
۴۲. (الف) معادل تونن شبکه متصل به مقاومت 7 Ω شکل ۵ـ۸۵ را به دست آورید. (ب) معادل نورتن شبکه متصل به مقاومت 7 Ω را پیدا کنید. (ج) ولتاژ v_1 را برای هر دو مدار خود محاسبه کنید. (د) مقاومت 7 Ω را با یک مقاومت 1 Ω جایگزین کرده و v_1 را دوباره برای هر مدار محاسبه نمایید.



شکل ۵ـ۸۵

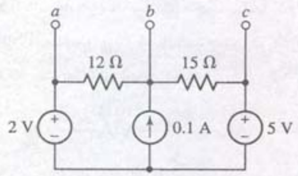
۴۳. (الف) یک لامپ تنگستن به ولتاژ تست 10 mV وصل است و جریان 400μA اندازه‌گیری شده است. معادله تونن لامپ چیست؟ اکنون لامپ به یک منبع تغذیه 110 V متصل است و جریان 363.6 mA اندازه‌گیری شده است. معادل تونن را بر اساس این اندازه‌گیری معین نمایید. چرا معادل تونن لامپ به شرایط تست وابسته است، و چه استدلالی اگر بخواهیم مدار حاوی لامپ را تحلیل کنیم، داریم.

۴۴. (الف) معادل‌های تونن و نورتن را برای شبکه متصل به مقاومت 1 Ω شکل ۵ـ۸۶ پیدا کنید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 1 Ω را با استفاده از مدارهای معادل محاسبه کنید. (ج) با PSpice صحت را تحقیق نمایید. شماتیک هر سه مدار را با مشخص‌نمودن توان مورد تقاضا تحویل دهید.



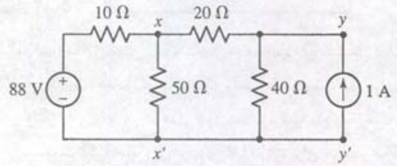
شکل ۵ـ۸۶

۴۵. برای شبکه شکل ۵ـ۸۷: (الف) پایانه c را حذف کنید و معادل تونن را از پایانه‌های a و b بیابید. (ب) پایانه a را حذف کنید و مرحله قبل را برای b و c تکرار نمایید.



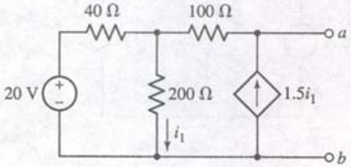
شکل ۵ـ۸۷

۴۶. معادل تونن شبکه شکل ۵ـ۸۸ را از پایانه‌های: (الف) x و x′، (ب) y و y′ به‌دست‌آورید.



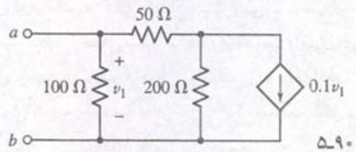
شکل ۵ـ۸۸

۴۷. (الف) معادل تونن شبکه شکل ۵ـ۸۹ را بیابید. (ب) چه توانی به مقاومت 100Ω در a و b انتقال می‌یابد؟



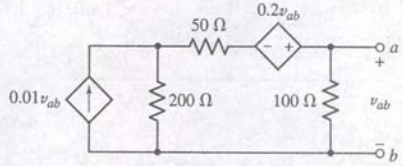
شکل ۵ـ۸۹

۴۸. معادل نورتن شبکه شکل ۵ـ۹۰ را بیابید.



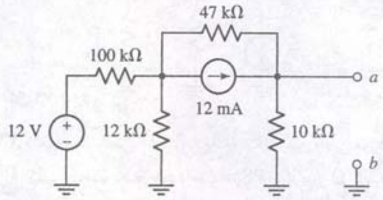
شکل ۵ـ۹۰

۴۹. معادل تونن شبکه دو پایانه شکل ۵ـ۹۱ را معین کنید.



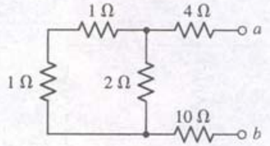
شکل ۵ـ۹۱

۵۰. معادل تونن شکل ۵ـ۹۲ را به‌دست‌آورید.



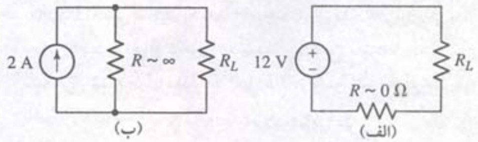
شکل ۵ـ۹۲

۵۱. برای شبکه شکل ۵ـ۹۳: (الف) معادل تونن و (ب) معادل نورتن را تعیین نمایید.



شکل ۵ـ۹۳

۵۲. برای مدار شکل ۵ـ۹۴ (الف) معادل نورتن شبکه متصل به R_L را به‌دست‌آورید. برای مدار شکل ۵ـ۹۴ (ب) معادل تونن شبکه متصل به R_L را تعیین کنید.



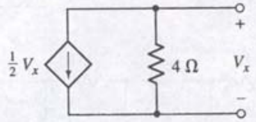
شکل ۵ـ۹۴

۵۳. معادل‌های تونن و نورتن شبکه شکل ۵ـ۹۵ را بیابید.

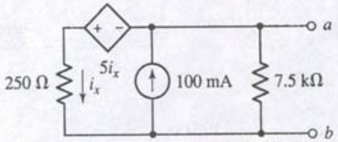
۵۴. معادل‌های تونن و نورتن شبکه شکل ۵ـ۹۶ را تعیین کنید.

۵۵. معادل‌های تونن و نورتن شبکه شکل ۵ـ۹۷ را به‌دست‌آورید.

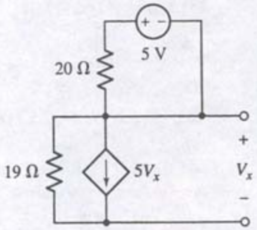
۵۶. مقاومت معادل تونن از دید مقاومت 2kΩ در مدار شکل ۵ـ۹۸ را پیدا کنید. از خط‌چین شکل چشم‌پوشی نمایید.



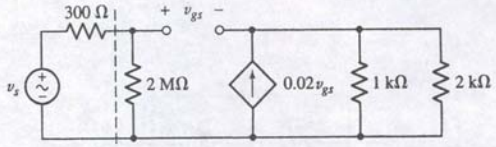
شکل ۵ـ۹۵



شکل ۵ـ۹۶



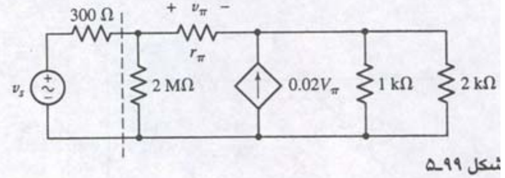
شکل ۵ـ۹۷



شکل ۵ـ۹۸

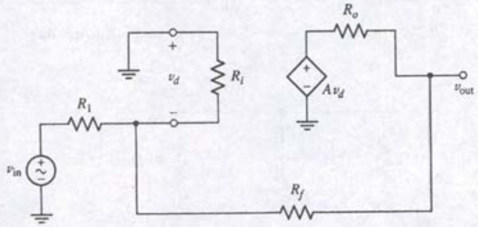
۵۷. با مراجعه به شکل ۵ـ۹۸، مقاومت معادل تونن مدار سمت راست خط‌چین را معین نمایید. این مدار یک تقویت‌کننده ترانزیستوری سورس مشترک است. شما مقاومت ورودی آن را محاسبه می‌نمایید.

۵۸. با توجه به شکل ۵ـ۹۹، مقاومت معادل تونن مدار سمت راست خط‌چین را به‌دست‌آورید. این مدار یک تقویت‌کننده ترانزیستوری امیتر مشترک است و شما مقاومت ورودی آن را محاسبه می‌کنید.



شکل ۵ـ۹۹

۵۹. مدار شکل ۵ـ۱۰۰ یک مدل نسبتاً دقیقی از یک تقویت‌کننده عملیاتی (op-amp) است. در مواردی که R_i و A خیلی بزرگ‌اند، $R_o \sim 0$ است، یک مقاومت باری (مانند بلندگو) متصل بین زمین و پایانه v_{out} ولتاژ $-R_f/R_1$ برابر بزرگتر از سیگنال v_{in} می‌بینند. مدار معادل تونن را پیدا کنید.

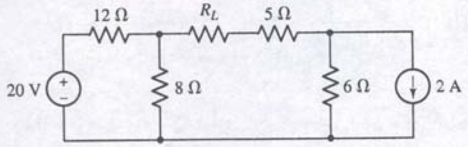


شکل ۵ـ۱۰۰

۵ـ۴ حداکثر انتقال توان

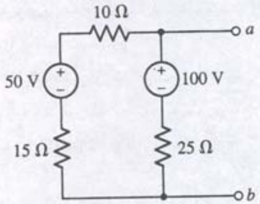
۶۰. با فرض این‌که می‌توانیم مقاومت معادل پریز برق خود را تعیین نماییم چرا سازندگان توستر، آون، مایکروویو و تلویزیون مقاومت معادل تونن هر وسیله را با آن تطبیق نمی‌دهند. آیا این کار انتقال حداکثر توان را موجب نمی‌شود.

۶۱. اگر بتوان هر مقداری برای R_L در شکل ۵ـ۱۰۱ انتخاب کرد، حداکثر توان مصرفی در R_L چقدر می‌باشد؟



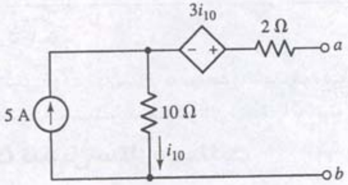
شکل ۵ـ۱۰۱

۶۲. (الف) معادل تونن را در پایانه‌های a و b برای شکل ۵ـ۱۰۲ به‌دست‌آورید. چقدر توان به مقاومت متصل به a و b منتقل می‌گردد به‌شرطی‌که R_{ab} برابر با (ب) 10Ω و (ج) 75Ω باشد؟



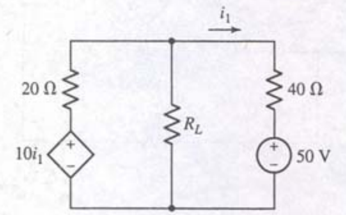
شکل ۵ـ۱۰۲

۶۳. (الف) معادل تونن شبکه شکل ۵ـ۱۰۳ را معین کنید و (ب) حداکثر توان دریافتی از آن چقدر است؟



شکل ۵ـ۱۰۳

۶۴. در شکل ۵ـ۱۰۴: (الف) مقدار R_L که حداکثر توان به آن منتقل می‌گردد چقدر است، (ب) ولتاژ دو سر R_L را محاسبه کنید (علامت + در بالا).



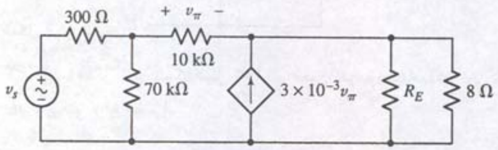
شکل ۵ـ۱۰۴

۶۵. یک منبع ولتاژ dc واقعی جریان 2.5A را وقتی یک لحظه اتصال کوتاه شده، فراهم ساخته و می‌تواند 80W توان را به بار 20Ω منتقل سازد. (الف) ولتاژ مدار باز را پیدا کنید. (ب) حداکثر توانی که می‌تواند به مقاومت منتخب بهینه انتقال دهد چقدر است؟ برای توان ماکزیمم، R_L چقدر باید باشد؟

۶۶. یک منبع جریان واقعی 10W توان را به مقاومت بار 250Ω و 20W توان را به یک بار 80Ω انتقال می‌دهد. یک مقاومت R_L با ولتاژ v_L و جریان i_L به آن وصل است. مقادیر R_L، v_L و i_L را پیدا کنید اگر (الف) $v_L i_L$ حداکثر باشد، (ب) v_L حداکثر باشد و (ج) i_L حداکثر باشد.

۶۷. یک باطری می‌تواند به‌دقت به‌عنوان یک منبع ولتاژ 9V سری با مقاومت 1.2Ω در محدوده مورد نظری از جریان، مدل‌سازی شود. اگر یک مقاومت بی‌نهایت به باطری وصل شود هیچ جریانی از باطری عبور نمی‌کند. ضمناً می‌دانیم که حداکثر توان به مقاومت 1.2Ω انتقال می‌یابد، و به مقاومت‌های 1.1Ω و 1.3Ω توان منتقل‌شده کمتر است. با این وجود اگر پایانه‌های باطری را اتصال کوتاه کنیم (البته پیشنهاد نمی‌شود)، جریان بیشتری نسبت به مقاومت 1.2Ω به‌دست خواهیم آورد. آیا این در تضاد با آن‌چه برای بار مقاومت 1.2Ω دیدیم نیست (آیا توان متناسب با i^2 نمی‌باشد)؟ توضیح دهید.

۶۸. مدار شکل ۵ـ۱۰۵ بخشی از یک تقویت‌کننده صوتی است. اگر بخواهیم حداکثر توان را به بلندگوی 8Ω منتقل کنیم، چه مقداری از R_E مورد نیاز است؟ حل خود را با PSpice به تأیید برسانید.

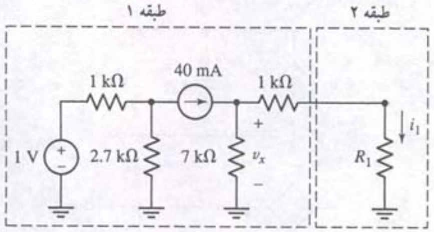


شکل ۵ـ۱۰۵

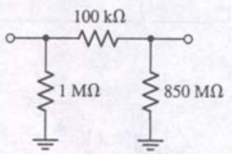
۶۹. شکل ۵ـ۱۰۶ مداری را که به دو بخش تفکیک شده نشان می‌دهد. R_1 را طوری انتخاب کنید که حداکثر توان از طبقه 1 به طبقه 2 منتقل گردد.

۵ـ۵ تبدیل ستاره ـ مثلث

۷۰. شبکه شکل ۵ـ۱۰۷ را به شبکه Y تبدیل نمایید.

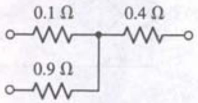


شکل ۵ـ۱۰۶



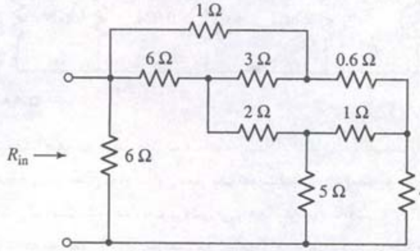
شکل ۵ـ۱۰۷

۷۱. شبکه شکل ۵ـ۱۰۸ را به شبکه Δ تبدیل کنید.



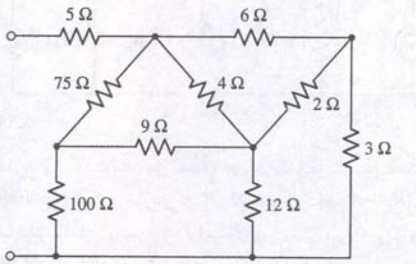
شکل ۵ـ۱۰۸

۷۲. R_{in} را در شبکه شکل ۵ـ۱۰۹ پیدا کنید.



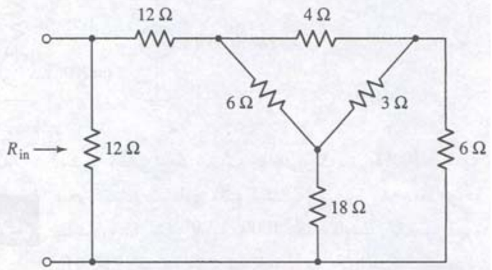
شکل ۵ـ۱۰۹

۷۳. از تبدیل Δ-Y و Y-Δ برای یافتن مقاومت شبکه شکل ۵ـ۱۱۰ استفاده نمایید.



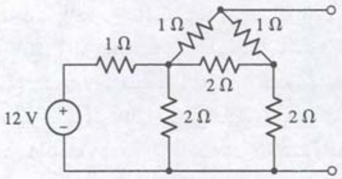
شکل ۵ـ۱۱۰

۷۴. R_{in} را برای مدار شکل ۵ـ۱۱۱ بیابید.



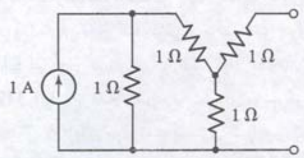
شکل ۵ـ۱۱۱

۷۵. معادل تونن مدار شکل ۵ـ۱۱۲ را به‌دست‌آورید.



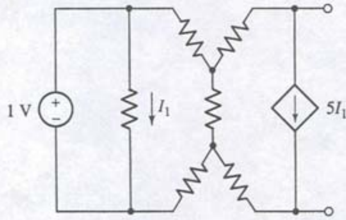
شکل ۵ـ۱۱۲

۷۶. معادل نورتن مدار شکل ۵ـ۱۱۳ را پیدا کنید.



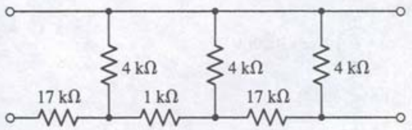
شکل ۵ـ۱۱۳

۷۷. اگر همه مقاومت‌ها در شکل ۵ـ۱۱۴ برابر 10Ω باشند، معادل تونن را برای مدار به‌دست‌آورید.



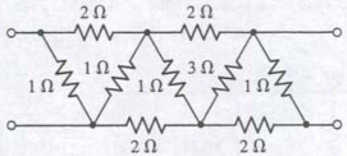
شکل ۵ـ۱۱۴

۷۸. (الف) شبکه شکل ۵ـ۱۱۵ را با سه مقاومت Y جایگزین کنید. (ب) تحلیل PSpice را برای تحقیق معادل‌بودن جواب به‌کاربرید (راهنمایی: یک مقاومت بار اضافه نمایید).



شکل ۵ـ۱۱۵

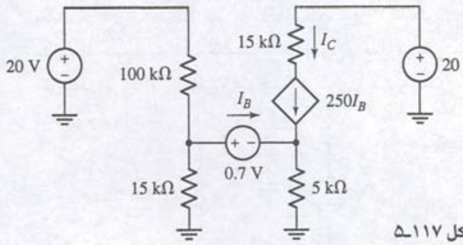
۷۹. (الف) به‌جای شبکه شکل ۵ـ۱۱۶ یک شبکه Δ سه مقاومتی قرار دهید. (ب) با تحلیل PSpice صحت جواب را نشان دهید. (راهنمایی: یک مقاومت بار اضافه نمایید).



شکل ۵ـ۱۱۶

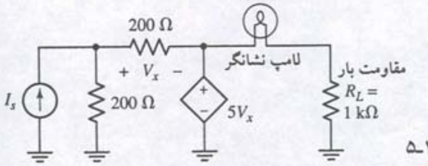
۵ـ۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها

۸۰. مدار شکل ۵ـ۱۱۷ـ مدل نسبتاً دقیقی برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی در ناحیه فعال مستقیم است. جریان کلکتور I_C را به‌دست‌آورید. صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید.



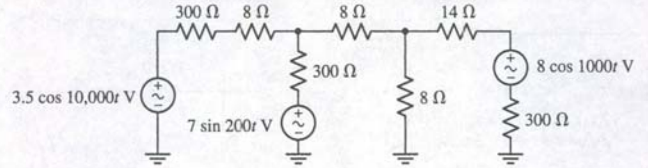
شکل ۵ـ۱۱۷

۸۱. مقاومت بار در شکل ۵ـ۱۱۸ می‌تواند به راحتی تا 1W توان را قبل از داغ‌شدن و آتش‌گرفتن تلف نماید. لامپ را می‌توان مقاومتی 10.6Ω تصور کرد، به‌شرطی‌که جریانی کمتر از 1A از آن عبور کند. برای بیش از 1A، مقاومت آن 15Ω می‌باشد. حداکثر مقدار مجاز I_s چقدر است؟ پاسخ خود را با PSpice تست کنید.



شکل ۵ـ۱۱۸

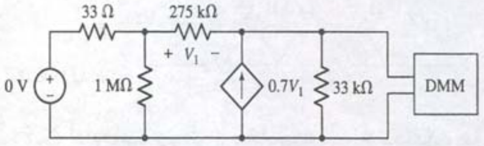
۸۲. گوش انسان می‌تواند امواج بین 20Hz تا 20kHz را بشنود. اگر هر مقاومت در شکل ۵ـ۱۱۹ یک بلندگوی 8Ω باشد، کدام‌یک از سیگنال ژنراتورها (که به‌عنوان یک منبع ولتاژ عملی مدل‌سازی می‌شود)



شکل ۱۱۹ـ۵

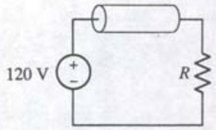
بیشترین صدا را تولید می‌کند؟ (بلندی صدا را متناسب با توان انتقالی به بلندگو تصور کنید) چون هر منبع در فرکانس متفاوتی عمل می‌کند، تجمیع توان در این‌جا قابل اعمال است.

۸۳. یک DMM طبق شکل ۱۲۰ـ۵ به مقاومتی وصل است. اگر مقاومت داخلی DMM برابر 1MΩ باشد، به هنگام اندازه‌گیری مقاومت، چه مقدار نمایش داده می‌شود؟



شکل ۱۲۰ـ۵

۸۴. یک ماده فلزی از یک شهاب‌سنگ در روستایی از ایالت ایندیانا یافت شده است. این ماده دارای مقاومت ویژه 50Ωcm بوده و در یک سیلندر جاسازی شده است. سیلندر به مدار شکل ۱۲۱ـ۵ وصل است و وابستگی‌های $T = 200P^{0.25}$°C دارد، که توان P انتقال‌یافته به سیلندر برحسب وات است. مقاومت ماده آنقدرها به دما وابستگی نشان نمی‌دهد. اگر $R = 10\Omega$ باشد و حداکثر توان را جذب کند، دمای سیلندر چقدر است؟



شکل ۱۲۱ـ۵

۸۵. به‌عنوان بخشی از یک سیستم حفاظتی، یک سیم 100Ω نازک به پنجره با ماده غیرهادی وصل است. با این فرض که فقط دوازده باطری قابل شارژ 1.5V، 1000 عدد مقاومت و یک بوق پیزو 2900Hz داشته باشیم که 15mA در 6V را می‌کشد، مداری طراحی کنید که بدون هر حرکت مکانیکی اجزاء در صورت شکسته‌شدن پنجره یا پاره‌شدن سیم، بوق را به‌صدا درآورد. توجه کنید که بوق به حداقل 6V dc نیاز دارد (حداکثر نیز 28V است).

۸۶. سه لامپ 45W دراصل به‌صورت یک شبکه Y با یک منبع 120V ac آرایش یافته است. وسط این اتصال با صفر آن به‌کارنرفته است. اگر شدت لامپ متناسب با توان کشیده‌شده به‌وسیله آن باشد، یک مدار جدید 120V ac طراحی کنید، به نحوی که سه لامپ آرایش Δ داشته و شدتی برابر با وضعیت Y داشته باشند. صحت طراحی را به‌وسیله PSpice با مقایسه توان مصرفی هر لامپ در مدار (آن‌ها را با مقاومت‌های مناسب مدل‌سازی نمایید) با توانی که هر کدام در شبکه Y مصرف می‌کردند، تحقیق کنید.

۸۷. یک LED قرمزرنگ مخصوص دارای حداکثر میزان جریان 35mA است و اگر از آن تجاوز کند، داغی و خرابی ناشی خواهد شد. مقاومت LED غیرخطی است، ولی سازنده حداقل مقاومت 47Ω و حداکثر 117Ω را برای آن اعلام کرده است. برای روشن‌کردن LED تنها باطری 9W موجود است. مداری طراحی کنید که بدون آسیب‌رساندن، حداکثر توان ممکن را به LED حمل کند. تنها از مقادیر استاندارد مقاومت استفاده نمایید.

فصل ششم

تقویت‌کننده عملیاتی

مقدمه

تاکنون به‌قدر کافی قوانین اصلی و تکنیک‌های تحلیل مدار به ما معرفی شده است تا بتوانیم آن‌ها را به چند مدار عملی جالب اِعمال کنیم. در این فصل ما بر یک وسیله الکتریکی مفید به نام تقویت‌کننده‌های عملیاتی[1] یا به‌طور خلاصه op amp توجه خواهیم کرد.

مفاهیم کلیدی

- مشخصات ایده‌آل op amp ها
- تقویت‌کننده‌های معکوس‌کننده و معکوس‌نکننده
- مدارهای تقویت‌کننده جمع و تفاضل
- طبقات op amp پی‌درپی
- استفاده از op amp در ساخت منابع ولتاژ و جریان
- مشخصات غیرایده‌آل op amp ها
- بهره ولتاژ و پسخورد
- مقایسه‌گرهای پایه مدارهای تقویت‌کننده در وسایل اندازه‌گیری

۱ـ۶ پیش‌زمینه

پیدایش تقویت‌کننده عملیاتی اولیه به دهه ۱۹۴۰ باز می‌گردد که در آن زمان مدارهای اصلی با استفاده از لامپ‌های خلاء برای انجام جمع، تفریق، تقسیم، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ساخته شد و به این ترتیب انجام آن‌ها با کامپیوترهای آنالوگ اولیه امکان‌پذیر گردید. این پیدایش ساخت کامپیوترهای آنالوگ (در برابر دیجیتال) را به دنبال داشت تا معادلات دیفرانسیل پیچیده را حل کند. اولین قطعه op amp تجاری که K2-W نام داشت، در حدود سال ۱۹۵۲ به وسیله .Philbrick Researches inc از بوستون ساخته شد و تا اول دهه ۱۹۷۰ ادامه یافت (شکل ۱ـ۶ (الف)). این قطعات لامپ خلاء[2] اولیه با ۳اونس وزن (85 g) و ابعاد "$1^{33}/_{64}$" × $2^{9}/_{64}$" × $4^{7}/_{64}$" (3.8 cm × 5.4 cm × 10.4 cm)، حدود US$0.22 فروخته می‌شد برعکس op amp های مدرن مدار مجتمع (IC) مانند Fairchild KA741 وزنی کمتر از 500 mg و ابعاد 5.7 mm × 4.9 mm × 1.8 mm داشته و تقریباً به US$0.22 فروخته می‌شوند.

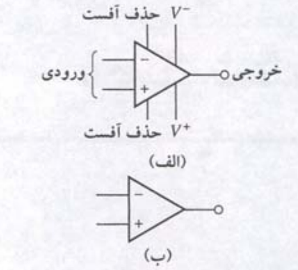
در مقایسه با op amp های مبتنی بر لامپ‌های خلاء، op amp های مدرن از حدود 25 ترانزیستور یا بیشتر به همراه چندین مقاومت و خازن جهت تولید مشخصه رفتاری مطلوب در یک تراشه سیلیکان ساخته شده‌اند. بنابراین آن‌ها در سطح ولتاژ تغذیه بسیار پایین‌تری (مثلاً ±18 V در برابر ±300 V مربوط به K2-W) کار می‌نمایند و قابل اطمینان‌تر و کوچکتر‌ند (شکل ۱ـ۶(ب) و (ج)). در بعضی موارد IC ممکن‌است چندین op amp داشته باشد.

(الف) (ب) (ج)

شکل ۱ـ۶ مدار Philbrick op amp K2-W بر اساس یک جفت لامپ خلاء 12AX7A. (ب) LMV321 op amp که در انواع تلفن‌ها و بازی‌ها به کار می‌رود. (ج) LMC6035 op amp که در آن ۱۱۴ ترانزیستور فشرده‌شده و به قدری کوچک است که در بالای یک میخ قرار می‌گیرد.

1. operational amplifier 2. vacuum tube

علاوه بر پایه خروجی و دو پایه ورودی، پایه‌های دیگری وجود دارند که از طریق آن‌ها انرژی لازم برای روشن‌شدن ترانزیستورها، تنظیم‌های بیرونی برای بالانس و جبران خروجی op amp، فراهم می‌گردد. سمبل یا نماد به‌کاررفته برای یک تقویت‌کننده عملیاتی در شکل ۲ـ۶(الف) ملاحظه می‌شود. در این‌جا ما به مدار درونی op amp یا IC کاری نداریم، بلکه فقط روابط ولتاژ و جریان بین پایانه‌های ورودی و خروجی را بررسی خواهیم کرد. بنابراین فعلاً نماد الکتریکی ساده‌تری مطابق شکل ۲ـ۶(ب) را به‌کار می‌بریم. دو پایانه ورودی در سمت چپ و تنها پایانه خروجی در سمت راست دیده می‌شوند. پایانه‌ای که با "+" علامت خورده است به ورودی معکوس‌نکننده یا (غیرمعکوس‌گر) و "−"ورودی معکوس‌کننده یا (معکوس‌گر و یا وارونگر) معروفند.



شکل ۲ـ۶ (الف) نماد الکتریکی op amp. (ب) حداقل اتصال‌های لازم برای نمایش شماتیک op amp.

۲ـ۶ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل

مهندسین مدارهای مجتمع هنگام طراحی یک op amp، می‌کوشند تا مشخصه مدار حاصل ایده‌آل باشد. در عمل خواهیم دید که اغلب تقویت‌کننده‌ها چنان خوب کار می‌کنند که می‌توان آن‌ها را ایده‌آل فرض کرد. مشخصه‌های یک op amp ایده‌آل، مبنای دو اصل یا قاعده اساسی را که تا حدی غیرعادی است تشکیل می‌دهند.

> قواعد یک op amp ایده‌آل:
>
> ۱. هیچ جریانی از هیچ‌یک از پایانه‌های ورودی داخل نمی‌شود.
>
> ۲. بین دو پایانه ورودی اختلاف پتانسیلی وجود ندارد.

در یک op amp واقعی جریان نشتی بسیار کمی به ورودی وارد می‌شود (گاهی به کوچکی 40 femtoamps). همچنین ممکن‌است در بعضی مواقع اختلاف پتانسیل کوچکی بین دو پایانه ورودی مشاهده کرد. با این وجود در مقایسه با دیگر ولتاژها و جریان‌ها در مدار این مقادیر آن‌قدر کوچکند که لحاظ آن‌ها در تحلیل، معمولاً تغییری در محاسبات ما نمی‌دهد.

هنگام تحلیل مدار op amp، یک نکته دیگر را باید به‌خاطر بسپاریم. برخلاف مدارهایی که تاکنون مطالعه کرده‌ایم، مدار op amp همواره بسته به **ورودی**، دارای **خروجی** است. بنابراین ما مدارهای op amp را با هدف دستیابی به عبارتی برای خروجی برحسب کمیت‌های ورودی بررسی خواهیم کرد. معمولاً بهتر است تحلیل مدار op amp را از ورودی شروع و به سمت خروجی پیش ببریم.

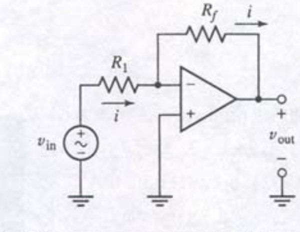
مدار شکل ۳ـ۶ به‌نام **تقویت‌کننده معکوس‌گر** شناخته می‌شود. ما این مدار را با شروع از منبع ولتاژ ورودی برای تحلیل به کمک KVL انتخاب کرده‌ایم. جریان i فقط از مقاومت‌های R_1 و R_f عبور می‌کند. اولین قاعده op amp ایده‌آل بیان می‌کند که هیچ جریانی وارد پایانه معکوس‌گر نمی‌گردد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$-v_{in} + R_1 i + R_f i + v_{out} = 0$$

و می‌توان آن را طوری مرتب کرد که ورودی را به خروجی مرتبط سازد:

$$v_{out} = v_{in} - (R_1 + R_f)i \qquad (1)$$

ولی اکنون یک معادله و دو مجهول داریم، زیرا $v_{in} = 5\sin 3t$ mV و $R_1 = 4.7$ kΩ و $R_f = 47$kΩ می‌باشد. پس برای محاسبه ولتاژ خروجی نیاز به یک معادله دیگر است تا i را فقط برحسب v_{out} و v_{in}، R_1 و R_f بیان دارد.



شکل ۳ـ۶ op amp برای ساختن یک تقویت‌کننده معکوس‌گر به‌کاررفته است و در آن $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV، $R_1 = 4.7$ kΩ و $R_f = 47$ kΩ می‌باشد.

اکنون زمان مناسبی است تا متذکر شویم ما هنوز از قاعده ۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل استفاده نکرده‌ایم. چون ورودی معکوس‌نکننده به زمین وصل است، ولتاژ آن در صفر است. طبق قاعده ۲ از op amp، ورودی معکوس‌گر نیز در صفر ولت است. این بدان معنی نیست که دو ورودی به‌طور فیزیکی به هم اتصال دارند و ما نیز نباید چنین فرض‌هایی کنیم. در واقع دو ولتاژ یکدیگر را دنبال می‌کنند: اگر ما سعی در تغییر ولتاژ یک پایه بکنیم، پایه دیگر به سمت آن خواهد رفت. بنابراین می‌توان یک معادله KVL دیگر نوشت:

$$-v_{in} + R_1 i + 0 = 0$$

یا

$$i = \frac{v_{in}}{R_1} \qquad (۲)$$

با ترکیب معادلات (۲) و (۱)، عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} خواهیم داشت:

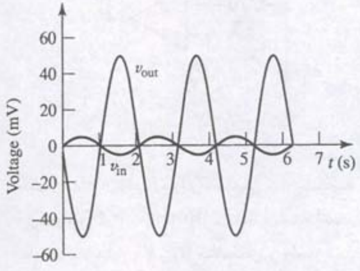
$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in} \qquad (۳)$$

با جایگزینی $v_{in} = 5\sin 3t$ mV، $R_1 = 4.7$kΩ و $R_f = 47$kΩ داریم:

$$v_{out} = -50\sin 3t \text{ mV}$$

چون در چنین آرایشی پایانهٔ ورودی معکوس‌گر ولتاژ صفر پیدا می‌کند به آن نام زمین مجازی می‌دهند. این به معنی زمین‌شدن این پایانه نیست. این نام گاهی منشا بروز اشتباه در دانشجویان می‌شود. تمام کارهای لازم برای ممانعت از ایجاد اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های ورودی در درون op amp انجام می‌شود. پایانه‌های ورودی به هم اتصال کوتاه نمی‌شوند.

فرض کرده بودیم $R_f > R_1$، پس این مدار سیگنال ورودی v_{in} را تقویت می‌کند. اگر $R_f < R_1$ باشد مدار سیگنال ورودی را تضعیف خواهد کرد. همچنین توجه کنید که علامت ولتاژ خروجی مخالف ورودی است و به این دلیل نام **تقویت‌کننده معکوس‌گر** برای آن اختیار شده است. شکل ۴ـ۶ به منظور مقایسه، خروجی در برابر ورودی ترسیم شده است.



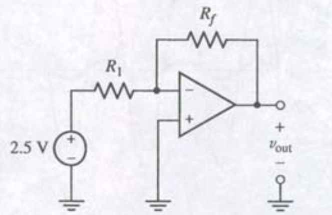
شکل ۴ـ۶ شکل موج‌های ورودی و خروجی در مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر.

در این‌جا چنین به‌نظر می‌رسد که op amp ایده‌آل قانون KCL را نقض کرده است. خصوصاً این‌که هیچ جریانی از پایانه‌های ورودی وارد یا خارج نمی‌شود، ولی تا مقداری جریان از پایانه خروجی را داریم! شاید این وضعیت اینگونه تعبیر شود که op amp به نوعی از هیچ، الکترون تولید می‌کند و یا آن‌ها را همواره و برای همیشه نابود می‌نماید (بسته به جهت جریان). مسلماً این امکان‌پذیر نیست. مشکل این‌جا است که ما op amp را به همان طریق عناصر غیرفعال مورد توجه قرار داده‌ایم. در واقع، op amp نمی‌تواند کار کند مگر این‌که به منبع بیرونی وصل شده باشد و در واقع جریان پایانه خروجی آن از این منابع تأمین می‌شود.

هرچند نشان دادیم که مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ می‌تواند یک سیگنال ac را تقویت کند (در این‌جا یک موج سینوسی با فرکانس 3 rad/s و دامنه 5 mV)، با ورودی dc هم به همان خوبی کار می‌کند. ما این نوع عملکرد را در شکل ۵ـ۶ بررسی می‌کنیم، که مقادیر R_1 و R_f طوری انتخاب می‌شوند که ولتاژ خروجی حاصل ‎-10 V‎ باشد.

این همان مداری است که در شکل ۳ـ۶ ملاحظه کردیم ولی ولتاژ dc ورودی 2.5 V است. چون تغییر دیگری به عمل نیامده است، عبارتی که در معادله (۳) آمده است برای این مدار هم معتبر است. برای به‌دست‌آوردن خروجی مطلوب، ما به دنبال نسبت R_f به R_1 به مقدار 10/2.5 یا 4 هستیم. چون تنها نسبت اهمیت دارد، فقط کافی است که مقدار مناسبی را برای یک مقاومت انتخاب کنیم، آنگاه مقدار دومی مشخص خواهد شد. مثلاً ما می‌توانیم $R_1 = 100\ \Omega$ را برگزینیم (بنابراین $R_f = 400\ \Omega$ است) یا حتی $R_f = 8$ MΩ را انتخاب کنیم (که در این‌صورت $R_1 = 2$ MΩ است) و در عمل قیودی دیگر ممکن‌است انتخاب‌های ما را محدودتر سازند (مانند جریان تغذیه).

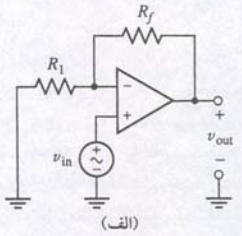
بنابراین آرایش مدار همچون یک نوع تقویت‌کننده معمولی ولتاژ کار می‌کند (یا یک تضعیف‌کننده، اگر نسبت R_f به R_1 کمتر از 1 باشد)، ولی به نوعی خاصیت غیرمعمول تغییر علامت ورودی را دارد. با این وجود راه دیگری هم وجود دارد که به همان سادگی قابل تحلیل است ـ تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر در شکل ۶ـ۶ نشان داده شده است. ما چنین مداری را در مثال زیر بررسی می‌کنیم.

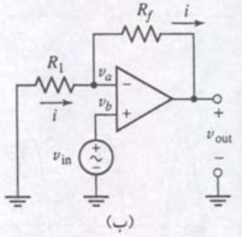


شکل ۵ـ۶ یک مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر با 2.5 V ورودی.

مثال ۱ـ۶

شکل موج خروجی را برای مدار op amp معکوس‌نکننده شکل ۶ـ۶ (الف) رسم نمایید. از $v_{in} = 5\sin3t$ mV، $R_1 = 4.7k\Omega$ و $R_f = 47k\Omega$ استفاده کنید.





شکل ۶ـ۶ (الف) برای ساختن تقویت‌کنندهٔ غیرمعکوس‌گر از op amp استفاده شده است. (ب) جریان‌های R_1 و R_f مشخص و ولتاژهای پایانه‌های ورودی نامگذاری شده است.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

ما به دنبال عبارتی برای v_{out} هستیم که فقط به کمیت‌های معلوم v_{in}، R_1 و R_f وابسته باشد.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

چون مقادیر مقاومت‌ها و ورودی مشخص شده‌اند ما با نامگذاری جریان i، و دو ولتاژ ورودی طبق شکل ۶ـ۶ (ب) شروع می‌کنیم. ضمناً فرض می‌کنیم که op amp ایده‌آل است.

- **ارائه طرح.**

گرچه تحلیل مش روش مناسبی برای دانشجویان است، ولی به‌نظر می‌رسد که برای op amp، تحلیل گرهی عملی‌تر است، زیرا راه مستقیمی برای تعیین جریان خارج‌شده از op amp وجود ندارد.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

دقت کنید که ما قاعده ۱ مربوط به op amp را به‌کار می‌بریم و جریان یکسانی را در دو مقاومت فرض می‌کنیم: یعنی هیچ جریانی وارد پایانه ورودی نمی‌گردد. با استفاده از تحلیل گرهی برای یافتن عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} خواهیم داشت:

$$0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f} \qquad \text{در گره } a \qquad (۴)$$

$$v_b = v_{in} \qquad \text{در گره } b \qquad (۵)$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**

هدف یافتن عبارتی است که ولتاژ خروجی را برحسب ولتاژ ورودی به‌دست‌دهد. زیرا به‌نظر نمی‌رسد که معادله (۴) یا (۵) این کار را انجام دهند. معهذا ما هنوز قاعده ۲ تقویت‌کننده ایده‌آل را به کار نبرده‌ایم و خواهیم دید که تقریباً در هر مدار تقویت‌کننده، هر دو قاعده باید به‌کاروند تا چنین عبارتی به‌دست‌آید. بنابراین داریم: $v_a = v_b = v_{in}$ و معادله (۴) چنین خواهد شد:

$$0 = \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{in} - v_{out}}{R_f}$$

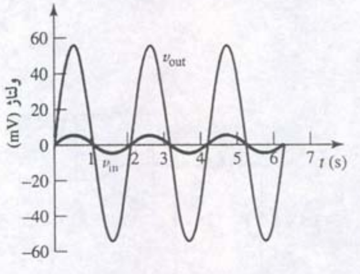
- **اقدام به حل.**

با مرتب‌کردن عبارت فوق، عبارتی برای ولتاژ خروجی برحسب ورودی v_{in} خواهیم داشت:

$$v_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)v_{in} = 11v_{in} = 55\sin3t \text{ mV}$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟**

به‌منظور مقایسه، موج خروجی همراه با موج ورودی در شکل ۶ـ۷ ترسیم شده است. برخلاف شکل موج خروجی تقویت‌کننده معکوس‌گر، ورودی و خروجی برای نوع معکوس‌نکننده (غیرمعکوس‌گر) هم‌فازند. البته نباید چنین انتظار نداشت: این وضعیت از نام آن مشهود است. توجه کنید که این مدار قادر نیست فرکانس شکل موج را اصلاح کند، بلکه فقط روی دامنه آن اثر دارد.

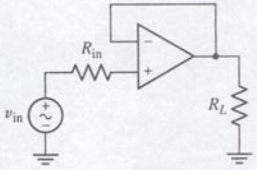


شکل ۶ـ۷ شکل موج‌های ورودی و خروجی مدار تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر.

تمرین

۶ـ۱ عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} برای مدار شکل ۶ـ۸ به‌دست‌آورید.

جواب: $v_{out} = v_{in}$. مدار به‌نام "دنبالگر ولتاژ" معروف است، زیرا ولتاژ خروجی، ولتاژ ورودی را ردیابی یا دنبال می‌کند.



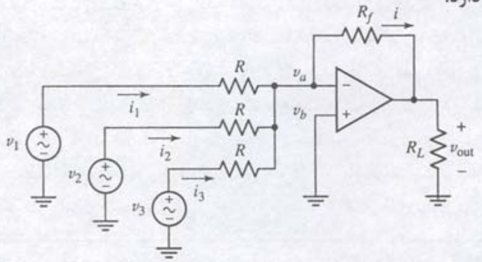
شکل ۶ـ۸

درست همچون تقویت‌کننده معکوس‌گر، تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر هم با ورودی‌های dc و ac کار می‌کند، ولی دارای بهره ولتاژ $v_{out}/v_{in} = 1 + (R_f/R_1)$ است. بنابراین اگر ما $R_f = 9\Omega$ و $R_1 = 1\Omega$ را انتخاب کنیم، ولتاژ خروجی v_{out}، ۱۰ برابر بزرگتر از ولتاژ ورودی v_{in} خواهد بود. برعکس تقویت‌کننده معکوس‌گر، خروجی و ورودی تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر (یا معکوس‌نکننده) دارای علامت یکسانی هستند و ولتاژ خروجی نمی‌تواند کمتر از ورودی باشد؛ زیرا حداقل بهره برابر 1 است. تقویت‌کننده‌ای که انتخاب می‌شود به کاربرد موردنظر ما بستگی دارد. در حالت خاص مدار دنبالگر ولتاژ شکل ۶ـ۸، نمایش‌دهنده یک تقویت‌کننده غیرمعکوس‌کننده است که در آن R_1 در ∞ و R_f در صفر تنظیم شده است. خروجی به لحاظ علامت و مقدار با ورودی برابر است. شاید این مدار به عنوان یک نوع مدار قابل طرح نباشد، ولی ما باید به خاطر بسپاریم که دنبالگر ولتاژ جریانی از ورودی نمی‌کشد (البته در حالت ایده‌آل) ـ یعنی می‌تواند بین ولتاژ ورودی v_{in} و یک بار مقاومتی که به خروجی تقویت‌کننده وصل است، R، به عنوان بافر عمل کند.

ما قبلاً ذکر کردیم نام "تقویت‌کننده عملیاتی" از استفاده از چنین وسایلی که اعمال حسابی روی سیگنال‌های آنالوگ انجام دهد نشأت گرفته است (آنالوگ یعنی غیر دیجیتال، بلادرنگ، دنیای واقعی). همان‌طور که ما در دو مثال زیر خواهیم دید، این شامل هر دو عمل جمع و تفریق سیگنال‌های ورودی است.

مثال ۲ـ۶

برای مدار op amp شکل ۶ـ۹، v_{out} را برحسب v_1، v_2 و v_3 به‌دست‌آورید. این مدار تقویت‌کننده مجموع هم نام دارد.



شکل ۶ـ۹ مدار تقویت‌کنندهٔ مجموع سه ورودی.

در آغاز ملاحظه می‌شود که مدار فوق مشابه با مقدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۶ـ۳ است. مجدداً هدف به‌دست‌آوردن عبارتی برای v_{out} (که در این حالت ولتاژ دو سر R_L است) برحسب ورودی‌های (در اینجا v_1، v_2 و v_3) می‌باشد. چون هیچ جریانی نمی‌تواند وارد پایانه معکوس‌کننده شود، می‌دانیم:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

بنابراین می‌توانیم معادله زیر را در گره v_a بنویسیم:

$$0 = \frac{v_a - v_{out}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} + \frac{v_a - v_3}{R}$$

این معادله حاوی v_{out} و ولتاژهای ورودی است، ولی متأسفانه ولتاژ گرهی v_a نیز در آن هست. برای حذف این کمیت نامشخص از عبارت فوق، باید معادله دیگری که v_a را به v_{out}، ولتاژهای ورودی، R_f و R ربط دهد بنویسیم. در این‌جا به‌خاطر می‌آوریم که هنوز قاعده ۲ تقویت‌کننده عملیاتی را به‌کاربرده‌ایم و مطمئناً استفاده از هر دو قاعده را هنگام تحلیل مدار لازم داریم. بنابراین چون $v_a = v_b = 0$ است می‌توان نوشت:

$$0 = \frac{v_{out}}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_3}{R}$$

با مرتب‌کردن رابطه فوق عبارتی برای v_{out} به‌دست‌می‌آید:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3) \qquad (۶)$$

و در حالت خاص که $v_2 = v_3 = 0$ است می‌بینیم که نتیجه ما با معادله (۳) توافق دارد که برای مدار مشابهی طراحی شد.

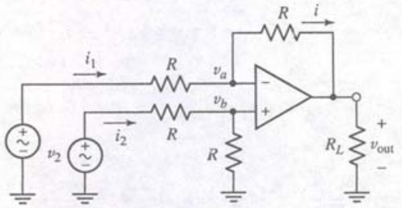
در این نتیجه چندین نکته جالب دیده می‌شود، اول این‌که اگر $R_f = R$ باشد، آن‌گاه خروجی منفی مجموع v_1، v_2 و v_3 است. علاوه‌برآن ما می‌توانیم نسبت R_f را به R انتخاب کنیم تا جمع را در مقدار ثابتی ضرب کند. بنابراین، به عنوان مثال اگر سه ولتاژ سیگنال‌هایی را از سه منبع با مقیاس جداگانه نشان دهند، و طوری کالیبره شده باشند که $-1\ V = 1\ lb$ (lb برابر با پاوند وزن است)، می‌توانیم $R_f = R/2.205$ را برای یافتن ولتاژی که نمایش‌دهنده ترکیب وزن به کیلوگرم است، انتخاب کنیم (به دلیل ضریب تبدیل با خطایی حدود 1 درصد).

همچنین می‌بینید که R_L در عبارت نهایی به چشم نمی‌خورد. مادامی که R_L خیلی کوچک نباشد، روی عملکرد مدار تأثیری ندارد. در حال حاضر ما موضوع را تا آن حد دقیق بررسی نکرده‌ایم که این مسائل پیش‌بینی شود. این مقاومت درواقع معادل تونن وسیله‌ای را نشان می‌دهد که به خروجی op amp وصل می‌باشد. اگر وسیله خروجی یک ولتمتر ساده باشد، آن‌گاه R_L همان مقاومت معادل تونن در دو پایانه ولتمتر است (حدود $10M\Omega$ یا بیشتر). همچنین ممکن‌است وسیله خروجی یک بلندگو باشد (معمولاً 8Ω)، که در این‌صورت صدای سه منبع را خواهیم شنید، در این‌حالت v_1، v_2 و v_3 می‌توانند میکروفون‌ها را نشان دهند.

یک نکته احتیاطی: اغلب بالاجبار تصور می‌شود که جریان i در شکل ۹-۶ نه فقط از R_f که از R_L نیز عبور می‌کند. ولی این‌چنین نیست! ممکن‌است جریان وارد پایانه op amp هم بشود، بنابراین جریان داخل دو مقاومت برابر نیستند. به این دلیل از نوشتن معادلات کیرشهف، KCL در پایانه خروجی op amp خودداری می‌کنیم. چون جریان خروجی op amp نامعلوم است، تحلیل گرهی بر مش در بسیاری از مدارهای op amp ارجحیت دارد.

تمرین

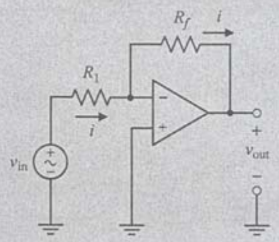
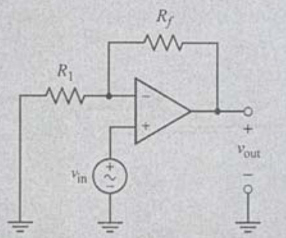
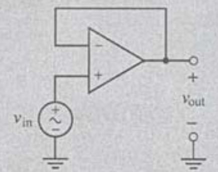
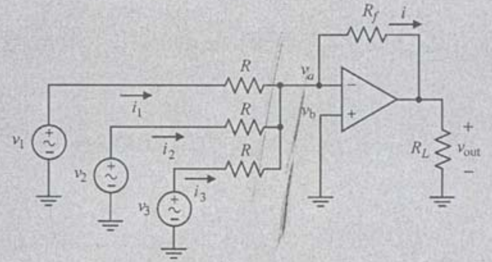
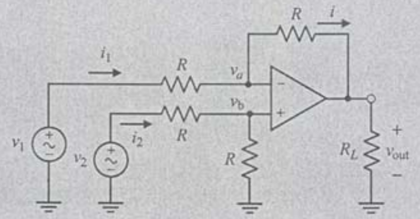
۲-۶ عبارتی برای v_{out} برحسب v_1 و v_2 در شکل ۱۰-۶ به‌دست‌آورید. این مدار به تقویت‌کننده تفاضلی معروف است.



شکل ۱۰-۶

جواب: $v_{out} = v_2 - v_1$. راهنمایی: برای به‌دست‌آوردن v_b از تقسیم ولتاژ استفاده نمایید.

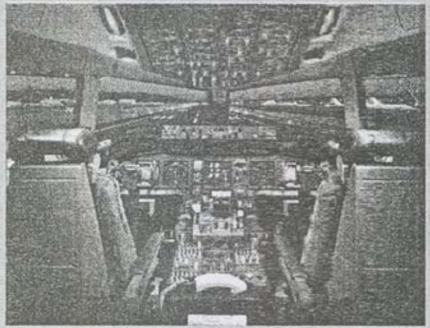
جدول ۱-۶ خلاصه مدارهای op amp پایه.

Input-Output Relation	Circuit Schematic	Name
$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in}$		تقویت‌کننده معکوس‌گر
$v_{out} = (1 + \frac{R_f}{R_1}) v_{in}$		تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر
$v_{out} = v_{in}$		دنبال‌گر ولتاژ (به آن تقویت‌کننده بهره واحد می‌گویند)
$v_{out} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$		تقویت‌کننده مجموع
$v_{out} = v_2 - v_1$		تقویت‌کننده تفاضل‌گر

کاربرد عملی

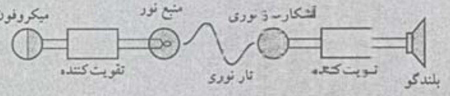
سیستم درون ارتباطی فیبر نوری

سیستم ارتباط درونی بین دو نقطه را می‌توان بسته به محیط مورد استفاده، به روش‌های متعددی برپا کرد. سیستم‌های فرکانس رادیویی توان پایین خوب کار می‌کنند. ولی در معرض تداخل دیگر امواج RF و استراق سمع می‌باشند. استفاده از یک سیم ساده برای اتصال میکروفون به یک بلندگو بسیاری از تداخل‌های RF را حذف می‌کند (البته به همراه یک تقویت‌کننده مناسب). ولی سیم‌ها به علت فرسایش روکش در معرض خوردگی و اتصالی هستند و نیز وزن آن‌ها در هواپیماها و کاربردهای نظیر آن مسئله‌ساز است (شکل ۱۱ـ۶).



شکل ۱۱ـ۶ این محیط کاربرد اغلب قیدهای طراحی را تعیین می‌کند.

روش دیگر تبدیل سیگنال الکتریکی از میکروفون به یک سیگنال نوری است، که می‌تواند از فیبر نوری نازک با قطر حدود $50\mu m$ انتقال یابد. آنگاه سیگنال نوری دوباره به سیگنال الکتریکی برگردانده شده و پس از تقویت به بلندگو ارسال می‌گردد. نمودار شماتیک چنین سیستمی در شکل ۱۲ـ۶ مشاهده می‌گردد. برای مخابره دوطرفه، دو سیستم از این نوع لازم است.

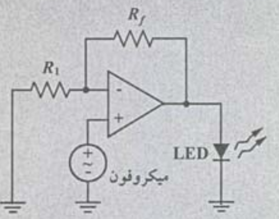


شکل ۱۲ـ۶ نمودار یک سیستم مخابراتی سادهٔ فیبر نوری.

ما ارسال و دریافت سیگنال نوری را جداگانه بررسی خواهیم کرد، زیرا در واقع مدار الکتریکی آن‌ها مستقل از یکدیگرند. شکل ۱۳ـ۶ مدار مولد سیگنال را نشان می‌دهد و شامل یک میکروفون، یک دیود تولیدکننده نور (LED)، و یک مدار تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر برای راه‌اندازی LED است. آنچه دیده نمی‌شود اتصالات لازم انرژی برای خود op amp ها است. نور خارج‌شده از LED حدوداً متناسب با جریان آن است. می‌دانیم که بهره ولتاژ تقویت‌کننده با رابطه زیر داده می‌شود،

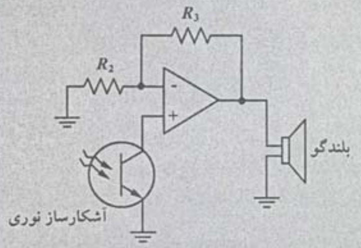
$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

که مستقل از مقاومت LED است. با انتخاب مقدار R_1 و R_f، ما باید ولتاژ ورودی از میکروفون و خروجی لازم به بلندگو را بدانیم تا LED را روشن کنیم. یک اندازه‌گیری ساده نشان می‌دهد که حداکثر ولتاژ خروجی میکروفون وقتی که از صوت معمولی استفاده می‌کند، حدود 40mV است. طبق مشخصات سازندگان حداکثر ولتاژ دو سر LED برابر 1.6V است. بهره طراحی را $40 = 1.6/0.04$ اختیار می‌نماییم. با انتخاب $R_1 = 1\ k\Omega$، مقدار $R_f = 39\ k\Omega$ خواهد شد.



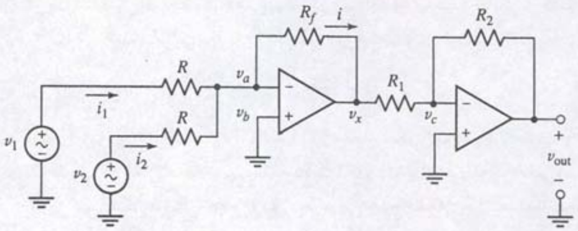
شکل ۱۳ـ۶ مدار تبدیل سیگنال الکتریکی حاصل از میکروفون به سیگنال نوری.

مدار شکل ۱۴ـ۶ بخش گیرنده سیستم ارتباط درونی ما است. این مدار، سیگنال نوری را از فیبر به سیگنال الکتریکی تبدیل می‌کند به نحوی که صدای قابل شنودی از بلندگو شنیده می‌شود.



شکل ۱۴ـ۶ مدار گیرنده برای تبدیل سیگنال نوری به سیگنال صوتی.

پس از اتصال خروجی LED به فیبر نوری، سیگنالی حدود 10mV (حداکثر) به وسیله آشکارساز نوری اندازه‌گیری می‌شود. بلندگو با حداکثر توان 100mV و مقاومت معادل 8Ω انتخاب شده است. پس ولتاژ ماکزیمم مجاز آن 894mV است. بنابراین باید با انتخاب R_2 و R_3 تقویت‌کننده‌ای با بهره $894/10 = 89.4$ طراحی کنیم. با انتخاب $R_2 = 10k\Omega$ می‌بینیم که باید $R_3 = 884k\Omega$ باشد و به این ترتیب طراحی پایان می‌یابد. در عمل مدار کار خواهد کرد ولی به دلیل غیرخطی‌بودن LED صوت حاصل کمی اعوجاج‌دار خواهدبود. ما اثبات طراحی را به متون پیشرفته‌تر الکترونیک محول می‌کنیم.



شکل ۱۵ـ۶ یک مدار op amp دو طبقهٔ تشکیل‌شده از یک تقویت‌کنندهٔ جمع‌کننده و یک مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر.

۳ـ۶ طبقات پی‌درپی

گرچه op amp وسیله کاملاً انعطاف‌پذیری است، کاربردهای بسیار زیادی وجود دارند که یک op amp برای آن کفایت نمی‌کند. در این موارد، می‌توان نیازهای کاربرد را با اتصال پی‌درپی (متوالی) چند op amp در یک مدار مرتفع کرد. مثالی از این نوع در شکل ۱۵ـ۶ ملاحظه می‌گردد، که متشکل از مدار تقویت‌کننده مجموع شکل ۹ـ۶ با تنها دو منبع ورودی است و خروجی آن به یک تقویت‌کننده ساده معکوس‌گر متصل است. نتیجه این کار یک مدار op amp دو طبقه یا دو مرحله است.

ما قبلاً هر یک از این دو مدار را به‌طور جداگانه تحلیل کردیم. بر اساس تجربیات قبلی‌مان، اگر دو تقویت‌کننده جدا از هم باشند انتظار داریم که:

$$v_x = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \tag{۷}$$

و

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1}v_x \tag{۸}$$

در واقع چون دو مدار به یک نقطه وصلند و ولتاژ v_x با این اتصال تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد، ما می‌توانیم معادلات (۷) و (۸) را ترکیب کنیم:

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \tag{۹}$$

که مشخصه ورودی ـ خروجی مدار شکل ۱۵ـ۶ را توصیف می‌نماید. ما ممکن است همیشه نتوانیم چنین کاهشی انجام داده و طبقات را شناسایی کنیم. بنابراین ارزشمند است که ببینیم چگونه یک مدار دوطبقه شکل ۱۵ـ۶ به‌طور کلی قابل تحلیل است.

وقتی که مدارهای پی‌درپی را تحلیل می‌کنیم، بهتر است از طبقه آخر شروع کرده و به سمت طبقه ورودی باز گردیم. با توجه به قاعده 1 در op amp ایده‌آل، از هر دو مقاومت R_1 و R_2 جریان یکسانی عبور می‌کند. با نوشتن معادله گرهی مناسبی در نقطه v_c داریم:

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{out}}{R_2} \tag{۱۰}$$

با اعمال قاعده ۲ در یک op amp ایده‌آل، می‌توان در معادله (۸)، $v_c = 0$ را درنظرگرفت. درنتیجه:

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} \tag{۱۱}$$

چون هدف یافتن v_{out} برحسب v_1 و v_2 است به اولین op amp باز می‌گردیم تا v_x را برحسب دو کمیت ورودی به‌دست آوریم.

با اعمال قاعده ۱ تقویت‌کننده در ورودی معکوس‌کننده اولین op amp داریم:

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \tag{۱۲}$$

قاعده ۲ تقویت‌کننده ایده‌آل اجازه می‌دهد تا v_a را در معادله (۱۲) با صفر جایگزین کنیم چون $v_a = v_b = 0$ می‌باشد. بنابراین معادله (۱۲) چنین خواهد شد:

$$0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} \qquad (۱۳)$$

اکنون معادله‌ای برای v_{out} برحسب v_x (معادله ۱۱) و معادله دیگری برای v_x برحسب v_1 و v_2 (معادله ۱۳) داریم. این معادلات به ترتیب با معادلات (۷) و (۸) برابرند و به این معنی است که اتصال پی‌درپی طبق شکل ۶ـ۱۵ رابطه ورودی ـ خروجی هیچ طبقه‌ای را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. با ادغام معادلات (۱۱) و (۱۳) می‌بینیم که رابطه ورودی ـ خروجی برای op amp پی‌درپی یا متوالی برابر است با:

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{R_f}{R}\,(v_1 + v_2) \qquad (۱۴)$$

که با معادله (۹) برابر است.

بنابراین مدار پی‌درپی همچون تقویت‌کننده مجموع، ولی بدون معکوس‌کردن فاز بین ورودی و خروجی عمل می‌کند. با انتخاب دقیق مقاومت، می‌توان مجموع دو ولتاژ ورودی را تقویت یا تضعیف کرد. اگر $R_2=R_1$ و $R_f=R$ باشد، می‌توان مداری با خروجی $v_{out} = v_1 + v_2$ داشت.

مثال ۶ـ۳

یک سیستم سوخت گازی چندتانکی در یک ماهواره کوچک نصب است. مقدار سوخت در هر تانک با اندازه‌گیری فشار (به psia[1]) ردیابی می‌شود. جزئیات تکنیکی ظرفیت تانک و فشار سنسور و محدوده ولتاژ در جدول ۲ـ۶ داده شده است. مداری طراحی کنید که یک ولتاژ مثبت dc را برای باقیمانده سوخت، مثلاً $100\% = 1\ \text{V}$ را فراهم کند.

جدول ۲ـ۶ داده‌های تکنیکی سیستم ردیابی فشار.

ظرفیت تانک ۱	10,000 psia
ظرفیت تانک ۲	10,000 psia
ظرفیت تانک ۳	2000 psia
محدوده فشار سنسور	0 to 12,500 psia
ولتاژ خروجی سنسور	0 to 5 Vdc

©Corbis

از جدول ۲ـ۶ ملاحظه می‌شود که سیستم دارای سه تانک گاز جداگانه است و بنابراین سنسورهای جداگانه‌ای لازم است. هر سنسور می‌تواند در ازای فشاری از 12500 psia تا 5 V متناظر آن را تولید کند. بنابراین وقتی تانک ۱ پر است، سنسور آن $5 \times (10000/12500) = 4\ \text{V}$ را تولید خواهد کرد. وضع مشابهی برای ردیاب تانک ۲ وجود دارد. با این وجود سنسور متصل به تانک ۳ حداکثر $5 \times (2000/12500) = 800\ \text{mV}$ را تولید خواهد کرد.

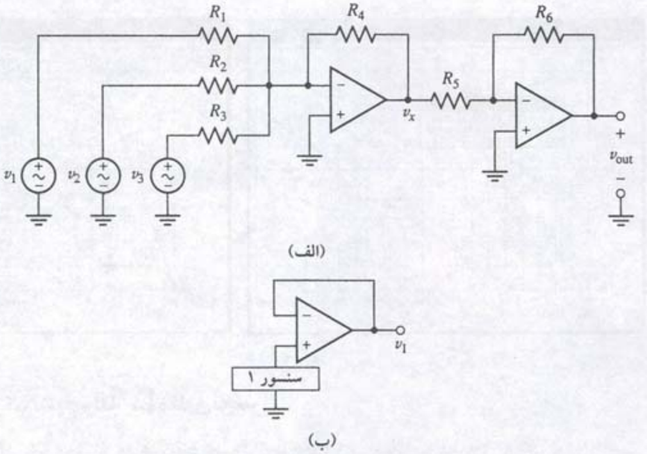
یک راه‌حل ممکن مدار شکل ۶ـ۱۶ (الف) است که از یک طبقه تقویت‌کننده مجموع تشکیل شده و v_1، v_2 و v_3 خروجی‌های سه سنسور را نشان می‌دهد، و به دنبال آن یک تقویت‌کننده معکوس‌گر آمده است که برای تنظیم مقدار و علامت ولتاژ است. چون مقاومت خروجی سنسور به ما گفته نشده است، ما بافری مطابق شکل ۶ـ۱۶ (ب) را برمی‌گزینیم، در نتیجه جریان از سنسور جاری نخواهد شد.

برای حفظ سادگی طراحی، ما با انتخاب R_1، R_2، R_3 و R_4 به مقدار 1 kΩ شروع می‌کنیم، البته هر مقدار کار را مادامی که هر چهار مقاومت مساوی باشند انجام می‌دهد. بنابراین خروجی طبقه جمع‌کننده برابر است با:

$$v_x = -(v_1 + v_2 + v_3)$$

مرحله آخر باید این ولتاژ را معکوس کرده و آن را طوری مقیاس‌بندی کند که ولتاژ خروجی 1 V در ازای پربودن هر سه تانک حاصل گردد. نتیجه حالت پر عبارت است از $v_x = -(4 + 4 + 0.8) = -8.8\ \text{V}$. بنابراین آخرین حالت به نسبت ولتاژ $R_6/R_5 = 1/8.8$ نیاز دارد. با انتخاب اختیاری $R_6 = 1\ \text{k}\Omega$ ما درمی‌یابیم که باید $R_5 = 8.8\ \text{k}\Omega$ باشد تا طرح تکمیل گردد.

۱. پاوند بر اینچ مربع. این یک اندازه‌گیری اختلاف فشار نسبت به خلاء است.

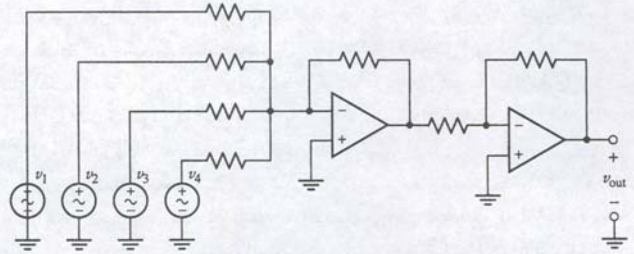


شکل ۶ـ۱۶ (الف) مدار پیشنهادی برای خواندن مانده سوخت. (ب) طراحی بافر برای پرهیز از خطاهای مربوطه با مقاومت سنسور و محدودیت‌های ناشی از توانایی تهیه جریان. چنین بافری برای هر سنسور به کار می‌رود و به این ترتیب ورودی‌های v_1، v_2 و v_3 برای طبقه تقویت‌کننده مجموع فراهم می‌گردد.

تمرین

۶ـ۳ یک پل تاریخی در حال نابودی است. تا بازسازی آن، تصمیم بر این است که فقط اتومبیل‌های زیر 1600 kg وزن اجازه عبور داشته باشند. برای ردیابی آن، یک سیستم توزین طراحی شده است. چهار سیگنال ولتاژ مستقل از چهار گوشه سیستم توزین اخذ شده است که در آن $1\ \text{mV} = 1\ \text{kg}$ است. مداری طراحی کنید تا سیگنال ولتاژ مثبتی را روی یک DMM (مولتی‌متر دیجیتال) به عنوان وزن کل خودرو نشان دهد به نحوی که $1\ \text{mV} = 1\ \text{kg}$ باشد. شما می‌توانید تصور کنید که برای سیگنال ولتاژ حاصل از سنسورها نیازی به بافر نیست.

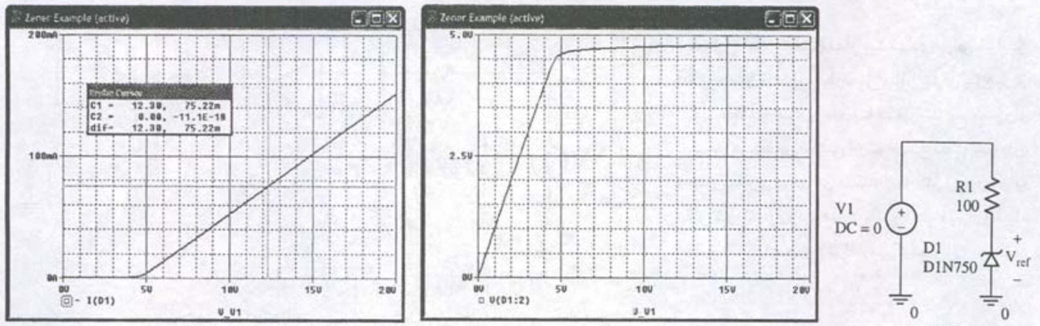
جواب: شکل ۶ـ۱۷ را ملاحظه کنید.



شکل ۶ـ۱۷ یک حل ممکن برای تمرین ۶ـ۳ این است که همه مقاومت‌ها 10 kΩ باشند (هرچند مادامی که همه مقاومت‌ها یکسان گرفته شوند، مقدار مهم نیست). ولتاژهای ورودی v_1، v_2، v_3 و v_4 سیگنال‌های ولتاژ را از سنسورها و v_{out} سیگنال ولتاژ را برای اتصال به پایانه ورودی مثبت DMM نشان می‌دهند. ولتاژ مرجع برای هر پنج ولتاژ و نیز DMM، نقطه زمین است.

۶ـ۴ مدارهای منابع ولتاژ و جریان

در این فصل و فصل قبل به دفعات استفاده از منابع جریان یا ولتاژ ایده‌آل را مطرح کردیم که این مدارها بدون توجه به مدار متصل به آن‌ها، فرض می‌شود که جریان یا ولتاژ خروجی آن‌ها ثابت باشد. البته همان‌طور که در بخش ۲ـ۵ ذکر شد به هنگام استفاده از منابع واقعی که در داخل آن‌ها مقاومتی گذاشته شده یا ذاتاً آن را دارند، فرض ما در رابطه با این استقلال محدودیت دارد. اثر چنین مقاومتی کاهش در ولتاژ خروجی منبع در مواردی است که تقاضای جریان زیاد باشد، و یا کاهش جریان در مواردی است که ولتاژ بیشتری از منبع جریان خواسته شود. همان‌طور که در این بخش بحث شد، امکان دارد مدارهایی با مشخصه‌های اطمینان‌بخش‌تری را با op amp ساخت.



(ج) (ب) (الف)

شکل ۱۸ـ۶ (الف) شماتیک PSpice یک مدار مرجع ولتاژ ساده مبتنی بر دیود زنر 1N750 است. (ب) شبیه‌سازی مدار که ولتاژ V_{ref} را به عنوان تابعی از ولتاژ مولد V1 نشان می‌دهد. (ج) شبیه‌سازی جریان دیود که نشان می‌دهد هرگاه V1 از 12.3 V تجاوز کند، قابلیت آن از حداکثر تجاوز خواهد کرد (دقت کنید که در این محاسبه فرض بر این‌است‌که یک دیود زنر ایده‌آل ولتاژ زنری 12.2 V دارد).

یک منبع ولتاژ اطمینان‌بخش

یکی از رایج‌ترین مفاهیم تهیه یک ولتاژ مرجع مقاوم[1] استفاده از قطعه‌ای به نام دیود زنر است. نماد این دیود مثلثی با خطی Z مانند در آن، مانند شکل ۱۸ـ۶ (الف) است که برای دیود 1N750 نشان داده شده است.

هرچند که قطعه دو پایانه است، دیود زنر با یک مقاومت (خطی) تفاوت بسیار دارد. خصوصاً درحالی‌که مقاومت یک قطعه متقارن است، یک دیود چنین نیست. در عوض دو پایانه آن با آند[2] (بخش قاعده مثلث دیود) و کاتد[3] (سمت رأس مثلث) نامگذاری شده، و بسته به این‌که از چه سمت در مدار قرار گیرد رفتار بسیار متفاوتی را از خود به نمایش می‌گذارد. دیود زنر نوع خاصی از دیود زنر است که برای استفاده با ولتاژ مثبت در کاتد نسبت به آند طراحی شده است. وقتی که به این طریق بسته شود گوییم که دیود به‌طور معکوس تغذیه شده است. برای ولتاژهای کم، دیود مثل مقاومت عمل می‌کند، و با افزایش ولتاژ، جریان به صورت خطی افزایش کوچکی می‌یابد. به محض این‌که ولتاژ به حد معینی (V_{BR}) برسد ـ که به آن ولتاژ شکست معکوس یا ولتاژ زنری دیود می‌گویند ـ ولتاژ دیگر به اندازه قابل توجهی افزایش پیدا نمی‌کند، ولی در اصل هر جریانی می‌تواند تا میزان حداکثر دیود (75 mA برای 1N750، که ولتاژ زنر آن 4.7 V است) جریان داشته باشد.

اجازه بدهید تا نتیجه شبیه‌سازی در شکل ۱۸ـ۶ (ب) را ملاحظه کنیم، که ولتاژ V_{ref} دو سر دیود را ضمن تغییر ولتاژ منبع V1 از 0 تا 20 V نشان می‌دهد. به شرطی که V1 در بالای 5 V باقی بماند، ولتاژ دو سر دیود اساساً ثابت است. بنابراین ما می‌توانیم V1 را با یک باتری 9 V جایگزین کنیم و زیاد به افت ولتاژ مرجع که به علت دشارژ باتری است توجه نکنیم. هدف از R1 در این مدار در واقع تهیه افت ولتاژ لازم بین باتری و دیود است. مقدار آن باید طوری انتخاب شود که کار دیود زنر را در ولتاژ زنری‌اش تضمین کند ولی کمتر از حداکثر جریان باشد. مثلاً شکل ۱۸ـ۶ (ج) نشان می‌دهد که در مدار، جریان از حداکثر مقدار 75 mA به شرطی عبور می‌کند که ولتاژ V1 بزرگتر از 12 V باشد. بنابراین مقدار مقاومت R1 باید بر طبق ولتاژ منبع موجود مقدار بگیرد. ما این مطلب را در مثال ۴ـ۶ می‌شکافیم.

مثال ۴ـ۶

یک مدار مبتنی بر دیود زنر 1N750 طراحی کنید که با یک باتری 9V راه می‌افتد و ولتاژ مرجع 4.7 V تولید می‌کند.

1N750 دارای قابلیت حداکثر جریان 75 mA و ولتاژ زنری 4.7 V است. ولتاژ 9 V باتری می‌تواند کمی بسته به حالت شارژ آن تغییر کند، ولی ما این را به خاطر طراحی فعلی چشم می‌پوشیم.

1. consistent 2. anode 3. cathode

یک مدار ساده مانند آنچه در شکل ۱۹ـ۶ (الف) دیده می‌شود برای هدف ما مناسب است. تنها موضوع تعیین مقدار مناسبی برای مقاومت R_{ref} است.

اگر در دو سر دیود 4.7 V افت وجود داشته باشد، آن‌گاه افت ولتاژ دو سر R_{ref} برابر $9 - 4.7 = 7.3$ V است. بنابراین:

$$R_{ref} = \frac{9 - V_{ref}}{I_{ref}} = \frac{4.3}{I_{ref}}$$

با تعیین مقدار جریان، R_{ref} را می‌توان مشخص کرد. ما می‌دانیم که I_{ref} نباید از 75 mA برای این دیود تجاوز نماید، و مقادیر بزرگ‌تر جریان سبب دشارژ سریع‌تر باتری خواهد شد. با این وجود همان‌طور که در شکل ۱۹ـ۶ (ب) دیده می‌شود، ما نمی‌توانیم به راحتی I_{ref} را انتخاب کنیم. جریان‌های خیلی پایین اجازه کار دیود را در ناحیه شکست نمی‌دهند. در غیاب وجود رابطه جریان ـ ولتاژ (که غیرخطی است) ما در قبال 50% حداکثر جریان، به‌طور سرانگشتی، طراحی را ادامه می‌دهیم. بنابراین

$$R_{ref} = \frac{4.3}{0.0375} = 115\ \Omega$$

جزئیات عملیات را می‌توانید با اجرای شبیه‌سازی PSpice مدار آخر به دست آورید، هر چند از شکل ۱۹ـ۶ (ج) می‌بینیم که نتیجه اولیه ما منطقاً با ۱ درصد به هدف نزدیک است.

ولتاژ مرجع دیود زنر مدار شکل ۱۸ـ۶ (الف) در بسیاری از موارد خیلی خوب کار می‌کند، ولی ما به نوعی از نظر مقدار ولتاژ وابسته به دیودهای زنر موجود، محدودیت داریم. همچنین اغلب درمی‌یابیم که مداری که در شکل نشان داده شده است مناسب کاربردهایی که بیش از چند میلی‌آمپر جریان لازم دارند، نیست. در این موارد، ما ممکن‌است از مدار مرجع زنر در کنار یک طبقه تقویت‌کننده مطابق شکل ۲۰ـ۶ استفاده کنیم. نتیجه این کار ولتاژ با ثباتی خواهد بود که می‌تواند با تنظیم مقدار R_1 یا R_f بدون سوئیچ به دیود زنر دیگر، کنترل شود.

تمرین

۴ـ۶ مداری برای تهیه یک ولتاژ مرجع 6 V با استفاده از دیود زنر 1N750 و یک تقویت‌کننده معکوس‌نکننده طراحی کنید.

جواب: با استفاده از مدار شکل ۲۰ـ۶ مقادیر $V_{bat} = 9$ V، $R_{ref} = 115\ \Omega$، $R_1 = 1$ K و $R_f = 26\ \Omega$ را انتخاب کنید.

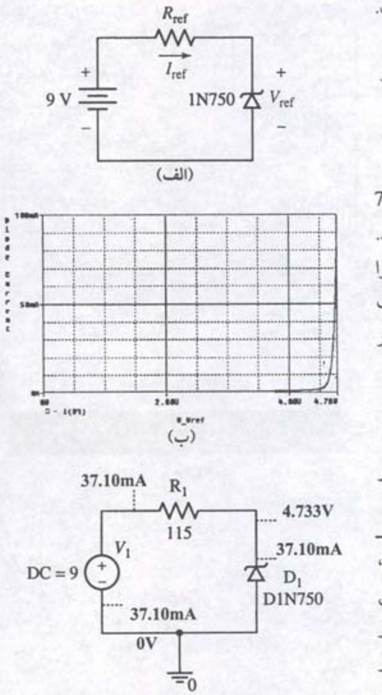
یک منبع جریان قابل اطمینان

مدار شکل ۲۱ـ۶ (الف) را درنظربگیرید که V_{ref} با منبع ولتاژ تنظیم‌شده مانند شکل ۱۹ـ۶ (الف) تهیه شده است. خواننده ممکن‌است تشخیص دهد که این مدار یک تقویت‌کننده معکوس‌گر است که ما پایه خروجی را درنظرمی‌گیریم. ما می‌توانیم از این مدار به عنوان یک منبع جریان استفاده کنیم، که R_L یک بار مقاومتی را نشان می‌دهد.

ولتاژ ورودی V_{ref} در دو سر مقاومت مرجع R_{ref} ظاهر می‌شود، چون ورودی معکوس‌نکننده تقویت‌کننده به زمین وصل شده است. با نبود جریان در ورودی معکوس‌گر، جریان جاری در مقاومت بار R_L برابر است با:

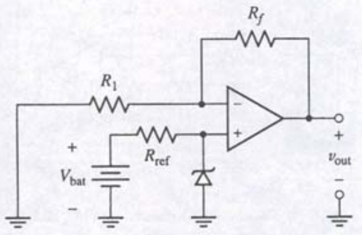
$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

به بیان دیگر جریان تحویلی به R_L به مقاومت آن بستگی ندارد ـ و این از صفات اصلی یک منبع جریان است. همچنین ارزشمند است بدانیم که ما در این‌جا ولتاژ خروجی را به عنوان

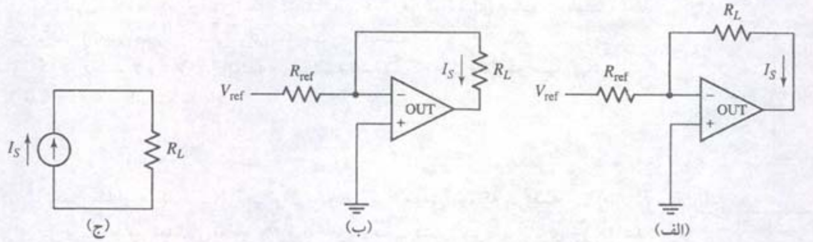


(الف) (ب) (ج)

شکل ۱۹ـ۶ (الف) مدار مرجع ولتاژ مبتنی بر دیود زنر 1N750. (ب) رابطه I-V دیود. (ج) شبیه‌سازی PSpice طرح نهایی.



شکل ۲۰ـ۶ یک منبع ولتاژ آمپلی‌فایری (تقویت‌کنندگی) بر اساس مرجع ولتاژ زنر.



شکل ۲۱ـ۶ (الف) یک منبع جریان مبتنی بر op amp با ولتاژ مرجع V_{ref}. (ب) ترسیم مجدد مدار برای مشخص‌ترکردن بار. (ج) مدل مدار. مقاومت R_L معادل نورتن یک مدار با بار غیرفعال نامشخص.

یک کمیت مطلوب در نظر نگرفته‌ایم. در عوض، ممکن‌است مقاومت بار را به عنوان نوعی معادل نورتن (یا تونن) مدار بار غیرفعالی درنظربگیریم که توان را از مدار op amp دریافت می‌کند. با ترسیم مجدد مدار مطابق شکل ۲۱ـ۶(ب) می‌بینیم که اشتراک زیادی با مدار شکل ۲۱ـ۶(ج) دارد. به بیان دیگر می‌توانیم این مدار تقویت‌کننده را به صورت منبع جریان به کار ببریم و مشخصه‌های آن تا حد جریان خروجی ماکزیمم انتخاب شود.

مثال ۵ـ۶

یک منبع جریان که 1 mA جریان را به یک بار مقاومتی حمل می‌کند طراحی کنید.

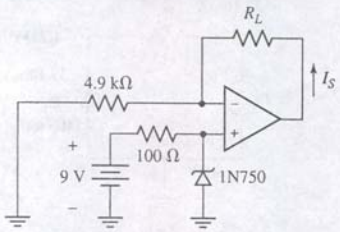
بر اساس طراحی مدارهای شکل ۲۰ـ۶ و ۲۱ـ۶ (الف)، می‌دانیم که جریان در مقاومت با R_L چنین است:

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

که مقادیر V_{ref} و R_{ref} باید انتخاب شوند و مداری که V_{ref} را تهیه می‌کند نیز باید طراحی گردد. ما اگر از دیود زنر 1N750 استفاده کنیم که با یک باتری 9 V و مقاومت 100 Ω سری است، با توجه به شکل ۱۸ـ۶(ب) ولتاژ 4.9 V در دو سر دیود وجود خواهد داشت. بنابراین $V_{ref} = 4.9$ V مقاومت R_{ref} را برابر $4.9/10^{-3} = 4.9$ kΩ دیکته می‌کند. مدار کامل در شکل ۲۲ـ۶ دیده می‌شود.

دقت کنید که اگر ما فرض کنیم ولتاژ دیود 4.7 V است، خطا در جریان طراحی‌شده فقط چند درصد است و در داخل 5 تا 10 درصد تغییر مقاومت است که انتظار آن را می‌توان داشت.

تنها موضوع باقیمانده این‌است‌که آیا می‌توان 1 mA جریان را برای هر مقداری از R_L تهیه کرد. برای حالت $R_L = 0$، خروجی op amp برابر 4.9 V خواهد بود که غیرمنطقی نیست. با افزایش مقاومت بار، در هر صورت، ولتاژ خروجی op amp افزایش پیدا می‌کند. در نهایت ما باید به نوعی محدودیت، طبق بحث بخش ۵ـ۶ برخورد کنیم.

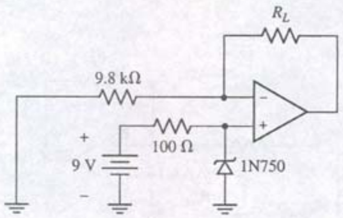


شکل ۲۲ـ۶ یک طرح ممکن برای منبع جریان مطلوب. به تغییر جهت جریان در شکل ۲۱ـ۶(ب) توجه کنید.

تمرین

۵ـ۶ یک منبع جریان که بتواند 500 μA را برای یک بار مقاومتی تولید کند، طراحی نمایید.

جواب: شکل ۲۳ـ۶ را به عنوان یک راه‌حل نگاه کنید.



شکل ۲۳ـ۶ یک حل ممکن برای تمرین ۵ـ۶.

۵ـ۶ ملاحظات عملی

مدلی دقیق‌تر برای op amp

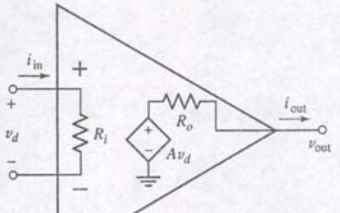
می‌توان یک op amp را با کاهش ساختارش به‌عنوان یک منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با ولتاژ تصور کرد. منبع ولتاژ وابسته خروجی op amp را فراهم می‌کند و ولتاژی که به آن بستگی دارد همان ولتاژ اعمال‌شده به پایانه‌های ورودی است. نمودار شماتیک یک مدل نسبتاً عملی op amp در شکل ۲۴ـ۶ دیده می‌شود که شامل منبع ولتاژ وابسته با بهره ولتاژ A، یک مقاومت خروجی R_o و یک مقاومت ورودی R_i است. جدول ۳ـ۶ نمونه‌ای از مقادیر را برای این پارامترها در انواع تجاری تقویت‌کننده‌های عملیاتی نشان می‌دهد.

جدول ۳ـ۶ پارامترهای نوعی چند op amp مختلف.

Part Number	μA741	LM324	LF411	AD549K	OPA690
Description	General purpose	Low-power quad	Low-offset, low-drift JFET input	Ultralow input bias current	Wideband video frequency op amp
Open loop gain A	2 × 10^5 V/V	10^5 V/V	2 × 10^5 V/V	10^6 V/V	2800 V/V
Input resistance	2 MΩ	*	1 TΩ	10 TΩ	190 kΩ
Output resistance	75 Ω	*	~1 Ω	~15 Ω	*
Input bias current	80 nA	45 nA	50 pA	75 fA	3 μA
Input offset voltage	1.0 mV	2.0 mV	0.8 mV	0.150 mV	±1.0 mV
CMRR	90 dB	85 dB	100 dB	100 dB	65 dB
Slew Rate	0.5 V/μs	*	15 V/μs	3 V/μs	1800 V/μs
PSpice Model	✓	✓	✓		

پارامتر A را **بهره ولتاژ حلقه باز** تقویت‌کننده می‌نامند و معمولاً در محدوده 10^5 تا 10^6 است. با توجه به لیست تقویت‌کننده‌های جدول ۳ـ۶ ملاحظه می‌شود که همه آن‌ها در مقایسه با بهره ولتاژ 11 در مثال ۱ـ۶ بهره ولتاژ خیلی بالایی دارند. باید به‌خاطر سپرد که تفکیک بهره ولتاژ حلقه باز خود op amp و بهره ولتاژ حلقه بسته یک op amp خاص مهم است. در این‌جا منظور از "حلقه" مسیر بیرونی بین پایه خروجی و پایه ورودی معکوس‌کننده است، که می‌تواند یک سیم، یک مقاومت یا بسته به نوع کاربرد، نوع دیگری از عناصر باشد.

μA741 یک op amp بسیار متداول است که در اصل به وسیله فرچایلد (Fairchild corporation) در سال ۱۹۶۸ ساخته شد، این تقویت‌کننده دارای بهره ولتاژ حلقه باز 200,000 ، یک مقاومت ورودی 2MΩ و یک مقاومت خروجی 75Ω است. برای این‌که ببینیم چگونه یک تقویت‌کننده ایده‌آل رفتار این دستگاه خاص را تقریب می‌نماید، اجازه بدهید تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ را دوباره بررسی کنیم.



شکل ۲۴ـ۶ مدل دقیق‌تر op amp.

مثال ۶ـ۶

با استفاده از مقادیر مناسب مدل تقویت‌کننده μA741 در شکل ۲۴ـ۶، مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ را دوباره تحلیل کنید.

حل را با جایگزینی نماد op amp ایده‌آل شکل ۳ـ۶ با مدل مشروح‌تر شروع می‌کنیم که حاصلش شکل ۲۵ـ۶ است.

دقت کنید که شما دیگر نمی‌توانید قواعد op amp ایده‌آل را به‌کارببرید زیرا مدل ایده‌آل را استفاده نمی‌کنیم. بنابراین دو معادله گرهی را می‌نویسیم:

$$0 = \frac{-v_d - v_{in}}{R_1} + \frac{-v_d - v_{out}}{R_f} + \frac{-v_d}{R_i}$$

$$0 = \frac{v_{out} + v_d}{R_f} + \frac{v_{out} - Av_d}{R_o}$$

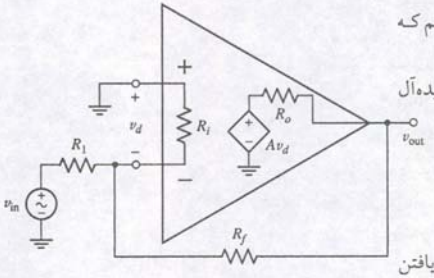
با اجرای مقداری عملیات جبری سرراست ولی نسبتاً طولانی، v_d را در دو معادله برای یافتن عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} حذف می‌کنیم:

$$v_{out} = \left[\frac{(R_o + R_f)}{R_o - AR_f}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i}\right) - \frac{1}{R_f}\right]^{-1} \frac{v_{in}}{R_1} \qquad (۱۵)$$

با جایگزینی $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV، $R_1 = 4.7$ kΩ، $R_f = 47$kΩ، $R_o = 75Ω$، $R_i = 2MΩ$ و $A = 2 \times 10^5$، داریم:

$$v_{out} = -9.999448\ v_{in} = -49.99724 \sin 3t \text{ mV}$$

از مقایسه این رابطه با عبارت حاصل برای یک op amp ایده‌آل ($v_{out} = -10v_{in} = -50 \sin 3t$ mV) می‌بینیم که یک op amp ایده‌آل مدل نسبتاً دقیقی است.



شکل ۲۵ـ۶ مدار تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر با استفاده از مدل دقیق‌تر op amp.

به علاوه فرض دیود ایده‌آل کاهش قابل توجهی را در جبر مورد نیاز موجب می‌شود. توجه کنید که اگر $R_i \to \infty$ ، $R_o \to 0$ ، $A \to \infty$ میل کنند، معادله (۱۵) به معادلهٔ زیر کاهش می‌یابد:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in}$$

و این همان چیزی است که قبلاً برای ایده‌آل‌بودن تقویت‌کننده به دست آوردیم.

تمرین

۶ـ۶ برای مدار op amp شکل ۳ـ۶ با فرض بهره حلقه باز معین (A)، مقاومت ورودی معین (R_i) و مقاومت خروجی صفر (R_o) عبارتی برای v_{out} برحسب v_{in} به‌دست‌آورید.

جواب: $v_{out}/v_{in} = -AR_fR_i/(R_fR_i + R_1R_i + R_1R_f - AR_1R_i)$

به‌دست‌آوردن قواعد op amp

دیدیم که op amp ایده‌آل مدل تقریباً دقیقی برای رفتار انواع واقعی آن است. با این وجود استفاده از نوع دقیق‌تر آن که بهره حلقه باز معین، مقاومت ورودی معین و مقاومت خروجی غیرصفر دارد، راه سرراست‌تری در به‌دست‌آوردن دو قاعده op amp ایده‌آل می‌باشد. با مراجعه به شکل ۲۴ـ۶، می‌بینیم که ولتاژ خروجی مدار باز یک op amp واقعی به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$v_{out} = Av_d \qquad (۱۶)$$

v_d را که گاهی به آن **ولتاژ ورودی تفاضلی** گفته می‌شود به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v_d = \frac{v_{out}}{A} \qquad (۱۷)$$

انتظار داریم محدودیت‌های عملی بر ولتاژ خروجی v_{out} حاصل از op amp واقعی وجود داشته باشد. در بخش بعد خواهیم دید که باید op amp را به منابع تغذیه ولتاژ dc بیرونی برای راه‌اندازی مدار داخلی وصل کرد. این منابع ولتاژ، حداکثر مقدار v_{out} را تعیین می‌کنند و معمولاً در محدوده 5 تا 24V می‌باشند. اگر ولتاژ 24V را بر بهره حلقه باز μA741 (2×10^5) تقسیم کنیم، داریم $v_d = 120\mu V$. گرچه مقدار این ولتاژ صفر ولت نیست، ولی این ولتاژ کوچک در مقایسه با ولتاژ خروجی 24V، عملاً صفر است. یک op amp ایده‌آل دارای بهره حلقه باز بی‌نهایت است و درنتیجه مستقل از v_{out} ، ولتاژ $v_d = 0$ می‌باشد که منجر به قاعده ۲ op amp می‌گردد.

قاعده ۱ برای op amp بیان می‌دارد که "به هیچ وجه جریانی در هیچ یک از ورودی‌ها جریان پیدا نمی‌کند". با توجه به شکل ۲۳ـ۶ جریان ورودی op amp برابر است با:

$$i_{in} = \frac{v_d}{R_i}$$

چند لحظه قبل دیدیم که v_d نوعاً ولتاژی کوچک است. همان‌طور که از جدول ۳ـ۶ می‌توان ملاحظه کرد مقاومت ورودی یک op amp نوعی خیلی بزرگ و از مگااهم تا ترااهم است. با توجه به $v_d = 120\mu V$ در بالا و $R_i = 2M\Omega$ ، جریان ورودی 60pA حاصل می‌گردد. این جریانی فوق‌العاده کوچک است و برای اندازه‌گیری آن آمپرمتر خاصی به‌نام پیکوآمپرمتر نیاز داریم. از جدول ۳ـ۶ درمی‌یابیم که جریان ورودی نوعی (یا دقیقتر بگوییم **جریان تغذیه**، یا **بایاس ورودی**) از یک μA741 تنها 80nA است که سه برابر بیش از تخمین ما است. این یکی از معایب مدل op amp مورد استفاده ماست که برای تهیه جریان دقیق ورودی تهیه نشده است. در مقایسه با دیگر جریان‌ها در مدار یک op amp، این مقدار هم اساساً صفر می‌باشد. op amp های مدرن‌تر (مانند AD549) جریان بایاس کمتری دارند. پس نتیجه می‌شود که قانون 1 op amp ایده‌آل فرضی منطقی است.

از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که بهره ولتاژ حلقه باز و مقاومت ورودی یک op amp ایده‌آل بی‌نهایت است. معهذا هنوز مقاومت خروجی و اثرات احتمالی آن را در مدار بررسی نکرده‌ایم. در شکل ۲۴ـ۶ داریم:

$$v_{out} = Av_d - R_o i_{out}$$

که i_{out} پایه خروجی op amp جاری است. پس هر مقدار غیرصفری از R_o ولتاژ خروجی را کاهش می‌دهد. افزایش جریان هم تأثیر مشابهی دارد. بنابراین مقاومت خروجی تقویت‌کننده را صفر درنظر می‌گیرند. حداکثر مقاومت خروجی تقویت‌کننده‌ای μA741 برابر 75Ω و حتی در انواع جدی‌تر AD549 و AD515A کمتر از آن است.

حذف حالت مشترک

op amp را **تقویت‌کننده تفاضلی** هم می‌خوانند، چون خروجی متناسب با تفاضل ولتاژ بین دو پایانه ورودی است. به این معنی اگر ولتاژ برابری را به هر دو پایانه ورودی اعمال کنیم، انتظار داریم خروجی صفر باشد. این قابلیت op amp یکی از مهم‌ترین جاذبه‌های آن است و به نام **حذف حالت مشترک** شناخته می‌شود. مدار شکل ۲۶ـ۶ چنان وصل شده است تا ولتاژ خروجی زیر را تولید نماید:

$$v_{out} = v_2 - v_1$$

اگر $v_1 = 2 + 3 \sin 3t$ V و $v_2 = 2$ V باشند، انتظار داریم که خروجی -3 sint 3t V بشود؛ ولتاژ 2 V مولفه‌ای مشترک برای v_1 و v_2 می‌باشد که نباید تقویت شود و در خروجی هم ظاهر نگردد.

برای تقویت‌کننده‌های عملی، ما در واقع سهم کمی از خروجی را در پاسخ به سیگنال‌های مشترک داریم. برای مقایسه یک op amp با دیگری، اغلب بیان توانمندی یک تقویت‌کننده به حذف سیگنال‌های مد مشترک به وسیله پارامتری به نام نسبت حذف حالت مشترک[1] یا CMRR صورت می‌گیرد. با تعریف v_{OCM} به عنوان خروجی حاصل به هنگام برابری ورودی‌ها ($v_1 = v_2 = v_{CM}$)، می‌توان بهره حالت مشترک یک تقویت‌کننده را چنین تعریف کرد:

$$A_{CM} = \left| \frac{v_{oCM}}{v_{CM}} \right|$$

سپس CMRR را برحسب نسبت بهره مد تفاضلی به بهره مد مشترک تعریف می‌کنیم:

$$\text{CMRR} \equiv \left| \frac{A}{A_{CM}} \right| \qquad (۱۸)$$

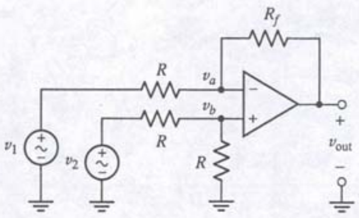
اغلب این رابطه به صورت دسی‌بل (dB) در مقیاس لگاریتمی بیان می‌شود:

$$\text{CMRR}_{(dB)} \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{A}{A_{CM}} \right| \text{dB} \qquad (۱۹)$$

مقادیر نمونه چند نوع op amp در جدول ۳ـ۶ آمده است؛ یک مقدار 100 dB متعلق به نسبت مطلق 10^5 برای A به A_{CM} است.

پسخورد منفی

دیدیم که بهره حلقه باز یک op amp خیلی بزرگ و به‌طور ایده‌آل بی‌نهایت است، ولی در عمل مقدار واقعی آن می‌تواند با مقدار تعیین‌شده به وسیله سازنده متفاوت باشد. مثلاً دما



شکل ۲۶ـ۶ op amp در نقش تقویت‌کنندهٔ تفاضلی.

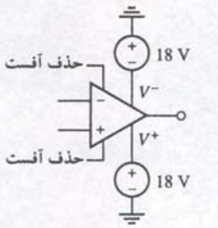
1. Common Mode Rejection Ratio

می‌تواند اثرات قابل توجهی روی عملکرد یک op amp داشته باشد به نحوی که رفتار آن در ‎-20°C‎ به کلی با دمای روزی آفتابی متفاوت است. همچنین بین انواع ساخته‌شده در زمان‌های مختلف نیز تفاوت چشمگیری ملاحظه می‌شود. اگر مداری طراحی کنیم که در آن بهره حلقه باز ضربدر ولتاژ یکی از پایانه‌های ورودی باشد، پیش‌بینی ولتاژ خروجی با دقتی مناسب مشکل خواهد بود، و انتظار می‌رود با دما تغییر کند.

راه‌حل چنین مشکل بالقوه به‌کارگیری **پسخورد منفی** است. این تکنیک عبارت‌است‌از فرآیند تفاضل بخش کوچکی از خروجی از ورودی. اگر پدیده‌هایی بتوانند مشخصات مدار را به نحوی تغییر دهند که خروجی تمایل به افزایش داشته باشد، در همان زمان ورودی کم می‌شود. پسخورد منفی زیاد مانع از هر گونه تقویت مفید می‌گردد، ولی مقدار کم آن ثُبات و پایداری را به‌دنبال دارد. مثالی از یک پسخورد منفی احساس ناخوشایندی است که در دستان خود در نزدیکی شعله آتش داریم. هرچه بیشتر به آتش نزدیک شویم، سیگنال منفی بزرگ‌تری از دستان خود حس خواهیم کرد. با این وجود، زیاده‌روی در پسخورد منفی می‌تواند موجب انزجار از گرما و نهایتاً انجماد و به دنبال آن مرگ شود. پسخورد مثبت فرآیندی است که در آن بخشی از سیگنال خروجی به ورودی بازگردانده شده است. مثال رایجی از آن هنگامی است که یک میکروفون به سمت گوینده گرفته شده و صدای خیلی ملایمی به سرعت تقویت‌شده و این تقویت به فریاد تبدیل می‌شود. پسخورد مثبت نهایتاً سیستمی ناپایدار را به دست می‌دهد.

همه مدارهایی که در این فصل ملاحظه می‌شوند پسخورد منفی را به وسیله یک مقاومت بین پایه خروجی و پایه ورودی معکوس‌گر خواهند داشت. حلقه حاصل بین خروجی و ورودی، وابستگی ولتاژ خروجی روی مقدار واقعی بهره حلقه باز راکاهش می‌دهد (در مثال ۶ـ۶ ملاحظه شد). پس لزومی ندارد که بهره حلقه باز دقیق op amp مورد استفاده معلوم باشد، زیرا تغییرات A اثر مهمی بر رفتار مدار ندارد. پسخورد منفی، همچنین پایداری را در مواردی که A به محیط op amp حساس است، افزایش می‌دهد. مثلاً اگر A ناگهان در پاسخ به یک تغییر در دمای محیط افزایش یابد، یک ولتاژ پسخورد بزرگ‌تری به ورودی معکوس‌گر اضافه می‌شود. این خود موجب کاهش تفاضل ولتاژ ورودی v_d و بنابراین تغییر کمتر Av_d می‌گردد. باید توجه داشت که بهره مدار حلقه بسته همیشه کمتر از بهره آن در حلقه باز است. این بهایی است که ما برای پایداری و کاهش حساسیت به تغییرات پارامتر می‌پردازیم.

اشباع[1]

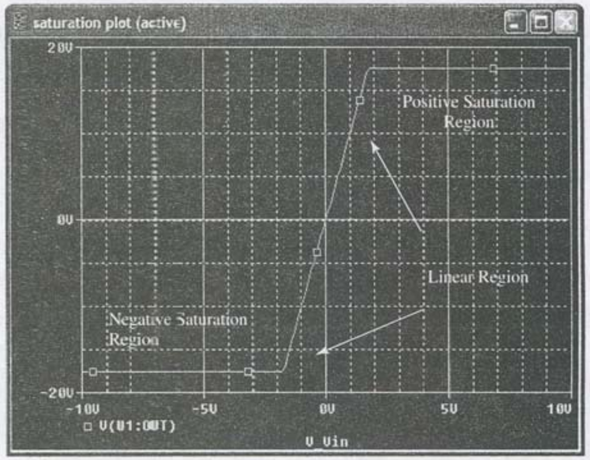


شکل ۲۷ـ۶ op amp با منابع تغذیهٔ مثبت و منفی. برای مثال دو منبع 18 V به‌کاررفته است؛ به پلاریته هر منبع توجه نمایید.

تاکنون op amp را با فرض این‌که مشخصات آن مستقل از نحوه اتصال آن در مدار است کاملاً خطی فرض کردیم. در عمل، لازم است تغذیه‌ای را به op amp متصل کنیم تا مدار راه‌اندازی شود (شکل ۲۷ـ۶). معمولاً یک تغذیه مثبت بین 5 تا 24V به پایانه V^+ و تغذیه‌ای منفی به همان اندازه به پایانه V^- وصل می‌گردد. در عمل مواردی وجود دارد که تنها یک تغذیه متصل می‌گردد و نیز دو مقدار ولتاژ با هم اختلاف دارند. سازندگان op amp معمولاً حداکثر ولتاژ تغذیه را مشخص می‌کنند و مقادیر فراتر از آن به ترانزیستورهای داخلی آسیب می‌رسانند.

ولتاژهای تغذیه به هنگام طراحی اهمیت خاصی دارند زیرا مقدار آن‌ها بیانگر حداکثر ولتاژ ممکن خروجی op amp می‌باشد. در عمل این ولتاژ خروجی حداکثر حدود یک ولت از تغذیه کمتر می‌باشد. به عنوان مثال مدار op amp شکل ۲۶ـ۶ را درنظربگیرید که اینک به عنوان تقویت‌کننده معکوس‌نکننده با بهره 10 متصل شده است. همان‌طور که در شبیه‌سازی PSpice در شکل ۲۸ـ۶ ملاحظه می‌شود، در واقع ما رفتاری خطی از op amp را مشاهده می‌کنیم ولی این رفتار فقط در محدوده ±1.71 V برای ولتاژ ورودی است.

1. saturation



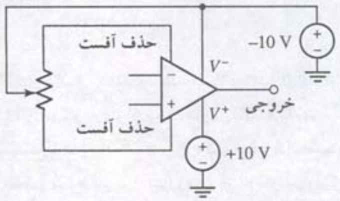
شکل ۲۸ـ۶ مشخصهٔ ورودی ـ خروجی یک μA741 op amp با بهره 10 و تغذیه ±18 که به صورت معکوس‌نکننده است.

در خارج این محدوده، دیگر خروجی متناسب با ورودی نیست و به حداکثر مقدار 17.6 V می‌رسد. این اثر غیرخطی به اشباع معروف است و به این حقیقت اشاره دارد که افزایش بیشتر در ولتاژ ورودی تغییری در ولتاژ خروجی نمی‌دهد. این پدیده به این دلیل رخ می‌دهد که خروجی op amp نمی‌تواند از ولتاژ تغذیه تجاوز کند. مثلاً اگر op amp را با +9V و -5V راه بیندازیم آنگاه ولتاژ خروجی به -5V و +9V محدود خواهد شد. خروجی op amp پاسخی خطی و محدود به نواحی اشباع مثبت و منفی است و به‌عنوان یک قانون کلی سعی خواهیم کرد که هنگام طراحی مدار، ندانسته وارد ناحیه اشباع نشویم. بنابراین باید ولتاژ کار به‌دقت بر اساس بهره حلقه بسته و حداکثر ولتاژ ورودی انتخاب گردد.

ولتاژ آفست ورودی

چند نکته عملی وجود دارند که باید هنگام کار با یک op amp درنظرگرفته شوند. یکی از این نکات غیرایده‌آل که ارزش گفتن ندارد، تمایل op amp به داشتن خروجی غیرصفر حتی به‌هنگام اتصال دو ورودی است. مقدار خروجی تحت این شرایط به‌نام ولتاژ آفست خوانده می‌شود و ورودی لازم برای کاهش خروجی به صفر را **ولتاژ آفست ورودی** گویند. با مراجعه به جدول ۳ـ۶ ملاحظه می‌شود که مقادیر نمونه برای ولتاژ آفست ورودی حدود میلی‌ولت یا کمتر است.

اغلب تقویت‌کننده‌ها با دو پایه‌ای که روی آن "صفر آفست" یا "بالانس" نوشته شده ارائه می‌گردند. این پایانه‌ها را با اتصال به یک مقاومت متغیر می‌توان برای تنظیم ولتاژ خروجی به‌کاربرد. یک مقاومت متغیر، قطعه‌ای سه پایانه است که به‌طور متداولی در موارد مشابهی به‌عنوان کنترل ولوم رادیو و نظایر آن به‌کار می‌رود. این وسیله دارای پیچ ولومی است که برای انتخاب مقدار واقعی مقاومت قابل چرخش است. اگر مقاومت متغیر فقط با دو پایانه انتهایی‌اش مورد استفاده قرار گیرد مقاومت آن جدا از وضعیت ولوم، مقداری ثابت خواهد بود. با استفاده از پایانه وسط و یکی از دو انتها مقاومتی دیده می‌شود که مقدارش به وضعیت ولوم وابسته است. شکل ۲۹ـ۶ نمونه‌ای از مدار را نشان می‌دهد که برای تنظیم ولتاژ خروجی یک op amp به‌کار رفته است. برگه اطلاعات سازندگان ممکن‌است مدار جداگانه و متفاوتی را برای یک وسیله پیشنهاد نماید.

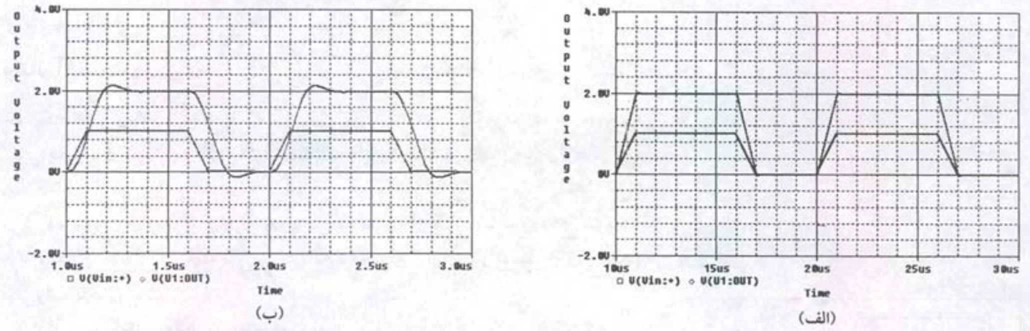


شکل ۲۹ـ۶ مدار خارجی پیشنهادی برای تهیه ولتاژ خروجی صفر. منابع تغذیه ±10 V نشان داده شده تنها یک مثال هستند. در مدار نهایی ولتاژ تغذیه واقعی به‌طور عملی انتخاب می‌گردد.

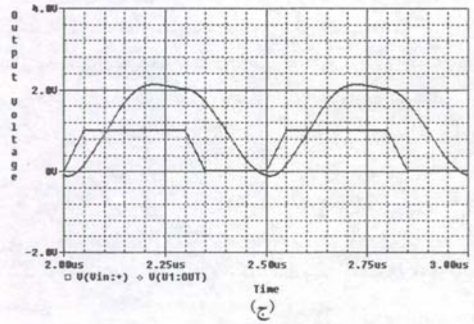
سرعت واکنش[1]

تاکنون، ما فرض کردیم که op amp به سیگنال‌ها با هر فرکانسی به‌طور یکسان پاسخ می‌دهد، ولی جای تعجب نیست که بدانیم در عمل از این بابت محدودیت‌هایی وجود دارد. چون می‌دانیم که مدارهای op amp در dc به خوبی کار می‌کنند، که در واقع در فرکانس صفر است، باید رفتار آن را ضمن افزایش فرکانس بررسی کنیم. یک معیار از رفتار فرکانسی یک op amp، سرعت واکنش آن است که عبارتنداز سرعت پاسخ ولتاژ خروجی به تغییرات ورودی. اغلب آن را به صورت V/μs بیان می‌کنند. مشخصات نمونه از سرعت واکنش چند قطعه موجود تجاری در جدول ۳ـ۶ ارائه شده است که مقادیری از مرتبه چند ولت بر میلی‌ثانیه را به دست می‌دهد. یک نمونه استثنایی OPA690 است که به عنوان یک op amp برای کاربردهای ویدیویی طراحی شده است و در چند صد MHz کار می‌کند. خواهیم دید که سرعت واکنش 1800 V/μs برای این وسیله دور از واقعیت نیست، هرچند دیگر پارامترهای آن چون جریان تغذیه ورودی و CMRR به همین علت آسیب دیده‌اند.

شبیه‌سازی PSpice در شکل ۳۰ـ۶ نزول در عملکرد یک op amp را به علت محدودیت سرعت واکنش نشان می‌دهد. مدار شبیه‌سازی از یک LF411 است که به عنوان تقویت‌کننده غیرمعکوس‌کننده با بهره 2 و تغذیه ±15 V آرایش یافته است. شکل موج ورودی، موج زیرین بوده و مقدار پیک آن 1 V است؛ خروجی در قسمت بالاتر کشیده شده است. شبیه‌سازی مربوط به شکل ۳۰ـ۶ (الف) دارای زمان صعود و نزول 1 μs است که از نظر انسان زمانی کوتاه است ولی به راحتی LF411 از عهده آن برمی‌آید. با کاهش زمان صعود و نزول به اندازه 10 تا 100 ns (شکل ۳۰ـ۶ (ب)) ملاحظه می‌کنیم که LF411 در دنبال‌کردن ورودی کمی مشکل پیدا کرده است. در زمان صعود و نزول 50 ns (شکل ۳۰ـ۶ (ج)) می‌بینیم نه فقط تأخیری قابل توجه بین خروجی و ورودی وجود دارد، بلکه شکل موج به مقدار قابل توجهی تغییر شکل یافته است که ویژگی خوبی برای یک تقویت‌کننده نیست. این رفتار مشاهده‌شده با سرعت واکنش 15 V/μs در جدول ۳ـ۶ ارتباط دارد، و بیان می‌کند که خروجی برای تغییر از 0 به 2 V (یا از 2 V به 0) ممکن‌است نیاز به 130 ns داشته باشد.



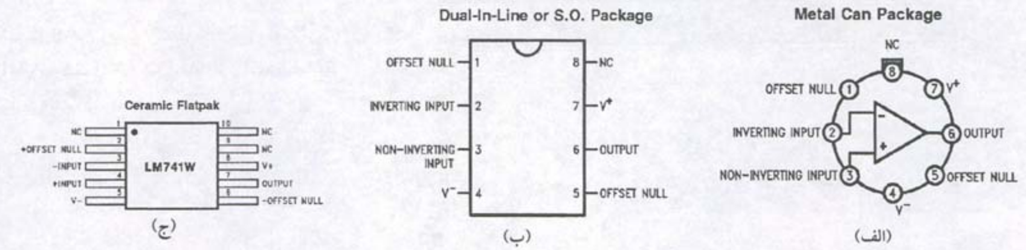
(ب) (الف)



(ج)

شکل ۳۰ـ۶ عملکرد شبیه‌سازی‌شدهٔ op amp LF411 که به عنوان یک معکوس‌نکننده با بهرهٔ 2، منبع تغذیه ±15 V و ورودی پالس‌داده‌شده متصل شده است. (الف) زمان صعود و نزول = 1 μs، پهنای پالس = 5 μs، (ب) زمان صعود و نزول = 100 ns، پهنای پالس = 500 ns و (ج) زمان صعود و نزول = 50 ns، پهنای پالس = 250 ns.

[1] slew rate



(الف) (ب) (ج)

شکل ۳۱ـ۶ چند بسته‌بندی مختلف op map LM741. (الف) بسته‌بندی فلزی استوانه‌ای. (ب) بسته‌بندی دو ردیفه. (ج) بسته‌بندی مسطح سرامیکی.

بسته‌بندی

تقویت‌کننده‌های عملیاتی جدید بسته به محیط مصرف در انواع متنوعی از بسته‌بندی در دسترسند. بعضی از آن‌ها برای دماهای بالا مناسبند و به طرق مختلف بر روی مدار چاپی نصب می‌گردند. شکل ۳۱ـ۶ چند نمونه مختلف از LM741 که به وسیله ناسیونال ساخته شده را نشان می‌دهد. عبارت "NC" که در کنار یک پایه قرار دارد به معنی "نبود اتصال" است. این بسته‌بندی‌ها استاندارد هستند و در رابطه با مدارات مجتمع مختلف به‌کارگرفته می‌شوند. معمولاً تعداد پایه‌ها از حد لازم بیشتر است.

تحلیل کامپیوتری

همان‌طور که دیدیم PSpice در پیش‌بینی خروجی یک مدار op amp، بسیار مفید است خصوصاً در حالتی که ورودی‌ها با زمان تغییر کنند. با این وجود خواهیم دید که مدل ایده‌آل op amp، به‌خوبی با شبیه‌سازی‌های PSpice هم‌خوانی دارد. هنگام اجرای شبیه‌سازی یک مدار op amp باید توجه داشت که منابع تغذیه مثبت و منفی به آن وصل شوند. گرچه مدل، پایه‌های صفر آفست را که برای صفرکردن ولتاژ خروجی نشان می‌دهد، ولی PSpice از آن‌ها استفاده نمی‌کند و بنابراین آزاد رها می‌شوند.

جدول ۳ـ۶ شماره قطعه متفاوتی را در حد ارزیابی آن نشان می‌دهد. انواع مدل‌های تجاری این نرم‌افزار در دسترس‌اند.

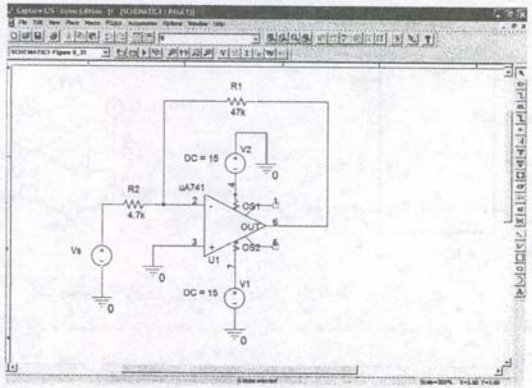
مثال ۷ـ۶

با PSpice مدار شکل ۳ـ۶ را شبیه‌سازی کنید. اگر منبع تغذیه dc، ±15V، به‌کار رفته باشد نقطه(های) شروع اشباع را مشخص نمایید. بهره محاسبه‌شده را با آن‌چه که برای مدل op amp ایده‌آل پیش‌بینی شده بود، مقایسه کنید.

کار را با ترسیم مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۳ـ۶ با استفاده از ابزار ترسیمی شماتیک شکل ۳۲ـ۶ آغاز می‌کنیم. توجه کنید که دو منبع تغذیه dc جداگانه 15V برای تغذیه op amp لازم است.

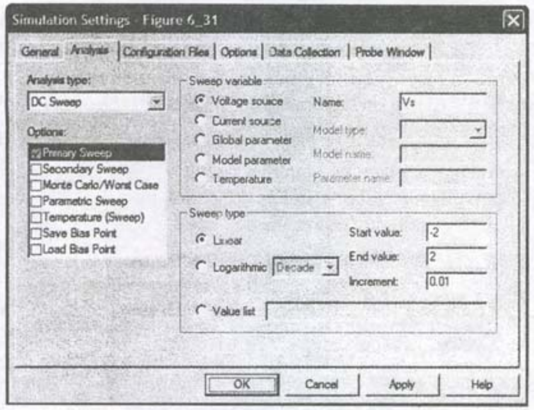
تحلیل قبلی ما بهره 10- را برای op amp ایده‌آل پیش‌بینی کرده بود. با یک ورودی 5 sin3t mV خروجی 50 sin3t mV- به‌دست‌خواهد آمد. با این وجود به‌طور ضمنی فرض کردیم که هر ولتاژ ورودی با ضریب 10- تقویت می‌شود. بر اساس ملاحظات عملی، انتظار داریم که این مطالب برای ولتاژهای کوچک ورودی صحت داشته باشد، ولی خروجی نهایتاً به مقداری در حد ولتاژ تغذیه به اشباع می‌رسد.

شکل ۶ـ۳۲ مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر μA741 شکل ۶ـ۳ که با ابزار رسم شماتیک کشیده شده است.

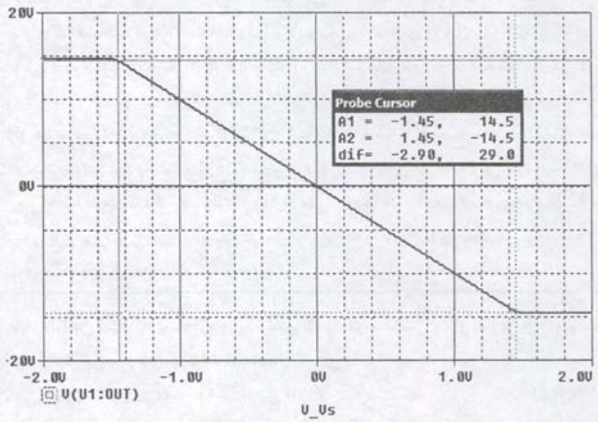


نتیجه تحلیل dc sweep برای $-2 < V_s < 2$ در شکل ۶ـ۳۳ نشان داده شده است که کمی وسیع‌تر از ولتاژ تغذیه تقسیم بر بهره ولت است بنابراین نتایج شامل نواحی اشباع مثبت و منفی خواهد بود. با استفاده از cursor tool هم می‌بینیم که مشخصه ورودی ـ خروجی تقویت‌کننده در شکل ۶ـ۳۴ (الف) نیز در محدوده وسیعی مربوط به $-1.462V < V_s < +1.462V$ خطی است، که دوباره در شکل ۶ـ۳۴ (ب) برای وضوح بیشتر نشان داده شده است. این محدوده کمی کوچک‌تر از محدوده‌ای است که از تقسیم ولتاژهای مثبت و منفی تغذیه بر بهره به‌دست‌می‌آید. در خارج این محدوده، خروجی op amp به اشباع می‌رسد، و فقط به مقدار کمی به ولتاژ ورودی وابسته است. در دو ناحیه اشباع، مدار به‌عنوان یک تقویت‌کننده عمل نمی‌کند.

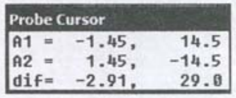
با افزایش تعداد ارقام مکان‌نما (Tools, options, Number of cursor digit) به 10، درمی‌یابیم که به ازای ولتاژ ورودی $v_s = 1.0V$، ولتاژ خروجی -9.9958340 است که کمی کوچک‌تر از مقدار پیش‌بینی‌شده 10- در مدل تقویت‌کننده ایده‌آل است، و نیز کمی با مقدار حاصل در مثال ۶ـ۳، یعنی -9.999448 تفاوت دارد. هنوز نتایج پیش‌بینی‌شده با PSpice برای μA741 در چند صدم درصدی مدل تحلیلی است و نشان می‌دهد که مدل op amp ایده‌آل تقریب بسیار خوبی برای مدارهای مجتمع است.



شکل ۶ـ۳۳ پنجره DC Sweep Setup.



(الف)



(ب)

شکل ۶ـ۳۴ (الف) ولتاژ خروجی مدار op amp که با ابزار مکان‌نما ترسیم و در آن ناحیه اشباع مشخص است. (ب) پنجرهٔ بزرگ‌شدهٔ مکان‌نمای prob.

تمرین

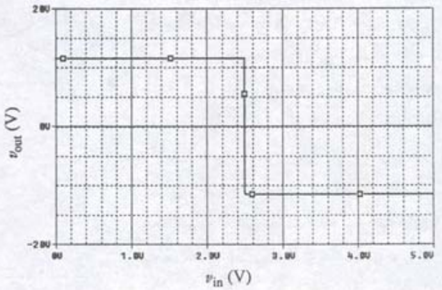
۶ـ۷ بقیه مدارهای op amp این فصل را شبیه‌سازی کنید و نتایج باقیمانده را با آن‌چه در مدل ایده‌آل پیش‌بینی شده بود مقایسه نمایید.

۶ـ۶ مقایسه‌گرها و تقویت‌کننده‌های وسایل اندازه‌گیری

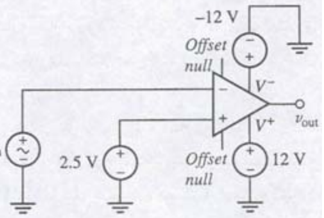
مقایسه‌گرها

هر مدار op amp که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته است اتصالی را بین پایه خروجی و پایه معکوس‌گر ورودی داشته است. این عمل را حلقه بسته[1] می‌نامند و برای تهیه پسخورد منفی طبق آنچه که قبلاً بحث شد از آن استفاده می‌شود. حلقه بسته روشی ارجح در استفاده از یک op amp به عنوان تقویت‌کننده است زیرا رفتار مدار را از تغییرات ناشی از بهره حلقه باز که به علت تغییر دما یا تفاوت‌های ساخت می‌باشد، جدا می‌سازد. البته مواردی وجود دارد که در آن آرایش حلقه باز برای op amp ترجیح داده می‌شود. وسایلی که در این گونه کاربردها به دفعات استفاده می‌شوند را مقایسه‌گر[2] می‌نامند، زیرا آن‌ها کمی متفاوت با op amp های معمولی ساخته می‌شوند تا سرعت آن‌ها در اِعمال حلقه باز بهبود یابد.

شکل ۶ـ۳۵ (الف) یک مدار مقایسه‌گر ساده است که یک ولتاژ مرجع به ورودی معکوس‌نکننده آن متصل بوده و ولتاژ مورد مقایسه (v_{in}) هم به ورودی معکوس‌گر وصل است.



(ب)



(الف)

شکل ۶ـ۳۵ (الف) یک مدار مقایسه‌گر ساده با 2.5 V ولتاژ مرجع. (ب) گراف مشخصه ورودی ـ خروجی.

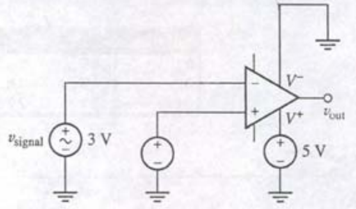
1. closed loop 2. comparator

چون op amp دارای بهره حلقه باز، A، خیلی بزرگی است (10^5 یا بیشتر که معمولاً می‌توان در جدول ۳ـ۶ مشاهده کرد)، اختلاف ولتاژ زیادی بین پایانه‌های ورودی لازم نیست تا آن را به حالت اشباع ببرد. در واقع یک اختلاف ولتاژ ورودی به اندازه ولتاژ تغذیه تقسیم بر A لازم است ـ تقریباً $\pm 120\ \mu V$ برای مدار شکل ۳۵ـ۶ (الف) و $A = 10^5$. خروجی تفکیک‌شده (جدا از هم شده) مقایسه‌گر در شکل ۳۵ـ۶ (ب) دیده می‌شود که پاسخ بین دو مقدار اشباع مثبت و منفی تغییر کرده است و در آن هیچ ناحیه تقویت خطی ملاحظه نمی‌شود. بنابراین یک خروجی 12 V از مقایسه‌گر نشانگر ورودی کمتر از ولتاژ مرجع، و یک خروجی 12 V منفی بیانگر ورودی بزرگتر از مرجع است اگر ما ولتاژ مرجع را به ورودی معکوس‌گر ببندیم رفتار حاصل مخالف خواهد بود.

مثال ۸ـ۶

یک مدار طراحی کنید که یک خروجی "منطق 1" را اگر سیگنال ولتاژ به زیر 3 V برود تهیه نماید و در غیر این‌صورت صفر ولت است.

چون می‌خواهیم خروجی مقایسه‌گر ما بین 0 و 5 V نوسان کند، ما از یک op amp با یک تغذیه تک‌ورودی 5 V+ استفاده می‌کنیم که مطابق شکل ۳۶ـ۶ متصل شده است. ما یک ولتاژ مرجع 3 V+ به ورودی معکوس‌نکننده وصل می‌کنیم که ممکن است با دو باتری 1.5 V سری یا یک مدار مرجع دیود زنر مناسب فراهم شده باشد. سیگنال ولتاژ ورودی (v_{signal}) هم به ورودی معکوس‌گر وصل است. در واقع محدوده ولتاژ اشباع یک مدار مقایسه‌گر کمی کمتر از ولتاژ منبع تغذیه است، بنابراین کمی تنظیم ممکن است همراه با اشباع یا تست لازم باشد.

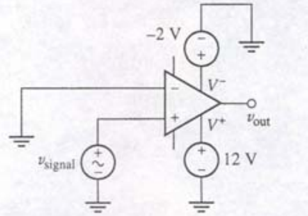


شکل ۳۶ـ۶ یک طراحی برای مدار موردنظر.

تمرین

۸ـ۶ مداری طراحی کنید که اگر v_{signal} از 0 V تولید کند، خروجی 12 V را تولید می‌نماید در غیر این صورت 2- V تولید می‌شود.

جواب: یک راه ممکن شکل ۳۷ـ۶ است.



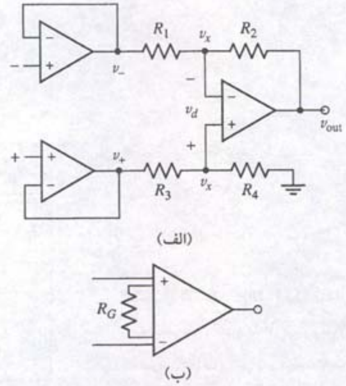
شکل ۳۷ـ۶ یک راه‌حل ممکن برای تمرین ۸ـ۶

تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری

مدار مقایسه‌گر مبنا بر روی اختلاف ولتاژ بین دو پایانه ورودی به دستگاه عمل می‌کند، ولی سیگنال‌ها را تقویت نمی‌کند زیرا خروجی متناسب با ورودی نیست. تقویت‌کننده تفاضلی شکل ۱۰ـ۶ هم مادامی که به اشباع نرود بر روی اختلاف ولتاژ بین ورودی‌های معکوس‌کننده و معکوس‌نکننده عمل کرده و خروجی متناسب با این تفاضل تولید می‌نماید. با این وجود وقتی که با ولتاژ ورودی کوچک سروکار داریم، راه بهتر وسیله‌ای به نام تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری است، که در واقع از سه تقویت‌کننده در یک بسته استفاده می‌نماید.

مثالی از یک آرایش تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری در شکل ۳۸ـ۶ (الف) و نماد آن در شکل ۳۸ـ۶ (ب) دیده می‌شود. هر ورودی مستقیماً به طبقه دنبال‌گر ولتاژ[1] (ولتاژ فالوور) اعمال شده و هر دو خروجی دنبال‌گرها به یک طبقه تقویت‌کننده تفاضلی اعمال می‌گردد. این وسیله خصوصاً در مواردی مناسب است که سیگنال ولتاژ ورودی خیلی کوچک است (مثلاً از مرتبه میلی‌ولت) از ولتاژ تولیدشده به وسیله ترموکوپل‌ها، یا گیج‌های کششی[2]، یا یک سیگنال پارازیت حالت مشترک در حد چند ولت می‌توان نام برد.

اگر اجزای تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری همگی در یک تراشه ساخته شوند، آنگاه ممکن است انتظار داشت که مشخصه‌های وسیله هم‌خوانی داشته باشند و به نسبت به مقاومت‌های دقیقی دست یابیم. برای این‌که CMRR تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری



شکل ۳۸ـ۶ (الف) تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری مبنا. (ب) نماد مورد استفاده رایج.

1. voltage follower 2. strain gauge

حداکثر شود، انتظار داریم $R_4/R_3 = R_2/R_1$ باشد، به نحوی که تقویت برابر مولفه‌های حالت مشترک سیگنال‌های ورودی به دست آید. برای شکافتن بیشتر موضوع، ولتاژ را در خروجی دنبال‌گر ولتاژ بالا "v_-" و ولتاژ در خروجی دنبال‌گر ولتاژ پایین را "v_+" می‌نامیم. با فرض این‌که هر سه تقویت‌کننده ایده‌آل باشند و نام‌گذاری ولتاژ در هر ورودی طبقه تفاضلی با v_x می‌توان معادلات گرهی زیر را نوشت:

$$\frac{v_x - v_-}{R_1} + \frac{v_x - v_{out}}{R_2} = 0 \qquad (۲۰)$$

و

$$\frac{v_x - v_+}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} = 0 \qquad (۲۱)$$

با حل معادله (۲۱) برای v_x داریم:

$$v_x = \frac{v_+}{1 + R_3/R_4} \qquad (۲۲)$$

و با جایگزین در معادله (۲۰) عبارتی برای v_{out} برحسب ورودی داریم:

$$v_{out} = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_4/R_3}\right) v_+ - \frac{R_2}{R_1} v_- \qquad (۲۳)$$

واضح است که معادله (۲۳)، در حالت کلی اجازه تقویت مولفه‌های حالت مشترک را می‌دهد. در حالت خاص که به هر حال $R_4/R_3 = R_2/R_1 = K$ است، معادله (۲۳) به $K(v_+ - v_-) = Kv_d$ کاهش می‌یابد به طوری که برای op amp های ایده‌آل تنها تفاضل تقویت می‌شود و بهره هم با نسبت مقاومت‌ها تعیین می‌گردد. چون این مقاومت‌ها برای تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری درونی است و به وسیله کاربر قابل دسترسی نیستند. قطعات عملی مانند AD622 اجازه تنظیم بهره را بین 1 الی 1000 می‌دهند که این کار به وسیله مقاومت خارجی بین دو پایه که در شکل ۳۸ـ۶ (ب) نشان داده شده است، انجام می‌گردد.

۷ـ۶ خلاصه فصل و مرور

- در تحلیل op amp ایده‌آل دو قاعده اساسی را باید به کاربرد:
  1. هیچ جریانی به هیچ‌یک از پایانه‌های ورودی وارد نمی‌شوند.
  2. هیچ اختلاف پتانسیلی بین پایانه‌های ورودی وجود ندارد.
- هدف از تحلیل مدارهای op amp معمولاً یافتن ولتاژ خروجی برحسب بعضی از کمیت یا کمیت‌های ورودی است.
- تحلیل گرهی معمولاً بهترین انتخاب در op amp است و بهتر است از ورودی شروع و به سمت خروجی ادامه یابد.
- برای جریان خروجی op amp نمی‌توان مقدار فرض کرد، بلکه باید پس از تعیین ولتاژ خروجی، آن را به دست آورد.
- بهره مدار op amp معکوس‌گر با معادله زیر داده می‌شود:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_{in}} v_{in}$$

- بهره مدار op amp معکوس‌نکننده با معادله زیر داده می‌شود:

$$v_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{in}$$

- همواره یک مقاومت از پایه خروجی یک op amp به پایه ورودی معکوس‌گر وصل می‌شود تا بدین‌وسیله با پسخورد منفی، پایداری را افزایش دهد.
- مدل op amp ایده‌آل بر پایه بهره حلقه باز بینهایت A، مقاومت ورودی بی‌نهایت و مقاومت صفر خروجی، R_o، استوار است.
- در عمل، محدوده ولتاژ خروجی op amp با ولتاژهای تغذیه تعیین می‌گردد.

۶-۸ خواندنی‌های کمکی

Two very readable books which deal with a variety of op amp applications are:

R. Mancini (ed.), *Op Amps Are For Everyone,* 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003. Also available on the Texas Instruments website (www.ti.com).

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook,* 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

Characteristics of Zener and other types of diodes are covered in Chapter 1 of

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

One of the first reports of the implementation of an "operational amplifier" can be found in

J. R. Ragazzini, R. M. Randall, and F. A. Russell, "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits," *Proceedings of the IRE* **35**(5), 1947, pp. 444–452.

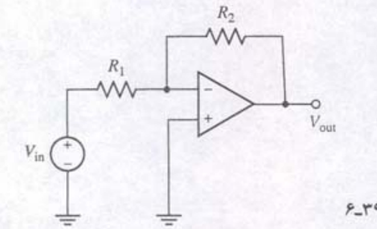
And an early applications guide for the op amp can be found on the Analog Devices, Inc. website (www.analog.com):

George A. Philbrick Researches, Inc., *Applications Manual for Computing Amplifiers for Modelling, Measuring, Manipulating & Much Else.* Norwood, Mass.: Analog Devices, 1998.

مسائل

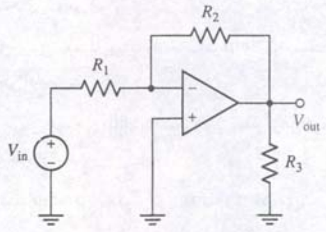
۶-۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل

۱. برای مدار op amp شکل ۶-۳۹، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 3V$، $R_1 = 10\Omega$ و $R_2 = 100\Omega$ باشد؛ (ب) $V_{in} = 2.5V$، $R_1 = 1M\Omega$ و $R_2 = 1M\Omega$ (ج) $V_{in} = -1V$، $R_1 = 3.3k\Omega$ و $R_2 = 4.7 k\Omega$.



شکل ۶-۳۹

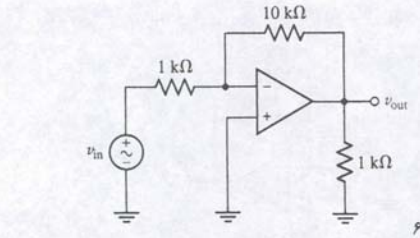
۲. برای مدار تقویت‌کننده شکل ۶-۴۰، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 1.5V$، $R_1 = 10\Omega$، $R_2 = 47\Omega$ و $R_3 = 10\Omega$، (ب) $V_{in} = -9V$، $R_1 = 1M\Omega$، $R_2 = 1M\Omega$ و $R_3 = 1k\Omega$ و (ج) $V_{in} = 100mV$، $R_1 = 1k\Omega$، $R_2 = 6.8k\Omega$ و $R_3 = 330\Omega$ باشد.



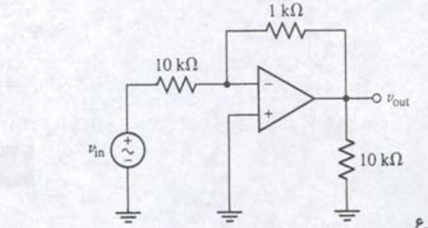
شکل ۶-۴۰

۳. ولتاژ خروجی V_{out} برای مدار op amp در شکل ۶-۴۱ را رسم کنید اگر (الف) $V_{in} = 2 \sin 5t$ V و (ب) $V_{in} = 1 + 0.5 \sin 5t$ V باشد.

۴. ولتاژ خروجی V_{out} برای مدار op amp در شکل ۶-۴۲ را رسم کنید اگر (الف) $V_{in} = 10 \cos 4t$ V و (ب) $V_{in} = 15 + 4 \cos 4t$ V باشد.



شکل ۶-۴۱



شکل ۶-۴۲

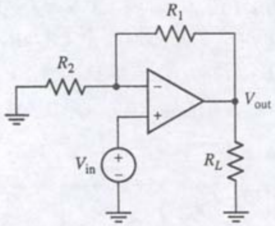
۵. مداری رسم کنید که 9- V را به بار 47 kΩ حمل کند، اگر فقط ±5 V برای تغذیه موجود باشد (برای این مسئله لازم نیست منابع تغذیه که به ±5 V محدود نیستند را رسم کرد).

۶. مداری برای حمل +20 V به یک مقاومت 1 kΩ رسم کنید، اگر منابع تغذیه ±5 V باشد (لازم نیست منابع تغذیه که به ±5 V محدود نیستند را رسم کرد).

۷. مداری طراحی کنید که +1.5 V را به یک بار نامشخص حمل کند، اگر فقط یک منبع تغذیه موجود باشد. لازم نیست منبع تغذیه را در op amp لحاظ کنید.

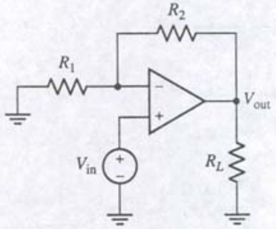
۸. یک مدار برای حمل +3 V به بار ناشناخته‌ای طراحی کنید. اگر فقط یک منبع تغذیه موجود باشد لازم نیست منبع تغذیه را در op amp لحاظ کنید.

۹. برای مدار op amp شکل ۶-۴۳، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 300$ mV، $R_1 = 47\ \Omega$ و $R_2 = 10\ \Omega$ باشد؛ (ب) $V_{in} = 1.5V$، $R_1 = 1M\Omega$ و $R_2 = 1\ M\Omega$ (ج) $V_{in} = -1$ V، $R_1 = 4.7\ k\Omega$ و $R_2 = 3.3\ k\Omega$.



شکل ۶-۴۳

۱۰. برای مدار شکل ۶-۴۴، V_{out} را به دست آورید اگر (الف) $V_{in} = 200$ mV، $R_L = 10\ k\Omega$، $R_1 = 10\ \Omega$ و $R_2 = 47\ \Omega$؛ (ب) $V_{in} = -9$ V، $R_L = 1\ k\Omega$، $R_1 = 1\ M\Omega$ و $R_2 = 1\ M\Omega$ و (ج) $V_{in} = 100$ mV، $R_L = 330\ \Omega$، $R_1 = 1\ k\Omega$ و $R_2 = 6.8\ k\Omega$.

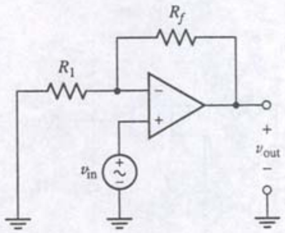


شکل ۶-۴۴

۱۱. در مدار شکل ۶-۴۵ $R_1 = R_f = 1\ k\Omega$ است. ولتاژ خروجی V_{out} را رسم کنید اگر

الف. $V_{in} = 4 \sin 10t$ V

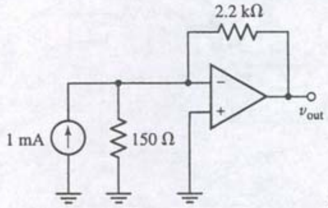
ب. $V_{in} = 1 + 0.255 \sin 10t$ V باشد.



شکل ۶-۴۵

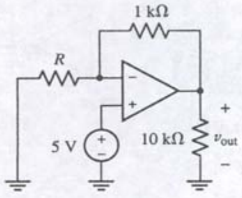
۱۲. در مدار op amp شکل ۶-۴۵، $R_1 = 2\ k\Omega$ و $R_f = 1\ k\Omega$ است. ولتاژ خروجی V_{out} را رسم کنید اگر (الف) $V_{in} = 2 \cos 2t$ V و (ب) $V_{in} = 4 + \cos 2t$ V.

۱۳. با مراجعه به شکل ۶-۴۶ ولتاژ V_{out} را محاسبه کنید.



شکل ۶-۴۶

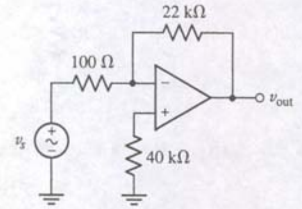
۱۴. در مدار شکل ۶-۴۷، چه مقداری برای R لازم است تا توان 150mW به مقاومت 10kΩ منتقل شود.



شکل ۶-۴۷

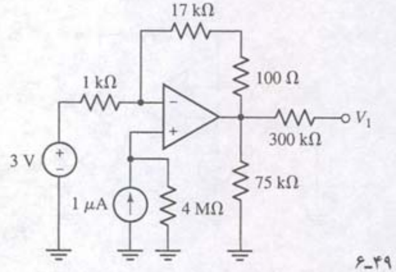
۱۵. یک میکروفون می‌تواند 0.5V را وقتی کسی در فاصله 20ft دست می‌زند، انتقال دهد. یک سوئیچ الکترونیک مقاومت تونن معادل 670Ω را داشته و برای فعال‌شدن به 100mA جریان نیاز دارد. مداری طراحی کنید که میکروفون را به سوئیچ الکترونیک وصل کند که با دست‌زدن فردی فعال شود.

۱۶. برای مدار شکل ۶-۴۸، عبارتی برای v_{out} برحسب v_s به‌دست‌آورید.



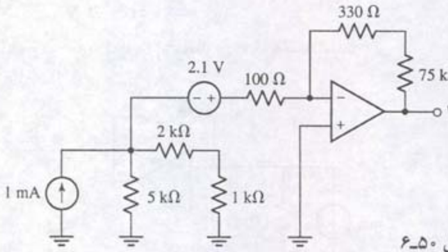
شکل ۶-۴۸

۱۷. برای مدار شکل ۶-۴۹، v_1 را محاسبه کنید.



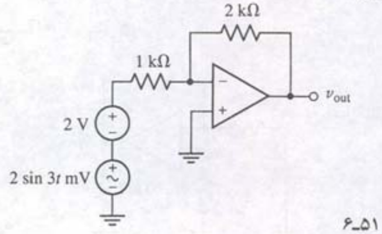
شکل ۶-۴۹

۱۸. برای مدار شکل ۶-۵۰، v_2 را محاسبه نمایید.



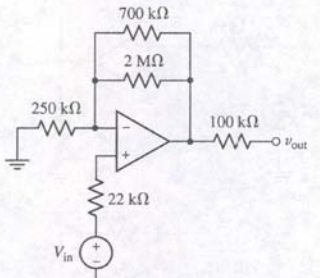
شکل ۶-۵۰

۱۹. عبارتی برای v_{out} در مدار شکل ۶-۵۱ پیداکنید و در $t = 3$ آن را ارزیابی نمایید.



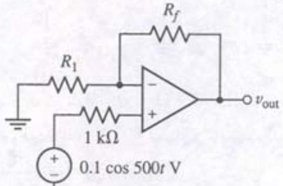
شکل ۶-۵۱

۲۰. چه مقداری از v_{in} منجر به خروجی 18V در مدار شکل ۶-۵۲ می‌گردد؟



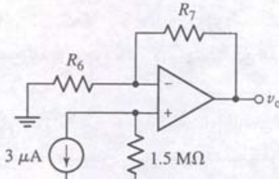
شکل ۶-۵۲

۲۱. R_1 و R_f را در شکل ۶-۵۳ برای محاسبه $v_{out} = 23.7 \cos 500t$ V انتخاب کنید.



شکل ۶-۵۳

۲۲. عبارتی برای v_{out} در شکل ۶-۵۴ بدون استفاده از تبدیل منبع به‌دست‌آورید.



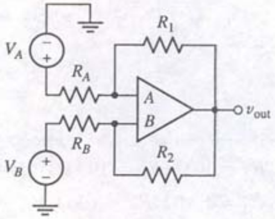
شکل ۶-۵۴

۲۳. با مراجعه به مدار شکل ۶-۵۵:

(الف) اگر $v_A = 0$، $v_B = 1V$، $R_A = R_B = 10k\Omega$، $R_1 = 70k\Omega$، $R_2 = \infty$ و $v_{out} = 8V$ باشد، کدام پایانه (A یا B) معکوس‌نکننده است؟

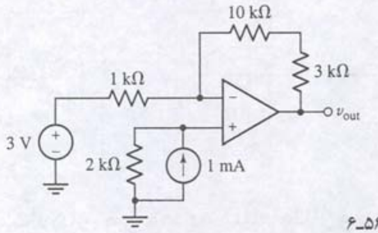
(ب) $v_A = 10$ V، $v_B = 0$ V است. اگر B ورودی وارونگر باشد، R_A، R_B، R_1 و R_2 را برای تولید یک ولتاژ خروجی 20 V انتخاب نمایید.

(ج) $v_A = v_B = 1$ V، $R_1 = 0$ و $R_2 = \infty$ است. کدام پایانه ورودی (A یا B) وارونگر است؟ توضیح دهید.



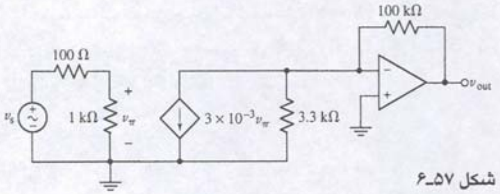
شکل ۶-۵۵

۲۴. برای مدار op amp شکل ۶-۵۶، v_{out} را حساب کنید.



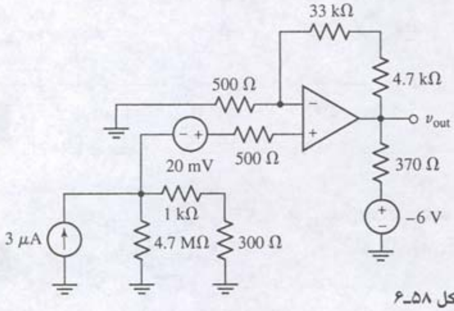
شکل ۶-۵۶

۲۵. اگر در مدار شکل ۶-۵۷، $v_s = 5 \sin 3t$ V باشد، v_{out} را در $t = 0.25$s به‌دست‌آورید.



شکل ۶-۵۷

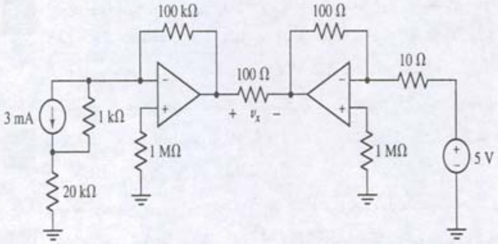
۲۶. از تکنیک‌های تحلیل مدار مناسب برای محاسبه v_{out} در شکل ۶-۵۸ استفاده نمایید.



شکل ۶-۵۸

۲۷. در شکل ۶-۵۸، منبع 3μA را با منبع 27μA جایگزین کرده سپس v_{out} را محاسبه کنید.

۲۸. v_x را برای مدار دو تقویت‌کننده‌های شکل ۶-۵۹ به‌دست‌آورید.

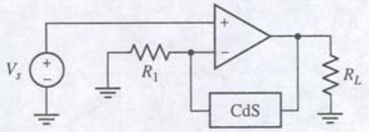


شکل ۶-۵۹

۲۹. عبارتی برای تقویت‌کننده مجموع، که در آن هر مقاومت مقدارخاص خود را دارد به‌دست‌آورید.

۳۰. عبارتی برای تقویت‌کننده تفاضلی، که در آن هر مقاومت مقدار خاصی را دارد، به‌دست‌آورید.

۳۱. سولفید کادمیوم (CdS) معمولاً برای ساخت مقاومت‌های حساس به نور در سطح آن استفاده‌می‌شود. در شکل ۶-۶۰، یک فتوسل به‌عنوان مقاومت پسخورد R_f به‌کاررفته‌است. در تاریکی محض، مقاومت آن 100kΩ و در نور 6 شمع برابر 10kΩ است. R_L معادل تونن مداری استکه به‌هنگام اعمال 1.5 V یاکمتر به پایانه‌هایش فعال‌می‌شود. R_1 و v_s را طوری تعیین کنید که مقدار R_L با نور 2 شمع یا بیشتر فعال‌شود.



شکل ۶-۶۰

۳۲. دو میکروفون در یک استودیو ضبط مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی برای صوت و دیگری برای آلات موسیقی. مداری طراحی کنید که بتواند خروجی هر دو میکروفون را ترکیب نماید، ولی صوت دو برابر آلات موسیقی، تقویت شود.

۳۳. یک سیگنال سینوسی روی آفست dc، 2V، سوار است (به بیان دیگر مقدار متوسط موج سینوسی 2V است). مداری برای حذف آفست dc طراحی کنید و سیگنال سینوسی را با ضریب 100 تقویت نمایید (بدون معکوس‌کردن فاز).

۶-۳ طبقات پی‌درپی

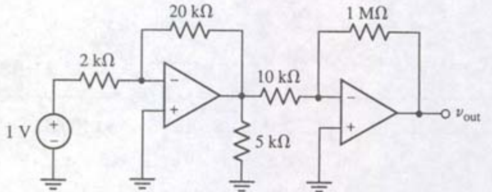
۳۴. مداری طراحی کنید که متوسط سه ولتاژ v_1، v_2 و v_3 را در خروجی‌اش تولید نماید.

۳۵. یک سیستم موجودی فروشگاه الکترونیکی از یک ترازو در زیر هر پالت استفاده می‌کند، خروجی ترازو طوری تنظیم شده است که در ازای هر کیلوگرم 1 mV را تولید می‌کند. یک مدار طراحی نمایید تا ولتاژ خروجی متناسب با وزن کل گروهی از اقلام مشابه در انبار را تولید (توزیع‌شده بین چهار پالت)، و در آن وزن هر پالت کسر شده باشد (وزن پالت به عنوان ولتاژ مرجع برای هر پالت در نظر گرفته شود). ولتاژ خروجی شما باید چنان کالیبره شود که 1 mV برای 1 kg باشد.

۳۶. یک تفنگ رادار سازنده‌ای برای اندازه‌گیری، سرعت عمودی یک ولتاژ خروجی متناسب با سرعت شیئی که هدف است را فراهم می‌کند، به نحوی که 10 mV = 1 mph. اگر سرعت‌سنج خودرو طوری تنظیم شود تا یک سیگنال متناسب با سرعتش تولید کند، و 10 mV = 1 mph باشد، یک مدار چندطبقه طراحی کنید که (الف) یک سیگنال ولتاژ برابر با اختلاف سرعت خودروی سرعت‌دار و خودروی پلیس را تولید نماید (به طوری که سرعت پلیس در 1 mph کمتر =

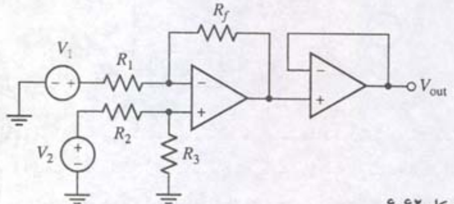
10 mV) و (ب) سیگنال ولتاژی برای هر یک از سه کمیت به kph فراهم کند به طوری که $10\ mV = 1\ kph$ باشد.

۳۷. v_{out} را برای مدار شکل ۶۶۱ محاسبه کنید.



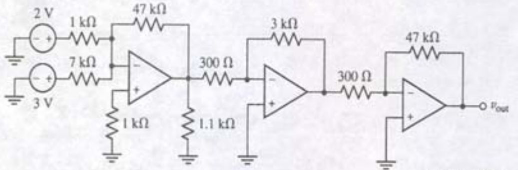
شکل ۶ـ۶۱

۳۸. عبارتی برای v_{out} برحسب v_1 و v_2 برای مدار شکل ۶۶۲ به‌دست‌آورید.



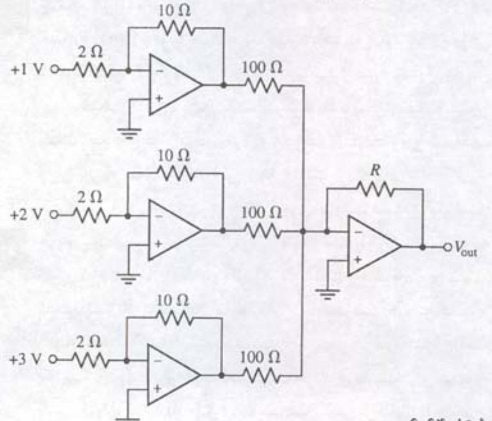
شکل ۶ـ۶۲

۳۹. برای مدار op amp پی‌درپی در شکل ۶۶۳ ولتاژ خروجی هر طبقه را محاسبه نمایید.



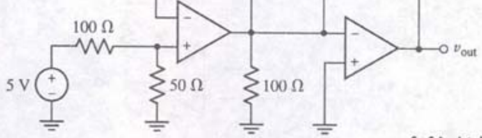
شکل ۶ـ۶۳

۴۰. با مراجعه به مدار op amp شکل ۶۶۴ چه مقداری از R برای تهیه $v_{out} = 10\ V$ لازم است؟



شکل ۶ـ۶۴

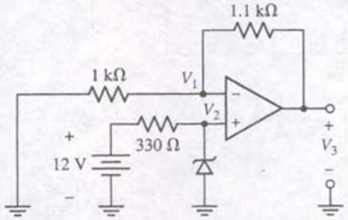
۴۱. v_{out} را برای مدار دو طبقه op amp شکل ۶۶۵ حساب کنید.



شکل ۶ـ۶۵

۶ـ۴ مدارهای مربوط به منابع ولتاژ و جریان

۴۲. (الف) مدار شکل ۶۶۶ از یک دیود 1N750 استفاده می‌نماید که با ولتاژ زنر 4.7 V مشخص شده است. ولتاژهای V_1، V_2 و V_3 را تعیین کنید. (ب) صحت تحلیل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید. یک شماتیک را با برچسب مناسب نشان دهید و روی منابع هر اختلاف بین دو تحلیل اظهارنظر نمایید.



شکل ۶ـ۶۶

۴۳. مداری برای تولید یک ولتاژ مرجع 5.1 V+ به عنوان ورودی به یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر فقط باتری 9 V موجود باشد. از دیود 1N4733 که ولتاژ زنری 5.1 V را در جریان 76 mA تولید کند استفاده کنید.

۴۴. یک مدار برای تولید ولتاژ مرجع 2.5 V- را در ورودی یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی نمایید اگر باتری‌های 9 V موجود باشد. از یک دیود 1N4740 که ولتاژ زنری 10 V در جریان 25 mA را داراست استفاده کنید.

۴۵. مداری برای تولید یک ولتاژ مرجع 12 V+ به عنوان ورودی به یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر باتری‌های 9 V موجود باشد. از یک دیود 1N4747 استفاده کنید که ولتاژ زنری 20 V در جریان 12.5 mA دارد.

۴۶. (الف) مداری برای تولید ولتاژ مرجع 5 V- به عنوان یک ورودی به دنبال‌گر ولتاژ به‌کار می‌رود، اگر باتری‌های 9 V موجود باشند. از دیود 1N4728 استفاده کنید که ولتاژ زنری 3.3 V در جریان 76 mA دارد. (ب) طرح خود را برای تهیه ولتاژ مرجع 2.2 V+ اصلاح کنید.

۴۷. یک مدار منبع جریان طراحی کنید که بتواند 25 mA را به یک بار نامشخص بدهد. از دیود زنر 1N4740 استفاده نمایید که ولتاژ شکست آن 10 V در جریان 25 mA است.

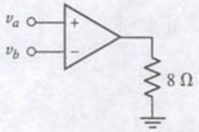
۴۸. یک مدار منبع جریان که بتواند 12.5 mA برای یک بار ناشناخته تولید کند، طراحی نمایید. از دیود زنر 1N4747 استفاده کنید که دارای ولتاژ شکست 20 V در جریان 12.5 mA است.

۴۹. یک منبع جریان طراحی کنید که بتواند جریان 75 mA را برای بار ناشناخته‌ای تولید نماید. از یک دیود 1N4747 استفاده کنید، که ولتاژ شکست 20 V در جریان 12.5 mA تولید کند. اگر تقویت‌کننده با 15 V ± تغذیه شود، محدود باری که می‌تواند به طرح شما متصل شود را مشخص کنید.

۵۰. با استفاده از مدل دقیق‌تر μA741، توان انتقالی به مقاومت 8Ω در شکل ۶۶۷ چقدر است. به‌شرطی‌که:

الف. $v_a = v_b = 1\ nV$ ب. $v_b = 1\ nV,\ v_c = 0$

ج. $v_b = 1fV,\ v_a = 2pV$ د. $v_b = -4\mu V,\ v_a = 50\mu V$



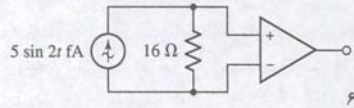
شکل ۶ـ۶۷

۵۱. یک مدار op amp معکوس‌گر با AD549 ساخته شده است. اگر $R_1 = 270k\Omega$ و $R_f = 1M\Omega$ باشند، چه جریان ورودی تغذیه‌ای (بایاس) لازم است. (الف) $v_s = 1\ mV$، (ب) $v_s = -7.5\ mV$ و (ج) $v_s = 1\ V$.

۵۲. v_{out} را برای مدار شکل ۶۶۸ به‌دست‌آورید، اگر:

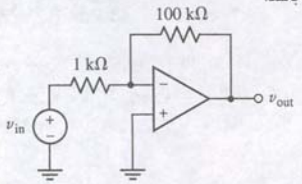
الف. $A = 10^5$، $R_i = 100M\Omega$ و $R_o = 0$ باشد.

ب. $A = 10^6$، $R_i = 1T\Omega$ و $R_o = 0$ باشد.



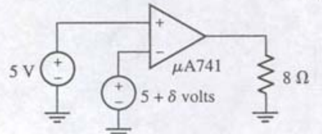
شکل ۶ـ۶۸

۵۳. برای مدار شکل ۶۶۹ (الف) عبارتی برای v_{out}/v_{in} به‌دست‌آورید به‌شرطی‌که $R_i = \infty$، $R_o = 0$ و A بی‌نهایت باشد. (ب) چه مقداری برای بهره حلقه باز A لازم است تا بهره حلقه بسته در یک درصد مقدار ایده‌آل خود باشد.



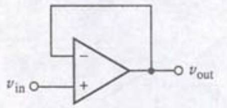
شکل ۶ـ۶۹

۵۴. برای مدار شکل ۶۷۰ توان تلف‌شده به وسیله مقاومت 8Ω را به‌دست‌آورید. به‌شرطی‌که δ برابر با (الف) 0V، (ب) 1nV و (ج) 2.5 μV باشد.



شکل ۶ـ۷۰

۵۵. با استفاده از پارامترهای AD549، v_{out} را برای مدار شکل ۶۷۱ محاسبه کنید به شرطی که $v_{in} = -16mV$ باشد.



شکل ۶ـ۷۱

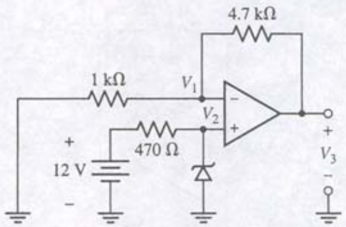
۶ـ۵ ملاحظات عملی

۵۶. یک عبارت برای ولتاژ خروجی دنبال‌گر برحسب ولتاژ v_{in} برای حالتی که بهره حلقه باز متناهی و مقاومت ورودی معین و مقاومت خروجی غیرصفر است طراحی کنید. نشان دهید که برای حالت op amp ایده‌آل، عبارت به $v_{out} = v_{in}$ کاهش می‌یابد.

۵۷. (الف) یک مدل کامل op amp که شامل وجود بهره حالت مشترک A_{CM} در خروجی باشد، بسازید. (ب) از مدل برای 10^5، $R_i = \infty$، $R_o = 0$ و $A_{CM} = 10$ استفاده کنید. (ج) پاسخ خود را با $A_{CM} = 0$ مقایسه کنید.

۵۸. سرعت واکنش را تعریف نمایید و اهمیت آن را در موج خروجی یک مدار توضیح دهید.

۵۹. مدار شکل ۶۷۲ از یک دیود 1N750 استفاده می‌نماید، که با یک ولتاژ 4.7 V مشخص شده است. (الف) ولتاژهای V_1، V_2 و V_3 را تعیین نمایید. (ب) پاسخ خود را با اجرای شبیه‌سازی PSpice، و استفاده از μA741 و تغذیه 18 V ± تحقیق نمایید. نتیجه خود را به درستی نام‌گذاری (برچسب‌زنی) کنید. اگر حل شبیه‌سازی دقیقاً موافق با محاسبه دستی نیست، سعی کنید که عامل اختلاف را پیدا کنید. (ج) حداقل مقداری که با آن منبع می‌تواند به 12 V قبل از توقف مدار زنر، کاهش یابد چقدر است.

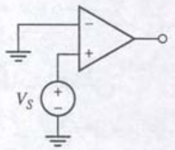


شکل ۶ـ۷۲

۶۰. به کمک PSpice یک مدار op amp، μA741، با تغذیه 15V ±، $R_1 = 10k\Omega$ و $R_f = 1M\Omega$ را شبیه‌سازی کنید. مشخصه ورودی - خروجی را ترسیم نمایید و نواحی خطی و اشباع مثبت و منفی را برچسب بزنید. آیا بهره پیش‌بینی‌شده به‌وسیله شبیه‌سازی با مدل ایده‌آل وفاق دارد.

۶۱. اگر بدانیم که کاربردهای ما فقط نیاز به معکوس‌کردن آرایش op amp دارد و نیازی به قطع ولتاژ خروجی نیست، حداقل تعداد پایه‌های لازم برای بسته‌بندی op amp چیست؟ هر کدام را با نام لیست نمایید.

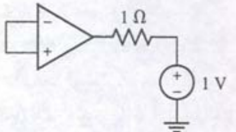
۶۲. مدار شکل ۶ـ۷۳ را با PSpice شبیه‌سازی کنید. به شرطی که (الف) از μA741 استفاده شود، (ب) LM324 استفاده شده باشد، (ج) LF411 به‌کار رفته باشد. ولتاژ تفاضل ورودی v_S لازم برای اشباع هر کدام را اگر تغذیه ±15 باشد به‌دست‌آورید.



شکل ۶ـ۷۳

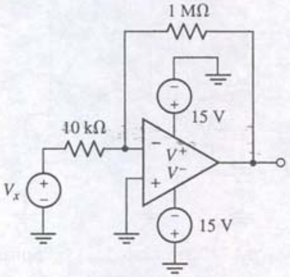
۶۳. با PSpice مدار op amp معکوس‌کننده μA741 را با تغذیه ±15V، $R_1 = 4.7k\Omega$ و $R_f = 1M\Omega$ شبیه‌سازی کنید. مشخصه‌های ورودی-خروجی را ترسیم نمایید و نواحی خطی و اشباع را معین کنید. آیا بهره با آنچه به مدل ایده‌آل متعلق است همخوانی دارد؟

۶۴. از مفهوم مدار شکل ۶ـ۷۴ برای تعیین مقاومت خروجی μA741 و LF411 استفاده کنید. ولتاژ تغذیه را تغییر دهید و ببینید آیا نتایج شبیه‌سازی تغییر می‌کند یا نه.



شکل ۶ـ۷۴

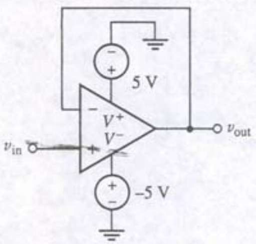
۶۵. مدار شکل ۶ـ۷۵ را با LM324 شبیه‌سازی کنید. (الف) جریان تغذیه و ولتاژ ورودی تفاضلی را معین کنید. این نتایج را با مقادیر مربوط به مدل مشروح و جدول ۶ـ۳ مقایسه کنید. (ب) بگویید آیا ولتاژ تغذیه مقادیر به‌دست‌آمده را تحت تأثیر قرار می‌دهد یا خیر.



شکل ۶ـ۷۵

۶۶. سنسوری یک سیگنال ولتاژ بین -30mV و +75mV را تولید می‌کند. (الف) اگر یک تقویت‌کننده معکوس‌گر با بهره ولتاژ $|v_{out}/v_{in}| = 1000$، تغذیه dc، ±15V به‌کاررود محدوده ولتاژ مورد انتظار چقدر است. (ب) اگر تقویت‌کننده از نوع معکوس‌نکننده و تغذیه نیز ±15V باشد حداکثر نسبت مقاومت R_f/R_1 به‌کاررفته بدون اشباع چقدر است؟

۶۷. (الف) مدار شکل ۶ـ۷۶ را با استفاده از μA741 در محدوده $-10V < v_{in} < +10V$ شبیه‌سازی کنید. ولتاژهای دقیق شروع اشباع را با ابزار مکان‌نما معین نمایید. (ب) یک op amp μA741 قادر به تولید تا 35mA جریان تحت شرایط اتصال کوتاه دایم است. حداکثر مقدار ممکن را برای جریان اتصال کوتاه مجاز به وسیله مدل PSpice معین نمایید.



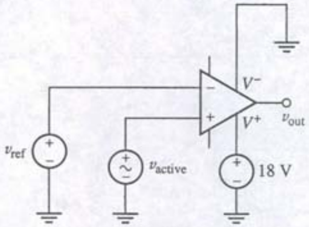
شکل ۶ـ۷۶

۶۸. طی تلاش برای اصلاح امنیت انتقال، یک سیگنال وابسته به زمان به یک سیگنال رادیویی قبل از مخابره اضافه شده است. همان سیگنال با فرکانس دیگری نیز مخابره شده است. با فرض اینکه هر آنتن گیرنده به صورت یک منبع ولتاژ وابسته به زمان، موازی با مقاومت 300Ω مدل‌سازی شود، مداری برای جداکردن دو سیگنال طراحی کنید، سیگنال اصلی را حذف کنید و سیگنال صوتی را با ضریب 10 تقویت نموده و حاصل آن را به بلندگوی 8Ω منتقل نمایید.

۶۹. یک مدار تقویت‌کننده که بتواند یک ولتاژ خروجی برابر با متوسط سه ولتاژ ورودی تولید کند، طراحی نمایید. شما می‌توانید فرض کنید که ولتاژهای ورودی در محدوده $-10V < v_{in} < +10V$ مورد اعتمادند. صحت طراحی خود را با PSpice و مجموعه ولتاژهای ورودی مناسب تحقیق کنید.

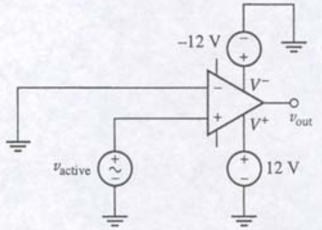
۶ـ۶ مقایسه‌گرها و تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری

۷۰. برای مدار شکل ۶ـ۷۷ ولتاژ مورد انتظار خروجی v_{out} را به صورت تابعی از v_{active} برای $-5 V \le v_{active} \le +5 V$ رسم کنید، به شرطی که v_{ref} برابر باشد با (الف) -3 V و (ب) +3 V.



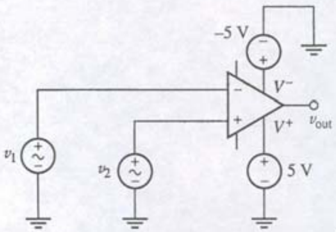
شکل ۶ـ۷۷

۷۱. برای مدار شکل ۶ـ۷۸، ولتاژ خروجی v_{out} را به صورت تابعی از v_{active} رسم کنید اگر $-2 V \le v_{active} \le +2 V$ باشد. صحت حل خود را با استفاده از μA741 تحقیق کنید (هرچند که این تقویت‌کننده برای استفاده به عنوان مقایسه‌گر کند است ولی شبیه‌سازی آن خوب کار می‌کند). روی نتایج نام‌گذاری مناسبی به کار ببرید.



شکل ۶ـ۷۸

۷۲. برای مدار شکل ۶ـ۷۹، (الف) ولتاژ خروجی مورد انتظار v_{out} را به صورت تابعی از v_1 برای $-5 V \le v_1 \le +5 V$ رسم کنید، اگر $v_2 = +2 V$ باشد، (ب) ولتاژ خروجی را به صورت تابعی از v_2 با $-5 V \le v_2 \le +5 V$ رسم کنید اگر $v_1 = +2 V$ باشد.

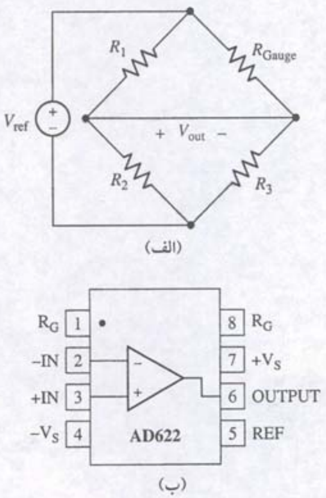


شکل ۶ـ۷۹

۷۳. در کاربردهای منطقی دیجیتال، یک سیگنال +5 V با حالت منطقی "1" و یک سیگنال 0 V با حالت منطقی "0" نشان داده می‌شود. برای پردازش یک سری اطلاعات واقعی با کامپیوتر دیجیتال، نوعی واسط لازم است که معمولاً یک مبدل آنالوگ به دیجیتال (A/D) است ـ که وسیله‌ای برای تبدیل سیگنال‌های آنالوگ به دیجیتال می‌باشد. مداری طراحی کنید که به صورت یک A/D یک بیت (1 bit) کار کند و هر ولتاژ کمتر از 1.5 V در منطق "0" و هر سیگنال بیشتر از 1.5 V به صورت منطق "1" نشان داده شود.

۷۴. برای تقویت‌کننده‌های دستگاه‌های اندازه‌گیری در شکل ۶ـ۳۸ (الف) فرض کنید که سه op amp داخلی ایده‌آل هستند، سپس CMRR را برای موارد زیر معین کنید: (الف) $R_1 = R_3$ و $R_2 = R_4$؛ (ب) هر چهار مقاومت متفاوت‌اند.

۷۵. یک کاربرد رایج برای تقویت‌کننده‌های دستگاه‌های اندازه‌گیری، اندازه‌گیری ولتاژها در مدارهای گیج کشش مقاومتی است. این سنسورهای گیج کششی با تغییر مقاومت‌هایی که به علت تغییر شکل رخ می‌دهند کار می‌کنند (شکل ۶ در فصل ۲). آن‌ها اغلب بخشی از مدار پل می‌باشد (شکل ۶ـ۸۰ (الف))، که در آن گیج‌کششی با R_G نشان داده شده است. (الف) نشان دهید که $V_{out} = V_{in}\left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_{Gauge}}\right]$. (ب) تحقیق کنید که $V_{out} = 0$ خواهد بود اگر سه مقاومت R_1، R_2 و R_3 همگی با مقاومت R_{Gauge} غیرکششی برابر باشند. (ج) برای کاربرد موردنظر، گیج انتخابی دارای یک مقاومت غیرکششی 5 kΩ است و یک افزایش مقاومت حداکثر 50 mΩ مورد انتظار است. تنها منبع تغذیه ±12 V موجود است. با استفاده از تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری شکل ۶ـ۸۰ (ب) مداری طراحی کنید که یک سیگنال ولتاژ +1 V را وقتی گیج در حداکثر بار است تولید نماید.



شکل ۶ـ۸۰

مشخصات AD622

بهره تقویت‌کننده G می‌تواند از 2 تا 100 با اتصال مقاومتی بین پایه‌های 1 الی 8 و رابطه زیر تغییر کند:

$$R = \frac{50.5}{G - 1} k\Omega$$

فصل هفتم

خازن‌ها و القاگرها

مفاهیم کلیدی

- رابطه ولتاژ ـ جریان برای یک خازن ایده‌آل
- رابطه ولتاژ ـ جریان یک القاگر ایده‌آل
- محاسبه انرژی ذخیره‌شده در خازن‌ها و القاگرها
- تحلیل پاسخ خازن و القاگر به امواج متغیر با زمان
- ترکیب سری و موازی القاگرها
- مدار op amp با استفاده از خازن‌ها
- مدل‌سازی PSpice برای عناصر ذخیره‌ساز انرژی

مقدمه

در ایـن فـصل مـا دو عـنصر غـیرفعال جـدید، یـعنی خـازن و القـاگـر را مـعرفی مـی‌کنیم کـه هـر یک می‌توانند هم مقدار معینی انرژی را ذخیره کنند و هم تحویل دهند. از این دیدگاه آن‌ها بـا مـنابع ایـده‌آل تفاوت دارند، زیرا آن‌ها نمی‌توانند مقدار انرژی معینی را برای فاصله زمانی نامتناهی ارائه کـنند. گـرچـه آن‌ها به عنوان عناصر خطی کلاسه‌بندی شده‌اند، رابطه جریان ـولتاژ برای این عـناصر جـدید بـه زمـان وابسته است، و منتهی به مدارهای جالب زیادی می‌گردد. همان‌طور که به زودی خواهیم دید، مـحدوده مقادیر ظرفیت و القایی که با آن‌ها مواجه می‌شویم خیلی بزرگ است و ممکن‌است در مقطعی از زمان بر رفتار سیستم تأثیر بگـذارنـد و در مـواردی دیگـر هـم اهـمیت نـداشـته بـاشند. چـنین مـوضوعاتی در کـاربردهایی مـدرن از مـدارهـا، خـصوصاً سیستم‌های کـامپیوتر و مـخابرات کـه رفـته رفـته در آن‌ها فرکانس‌های کاری و چگالی عناصر زیاد می‌شود، به‌طور پیوسته‌ای اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند.

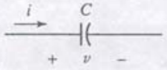
۷ـ۱ خازن

مدل خازن ایده‌آل

قبلاً منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل را **عناصر فعال** خواندیم ولی یک مقاومت خطی را **عنصری غیرفعال** نام نهادیم. با این وجود تعاریف فعال و غیرفعال هنوز کمی مبهم‌اند و باید روی آن‌ها بیشتر تمرکز کرد. اکنون یک عنصر فعال را به‌صورت عنصری تعریف می‌کنیم که بتواند توان مـتوسط بـزرگ‌تر از صـفری را بـه تـعدادی عـناصر خـارجی (بیرون) تـحویل نـماید، و متوسط‌گیری نیز در فاصله زمانی بی‌نهایت انجام می‌شود. منابع ایده‌آل، عـناصری فـعالند، و تقویت‌کننده‌های عملیاتی نیز وسایلی فـعال مـحسوب مـی‌شوند. بـا ایـن وجـود یک عـنصر غیرفعال به صورت عنصری تعریف می‌شود کـه نـمی‌توانـد در مـدت‌زمان بـی‌نهایت، تـوان متوسط بزرگ‌تر از صفری را تحویل دهد. مقاومت، در این دسته‌بندی قرار می‌گیرد و انـرژی دریافتی به وسیله آن نیز به گرما تبدیل می‌شود و هرگز انرژی‌ای را تولید نمی‌کند.

اکنون عنصر غیرفعال جدیدی که خازن نام دارد را معرفی می‌کنیم. ما خازن C را با رابطه ولتاژ ـجریان زیر معرفی می‌کنیم:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$



شکل ۷ـ۱ نماد و قرارداد عناصر غیرفعال ولتاژ و جریان خازن.

که v و i قراردادهای یک عنصر غیرفعال را طبق شکل ۷ـ۱ ارضا می‌کنند. باید همواره به خاطر بسپاریم که v و i توابعی از زمان هستند و حتی به منظور تأکید، اگر گاهی لازم باشد آن‌ها را با $v(t)$ و $i(t)$ نشان خواهیم داد. از معادله (۱) می‌توان واحد ظرفیت خازن را به‌صورت آمپر ثانیه بر ولت یا کولن بر ولت تعریف کرد. ما از این پس یک کولن بر ولت را فاراد[1] نـامیده و آن را به‌عنوان واحد ظرفیت برمی‌گزینیم.

1. Farad

خازن ایده‌آل تعریف‌شده با رابطه (۱) فقط یک مدل ریاضی از یک وسیله واقعی است. یک خازن از دو سطح هادی که بار بر روی آن پهن می‌شود، تشکیل شده است. این صفحات با لایه‌ای از عایق که مقاومت بالایی دارد، از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر این مقاومت بسیار بزرگ و مثلاً بی‌نهایت فرض شود، آنگاه بارهای مخالف و مساوی واقع بر صفحات خازن هرگز دوباره از داخل عنصر با هم ترکیب نمی‌شوند. ساخت قطعه فیزیکی با توجه به نماد مداری شکل ۷ـ۱ صورت می‌گیرد. بیایید فرض کنیم که یک منبع خارجی به این خازن متصل شده و جریان مثبتی از یک صفحه آن وارد و از صفحه دیگر خارج می‌شود. هر جریانی که وارد شود به همان اندازه از آن خارج می‌گردد و جز این هم از یک عنصر دو پایانه نمی‌توان انتظار داشت. اکنون درون خازن را بررسی می‌کنیم. جریان مثبت وارده به یک صفحه نشان‌دهنده بار مثبتی است که از طریق سیم پایانه به سمت صفحه آن حرکت می‌کند. این بار نمی‌تواند از خازن عبور کند و بنابراین روی صفحه انبار می‌شود. درواقع جریان و بار رو به افزایش با معادله زیر به هم ارتباط دارند:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

اکنون این صفحه را به صورت یک گره بزرگ درنظربگیرید و قانون جریان کیرشهف را اعمال کنید. ظاهراً این قانون معتبر نیست، جریان از یک سمت و از مدار خارجی وارد صفحه می‌شود، ولی از صفحه بیرون نمی‌رود. این مطلب بیش از یک قرن قبل، ذهن دانشمند اسکاتلندی، جی.سی.ماکسول[1] را مشغول کرده بود. تئوری الکترومغناطیسی تک‌میدانی را که نهایتاً وی ارائه کرد، فرضیه "جریان جابه‌جایی" را مطرح می‌کند و در هر جا که میدان الکتریکی یا ولتاژ با زمان تغییر نماید، وجود دارد. جریان جابه‌جایی بین صفحه خازن و درون آن، درست شبیه جریان در یک هادی می‌باشد. بنابراین اگر هر دو جریان جابه‌جایی و هدایتی را درنظربگیریم قانون جریان کیرشهف صادق است. البته تحلیل مدار این جریان جابه‌جایی داخلی را درنظرنمی‌گیرد و چون خوشبختانه با جریان هدایت مدار برابر است، می‌توان فرضیه ماکسول را به‌عنوان تغییر ولتاژ دو سر خازن لحاظ نمود.

خازنی با دو صفحه موازی A، و فاصله صفحات d دارای ظرفیت $C = \varepsilon A/d$ می‌باشد که در آن ε ضریب گذردهی خازن یا ضریب عایق‌سازی ماده بین صفحات می‌باشد. در ساختار خازن فرض می‌شود که ابعاد صفحات خازن خیلی بزرگ‌تر از d است. برای هوا یا خلاء $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854$ pF/m است. بسیاری از خازن‌ها از لایه دی‌الکتریک یا عایق نازکی با ضریب گذردهی بزرگ‌تر استفاده می‌نمایند تا ابعاد آن کوچک شود. نمونه‌هایی از انواع خازن‌های تجارتی در شکل ۷ـ۲ دیده می‌شود. باید به‌خاطر داشته باشیم که هر دو صفحه هادی که به هم مستقیماً نچسبیده باشند، ظرفیت غیرصفری (هرچند خیلی کوچک) دارند. ضمناً باید توجه داشت که ظرفیت چندصد **میکروفاراد** از لحاظ مقدار، بزرگ تلقی می‌شود.

با معرفی معادله (۱) چندین مشخصه مهم از مدل ریاضی استنتاج می‌گردد. یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن جریان صفری را در آن نشان می‌دهد. بنابراین یک خازن برای dc به‌صورت "مدار باز" است. علامت خازن هم این خاصیت را نشان می‌دهد. همچنین هر تغییر ناگهانی در ولتاژ دو سر آن به یک منبع جریان بی‌نهایت نیاز دارد. چون چنین منبعی جنبه فیزیکی ندارد، بنابراین معتقدیم که ولتاژ دو سر خازن آناً عوض نمی‌شود.

شکل ۷ـ۲ چند مثال از خازن‌های تجاری موجود. (الف) از چپ به راست: سرامیک 270 pF، تانتالیوم 20 μF، پلی‌استر 15 nF و پلی‌استر 150 nF. (ب) از چپ: الکترولیت 2000 μF 40 VDC و الکترولیت 25,000 μF 35 VDC. (ج) شروع از کوچکتر در جهت عقربه ساعت: الکترولیت 100 μF 63 VDC، الکترولیت 2200 μF 50 VDC، الکترولیت 55 μF 2.5 VDC و 4800 μF 50 VDC. دقت کنید که با یک استثنا، مقادیر بزرگ بسته‌بندی بزرگتری دارند. در آن حالت مصالحه چیست؟

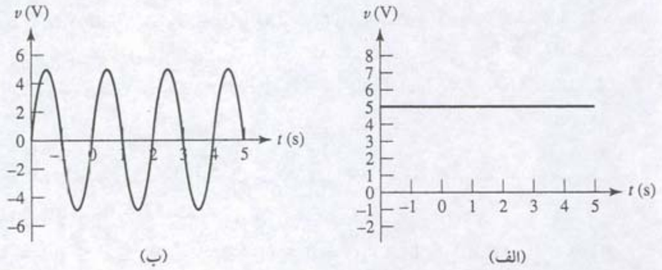
مثال ۷ـ۱

اگر $C = 2F$ باشد، جریان جاری در خازن شکل ۷ـ۱ را برای دو موج شکل ۷ـ۳ معین کنید.

جریان خازن به ولتاژ دو سر آن v با معادله (۱) مرتبط می‌شود:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

1. J.C. Maxwell



شکل ۷ـ۳ (الف) یک ولتاژ dc به پایانه‌های خازن اعمال شده است. (ب) به پایانه‌های خازن یک ولتاژ سینوسی اعمال شده است.

برای شکل موج ترسیم‌شده در شکل ۷ـ۳ (الف)، $\frac{dv}{dt} = 0$ است، پس $i = 0$ می‌باشد؛ نتیجه در شکل ۷ـ۴ (الف) رسم شده است. برای حالت موج سینوسی شکل ۷ـ۳ (ب) انتظار داریم که جریان کسینوسی به عنوان پاسخ جاری شده و فرکانس برابری با دو برابر اندازه داشته باشد (چون $C = 2F$ است). نتیجه در شکل ۷ـ۴ (ب) ملاحظه می‌شود.

تمرین

۷ـ۱ جریان جاری در خازن **5 mF** را در پاسخ به ولتاژ v تعیین کنید. (الف) **-20 V** و (ب) $-2e^{-5t}$ V.

جواب: (الف) 0 A؛ (ب) $-50e^{-5t}$ mA.

روابط ولتاژ ـ جریان انتگرالی

ولتاژ خازن را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۱) بیان کرد، ابتدا رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$dv = \frac{1}{C}\, i(t)\, dt$$

و سپس در فاصله زمانی t_0 و t از رابطه ولتاژهای مربوط به آن‌ها انتگرال می‌گیریم:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0) \qquad (۲)$$

معادله (۲) را می‌توان به‌صورت انتگرالی نامعین به‌علاوه یک ثابت انتگرال نوشت:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt + k$$

بالاخره در بسیاری از مسائل واقعی نمی‌توان $v(t_0)$، که همان ولتاژ اولیه دو سر خازن است را نادیده گرفت. در این‌گونه موارد از لحاظ ریاضی $t_0 = -\infty$ و $v(-\infty) = 0$ فرض می‌شود و در این صورت:

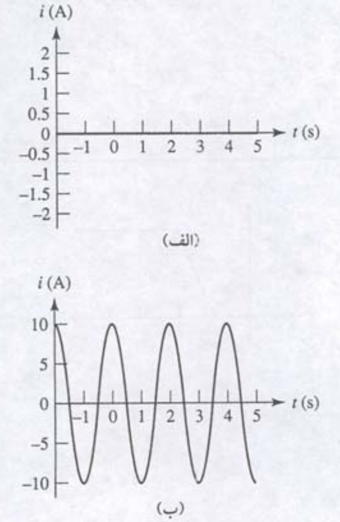
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt'$$

توجه کنید در مواردی که متغیر t یکی از حدود انتگرال است، از متغیر فرضی 't استفاده می‌کنیم که از لحاظ مباحث ریاضی ایرادی ندارد.

چون انتگرال جریان در هر فاصله زمانی با بار ذخیره شده در آن فاصله بر روی صفحات خازن برابر است می‌توان ظرفیت را چنین تعریف نمود:

$$q(t) = Cv(t)$$

که $q(t)$ و $v(t)$ به ترتیب مقادیر لحظه‌ای بار روی صفحات و ولتاژ بین صفحات می‌باشند.



شکل ۷ـ۴ (الف) مادامی که ولتاژ اعمال‌شده dc باشد، $i = 0$ است. (ب) جریان فرم کسینوسی در پاسخ به ولتاژ سینوسی دارد.

مثال ۷ـ۲

ولتاژ خازن مربوط به جریان ترسیمی در شکل ۷ـ۵ (الف) را بیابید.

با تفسیر گرافیکی معادله (۲) می‌بینیم که اختلاف بین مقادیر ولتاژ در t و t_0 متناسب با سطح زیر منحنی جریان بین این دو زمان است. ضریب تناسب 1/C است. می‌توان سطح را از

شکل ۵_۷ (الف) و با بررسی مقادیر مطلوب t_0 و t به‌دست‌آورد. اجازه بدهید نقطه شروع t_0 را قبل از زمان صفر اختیار کنیم. برای راحتی کار اولین فاصله زمانی بین $-\infty$ و 0 اختیار شده است و چون شکل موج بیان می‌دارد که هرگز جریانی از ابتدا به خازن اعمال نشده، پس:

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

با توجه به معادله (۲)، انتگرال جریان بین $t_0 = -\infty$ و 0، برابر صفر می‌باشد. زیرا در این فاصله $i = 0$ است، پس:

$$v(t) = 0 \quad t \le 0 \quad \text{یا} \quad v(t) = 0 + v(-\infty) \quad -\infty \le t \le 0$$

اگر حالا فاصله زمانی را محدوده موج مربعی $0 \le t \le 2\text{ms}$ فرض کنیم، داریم:

$$v(t) = \frac{1}{5\times10^{-6}} \int_0^t 20\times10^{-3}\,dt' + v(0)$$

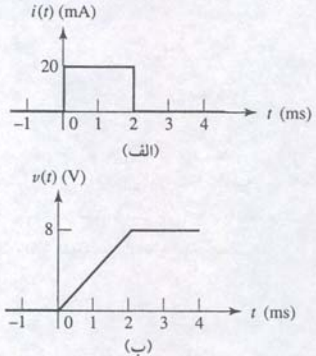
چون $v(0) = 0$ بنابراین:

$$v(t) = 4000t \quad 0 < t \le 2\text{ms}$$

برای فاصله نیم بی‌نهایت بعد از پالس، انتگرال $i(t)$ مجدداً صفر است، به نحوی که:

$$v(t) = 8 \quad t \ge 2\text{ms}$$

نتایج ترسیمی ساده‌تر از عبارات ریاضی به‌نظر می‌رسند (شکل ۵_۷(ب)).

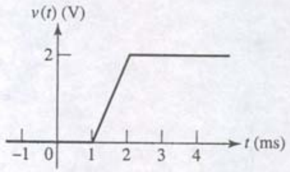


شکل ۵_۷ (الف) شکل موج جریان اعمال‌شده به خازن $5\mu F$. (ب) موج ولتاژ حاصل با انتگرال‌گیری ترسیمی (جمع).

تمرین

۲_۷ جریان داخل خازن 100pF را اگر ولتاژ آن به صورت تابع زمانی شکل ۶_۷ باشد معین کنید.

جواب: در $-\infty \le t \le 1$ ms، 0A؛ در $1\text{ ms} \le t \le 2\text{ ms}$، 200nA و در $t \ge 2$ ms، 0A.



شکل ۶_۷

ذخیره‌سازی انرژی

توان انتقالی به یک خازن با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$$

انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی‌اش برابر است با:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}\,dt = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = \frac{1}{2}C\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\}$$

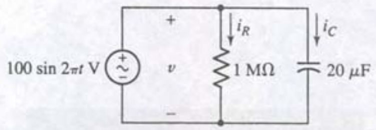
و بنابراین:

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \frac{1}{2}C\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\} \qquad (۳)$$

که انرژی ذخیره‌شده $w_C(t_0)$ برحسب ژول (J) و ولتاژ در t_0 برابر $v(t_0)$ می‌باشد. اگر انرژی در t_0 را صفر فرض کنیم با بیان این‌که ولتاژ خازن هم در آن لحظه صفر است، آنگاه:

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 \qquad (۴)$$

بیایید یک مثال عددی ساده را ملاحظه نماییم. همان‌طور که در شکل ۷_۷ ملاحظه می‌کنید، یک منبع ولتاژ سینوسی با یک مقاومت $1M\Omega$ و یک خازن $20\mu F$ موازی است. می‌توان مقاومت موازی را نمایشی از مقاومت معین دی‌الکتریک بین صفحات خازن فیزیکی دانست (مقاومت ایده‌آل دارای مقاومت بی‌نهایت است).



شکل ۷_۷ یک منبع ولتاژ سینوسی به یک شبکه RC موازی وصل شده است. مقاومت $1M\Omega$ می‌تواند نشان‌دهندهٔ مقاومت لایهٔ دی‌الکتریک خازن واقعی باشد.

مثال ۳_۷

حداکثر انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷_۷ و انرژی تلف‌شده در مقاومت را در فاصله زمانی $0 < t < 0.5$s بیابید.

- هدف مسئله را شناسایی نمایید.

انرژی ذخیره‌شده در خازن با زمان تغییر می‌نماید. از ما حداکثر مقدار در یک فاصله زمانی خاص خواسته شده است. همچنین کل انرژی تلف‌شده در مقاومت در همین فاصله مورد تقاضا است. در واقع این دو سوال کاملاً از هم جدا هستند.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری کنید.

تنها منبع انرژی در مدار، منبع ولتاژ مستقل است، که مقدار $100\sin 2\pi t$ V را دارد. البته فقط زمان $0 < t < 0.5$s مورد توجه ما است. مدار به‌طور صحیحی نام‌گذاری شده است.

- ارائه طرح.

ما انرژی خازن را با ارزیابی ولتاژ معین خواهیم کرد. برای یافتن انرژی تلف‌شده در مقاومت، در یک فاصله زمانی، باید از $p_R = i_R^2 \cdot R$ انتگرال بگیریم.

- معادلات مناسب را بنویسید.

انرژی ذخیره‌شده برابر است با:

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = 0.1\sin^2 2\pi t \quad \text{J}$$

حالا عبارتی را برای توان تلف‌شده در مقاومت برحسب جریان i_R به‌دست‌می‌آوریم:

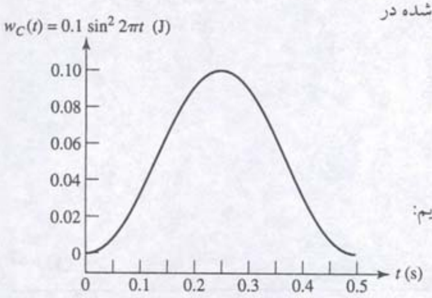
$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4}\sin 2\pi t \quad \text{A}$$

بنابراین انرژی تلف‌شده در مقاومت بین 0 و 0.5 ثانیه برابر است با:

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R\,dt = \int_0^{0.5} 10^{-2}\sin^2 2\pi t\,dt \quad \text{J}$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است.

برای ذخیره انرژی در خازن عبارتی وجود دارد. نمودار آن در شکل ۸_۷ ترسیم شده است. انرژی تلف‌شده در مقاومت شامل کمیت‌های نامشخص نیست و بنابراین باید به راحتی محاسبه شود.



شکل ۸_۷ نمودار انرژی ذخیره‌شده در خازن برحسب زمان.

- اقدام به حل.

از نمودار مربوط به انرژی ذخیره‌شده در خازن، می‌بینیم که از مقدار 0 در $t = 0$ به یک مقدار 100mJ در $t = \frac{1}{4}$ s می‌رسد، و سپس در مدت $\frac{1}{4}$ s دیگر به صفر باز می‌گردد. بنابراین $w_{C_{max}} = 100\text{mJ}$ خواهد بود. با ارزیابی عبارت انتگرال برای انرژی تلف‌شده در مقاومت، داریم $w_R = 2.5\text{mJ}$.

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟

ما انتظار نداریم که یک انرژی ذخیره‌شده منفی را که در نمودار حذف شده است، محاسبه کنیم. علاوه‌برآن، چون حداکثر مقدار $\sin 2\pi t$ برابر 1 است، حداکثر انرژی مورد انتظار $(1/2)(20\times10^{-6})(100)^2 = 100$ mJ خواهد بود.

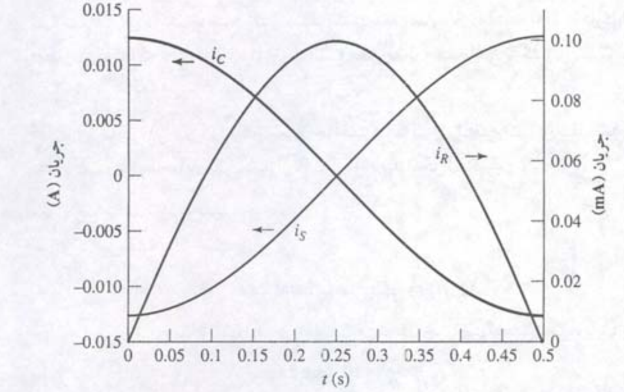
مقاومت در یک پریود 0 تا 500 ms، انرژی 2.5 mJ را تلف کرده است، ولی خازن حداکثر 100 mJ را در همان فاصله زمانی ذخیره کرده است. پس بر سر 97.5 mJ دیگر چه آمده است؟ برای پاسخ به آن جریان خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$i_C = 20\times10^{-6}\frac{dv}{dt} = 0.004\pi\cos 2\pi t$$

و جریان i_s که از منبع ولتاژ می‌گذرد برابر است با:

$$i_s = -i_C - i_R$$

که هر دوی آن‌ها در شکل ۷ـ۹ ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌کنید که جریان جاری‌شده در مقاومت بخش کوچکی از جریان منبع است؛ البته جای تعجب نیست زیرا $1\ \text{M}\Omega$ نسبتاً مقاومت بزرگی است. با عبور جریان از منبع، مقدار کمی به سمت مقاومت هدایت می‌شود، و بقیه آن به خازن رفته و آن را شارژ می‌کند. پس از زمان $t = 250$ ms، به نظر می‌رسد جریان منبع تغییر علامت می‌دهد؛ اینک جریان از خازن به منبع باز می‌گردد. بخش عمده‌ای از انرژی ذخیره‌شده در خازن به منبع ولتاژ ایده‌آل باز می‌گردد، و فقط مقدار کمی از آن در مقاومت تلف شده است.



شکل ۷ـ۹ نمودار جریان‌های مقاومت، خازن و منبع در فاصله زمانی 0 تا 500 ms.

تمرین

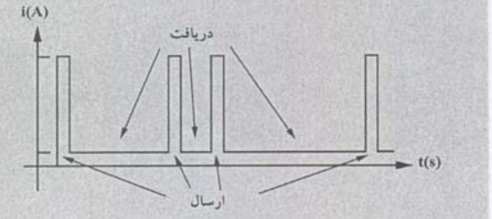
۷ـ۳ انرژی ذخیره‌شده در خازن $1000\mu F$ در $t = 50\mu s$ را محاسبه کنید. به شرطی که ولتاژ دو سر آن $1.5\cos 10^5 t$ ولت باشد.

جواب: $90.52\mu J$

کاربرد عملی

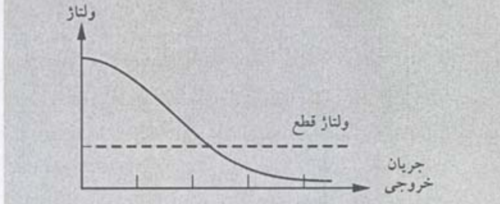
باطری هیبرید ـ وسایل فوق خازن

تلفن‌های دیجیتال موبایل و ماهواره‌ای سه مد کاری اساسی دارند: غیرفعال، دریافت و ارسال. معمولاً دریافت سیگنال نیاز به مصرف جریان زیاد از باطری ندارد، ولی ارسال آن جریان زیادی را لازم دارد (شکل ۱۰ـ۷). در مقابل زمان تلف‌شده در ارسال معمولاً کسر کوچکی از کل زمان جذب انرژی به وسیله سیستم است (شکل ۱۰ـ۷).



شکل ۷ـ۱۰ نمودار نمونه دوره کاری تلفن موبایل که جریان لازم برای ارسال و دریافت را نشان می‌دهد.

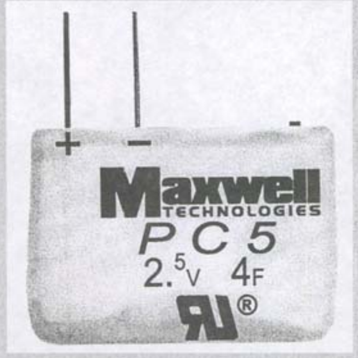
همان‌طور که در فصل ۵ دیدیم، باطری‌ها فقط در جریان‌های کم ولتاژ ثابتی را تحویل می‌دهند. بنابراین وقتی که تقاضای جریان افزایش یابد، ولتاژ باطری افت پیدا می‌کند (شکل ۱۱ـ۷). این کاهش منجر به ایجاد مشکلاتی می‌گردد، زیرا اکثر مدارها دارای حداقل ولتاژ یا **ولتاژ قطعی** هستند که در کمتر از آن به‌درستی کار نمی‌کنند.



شکل ۷ـ۱۱ مثالی از رابطه ولتاژ ـ جریان یک باطری.

اگر جریان اوج دریافتی طوری باشد که ولتاژ باطری به کمتر از ولتاژ قطع افت کند، در این صورت به باطری بزرگ‌تری نیاز است. با این وجود، این امر در وسایل متحرک مطلوب نیست بلکه باطری‌های سبک و کوچک ترجیح داده می‌شوند. راه حل دیگر استفاده از قطعه‌ای هیبرید متشکل از یک باطری استاندارد و یک خازن خاص می‌باشد (گاهی آن را خازن الکتروشیمیایی یا فوق خازن می‌گویند). مثالی از این قطعه تجاری در شکل ۱۲ـ۷ دیده می‌شود.

اساس کار وسیله هیبرید، این است‌که وقتی باطری جریان لازم برای مدار را تأمین می‌کند (مثل وقتی‌که تلفن در مد دریافت است)، خازن انرژی را از باطری کسب می‌نماید ($\frac{1}{2}CV^2$). اگر تقاضای جریان ناگهان بالا برود (مثل ارسال به وسیله تلفن)، ولتاژ باطری کاهش خواهد یافت. در این لحظه جریانی در پاسخ به $\frac{dv}{dt}$ حاصل از خازن شارژشده خارج می‌گردد. با این شرط که مقاومت معادل تونن خیلی کوچک‌تر از مقاومت داخلی باطری باشد، جریان به‌جای حرکت به سمت باطری به سمت تلفن خواهد رفت. بار، خازن را به سرعت ترک می‌کند و به این ترتیب این جریان برای مدت کوتاهی تقویت می‌شود. با این وجود اگر عمل ارسال کوتاه‌مدت باشد، خازن به خوبی می‌تواند باطری را کمک کرده و از خاموشی مدار جلوگیری کند. در فصل ۸ خواهید دید که چطور می‌توان با دانستن مقاومت تونن باطری و مدار، مدت زمان کمک خازن به باطری را حساب کرد.



شکل ۷ـ۱۲ ترکیبی از باطری ـ فوق خازن.

مشخصات مهم یک خازن ایده‌آل:

۱. اگر ولتاژ دو سر خازن با زمان تغییر نکند جریان عبوری از آن صفر است. بنابراین خازن برای dc به‌صورت مدار باز عمل می‌کند.

۲. می‌توان مقدار انرژی محدودی در خازن ذخیره کرد، حتی اگر جریان عبوری از آن صفر باشد، مانند هنگامی که ولتاژ دو سرش ثابت می‌باشد.

۳. ولتاژ خازن هرگز به‌طور ناگهانی تغییر نمی‌کند، مگر این‌که جریان عبوری از خازن بی‌نهایت باشد. یک خازن به هر تغییر ناگهانی ولتاژ دو سرش همچون مقاومت فنر در برابر نیرو، از خود واکنش نشان می‌دهد.

۴. خازن هرگز انرژی تلف نمی‌کند و فقط آن را ذخیره می‌نماید. البته این جمله برای مدل ریاضی آن صحت دارد ولی برای خازن فیزیکی به دلیل وجود مقاومت صحیح نیست.

۷ـ۲ القاگر

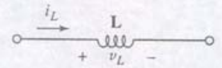
مدل القاگر ایده‌آل

هرچند که از نقطه‌نظر یک مدار، القاگر را با معادله ولتاژ ـ جریان تعریف می‌کنیم، چند اظهارنظر در مورد تئوری میدان مغناطیسی به درک بهتر تعریف کمک خواهد کرد. در اوایل سال‌های ۱۸۰۰ اورستد[1] دانشمند دانمارکی نشان داد که یک هادی حامل جریان، می‌تواند یک میدان مغناطیسی تولید کند (هنگامی که جریان برقرار باشد سوزن قطب‌نما در جوار آن

1. Oersted

منحرف می‌گردد) چندی بعد دانشمند فرانسوی آمپر[1] اندازه‌گیری‌هایی را انجام داد و نشان داد که این میدان مغناطیسی به‌طور خطی با جریانی که آن را تولید کرده است متناسب می‌باشد. قدم بعدی ۲۰ سال بعد و به هنگامی رخ داد که دانشمند انگلیسی مایکل فارادی[2] و مخترع آمریکایی ژوزف هنری[3]، هر دو تقریباً به‌طور همزمان اعلام نمودند که تغییر میدان مغناطیسی می‌تواند یک ولتاژ را در مدار مجاور القاء نماید، ضریب تناسب را ضریب القاء یا القاکنایی می‌نامیم و با L نشان داده می‌شود. پس:

$$\boxed{v = L\frac{di}{dt}} \qquad (۵)$$



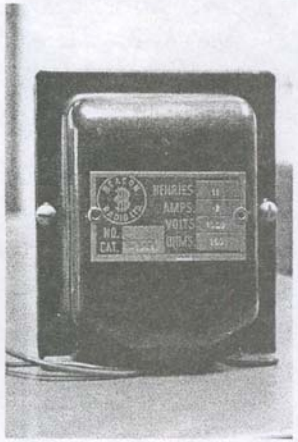
شکل ۱۳ـ۷ نماد الکتریکی و قرارداد ولتاژ و جریان برای القاگر.

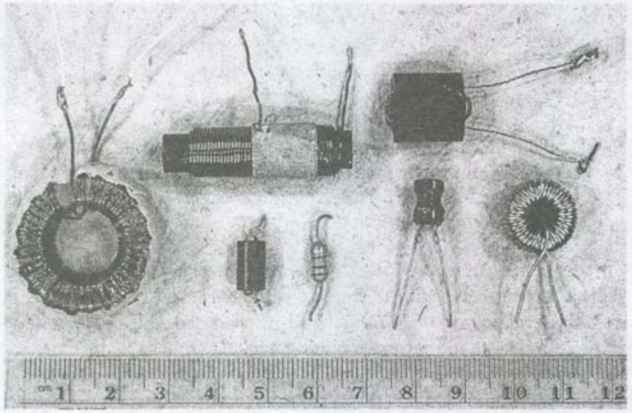
باید توجه داشت که v و i توابعی از زمان هستند. وقتی‌که بخواهیم بر این خصوصیت تأکید کنیم آن‌ها را با $v(t)$ و $i(t)$ نشان می‌دهیم.

سمبل یا نماد مدار برای القاگر در شکل ۱۳ـ۷ ملاحظه می‌گردد. لازم به ذکر است که قرارداد عناصر غیرفعال درست مثال مقاومت و خازن، رعایت شده است. واحد اندازه‌گیری القاگر یا القاکنایی هنری (H) است و معادله مربوط به آن نشان می‌دهد که هنری بیان کوتاه ولت‌ثانیه بر آمپر است.

القاگری که القاکنایی آن با معادله (۵) تعریف شود، مدلی ریاضی است و عنصری ایده‌آل می‌باشد که ما از آن برای تقریب القاگر واقعی استفاده خواهیم کرد. برای ساخت یک القاگر فیزیکی ممکن‌است یک سیم را به صورت سیم‌پیچ (سیم‌لوله) درآوریم. پیچیدن سیم باعث می‌شود تا اثر جریان مولد میدان مغناطیسی و تعداد مدارهای مجاور میدان که ولتاژ فارادی در آن‌ها القا می‌شود، افزایش یابد. نتیجه این اثر دوگانه این‌است‌که القاکنایی یک سیم‌پیچ تقریباً متناسب با مربع تعداد دورهای کامل آن است. مثلاً یک القاگر یا پیچک که از مارپیچ بلندی با دورهای نزدیک بهم تشکیل شده است، القاکنایی $\mu N^2 A/s$ را دارد که در آن A سطح مقطع، s طول محوری سیم‌پیچ، N تعداد دور و μ ثابت ماده داخل سیم‌پیچ موسوم تراوایی[4] است. برای فضای آزاد (و تقریباً هوا) $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $= 4\pi n$ H/cm است. چند نمونه از القاگرهای تجاری در شکل ۱۴ـ۷ نشان داده شده است.

شکل ۱۴ـ۷ (الف) چندین نمونه القاگر تجاری که گاهی "چوک" نامیده می‌شوند. در جهت عقربه ساعت و شروع از چپ: القاگر هسته فرّیت تیوبی‌شکل 287 μH، القاگر سیلندری هسته فرّیت 266 μH، القاگر سیلندری هسته فرّیت 215 μH طراحی‌شده برای فرکانس‌های VHF. القاگر تیوپی هسته پودر آهن 85 μH، القاگر شکل بوبین 10 μH. القاگر سیم محوری 100 μH و القاگر هسته پنهان 7 μH که برای RF به کار می‌رود. (ب) یک القاگر 11 H، با ابعاد 10 cm (ارتفاع) × 8 cm (پهنا) × 8 cm (ضخامت).

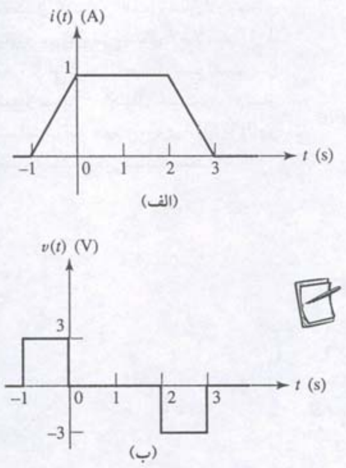

(ب)


(الف)

1. Ampere 2. M. Faraday 3. J. Henry 4. permeability

اکنون بیایید معادله (۵) را وارسی نماییم تا بعضی از مشخصات الکتریکی این مدل ریاضی را تعیین کنیم. این معادله نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر یک القاگر متناسب است با آهنگ زمانی تغییرات جریانی که از آن می‌گذرد. به خصوص این معادله نشان می‌دهد که در دو سر القاگری که جریان ثابتی را حمل می‌کند، جدا از اندازه جریان، ولتاژی وجود ندارد. بر طبق این مطلب، می‌توان به یک القاگر به دیدهٔ یک "مدار اتصال کوتاه برای dc" نگاه کرد.

واقعیت دیگری که از معادله (۵) حاصل می‌شود این‌است‌که یک تغییر ناگهانی یا ناپیوسته در جریان به ولتاژ بی‌نهایتی در دو سر القاگر نیاز دارد. به بیان دیگر اگر بخواهیم یک تغییر ناگهانی در یک جریان القاگر ایجاد نماییم باید ولتاژ بی‌نهایتی به آن اعمال کنیم. هرچند که به لحاظ تئوری اعمال تابع ولتاژ بی‌نهایت مانعی ندارد ولی در یک سیستم واقعی فیزیکی چنین چیزی دارای مفهوم نیست. به زودی خواهیم دید که یک تغییر ناگهانی در جریان القاگر، به تغییر ناگهانی انرژی در القاگر احتیاج داشته، و این خود نیز توان بی‌نهایت منبع در آن لحظه را لازم دارد و دوباره توان بی‌نهایت در جریان واقعی وجود ندارد. برای دوری از ولتاژ و توان بی‌نهایت، نباید اجازه دهیم تا جریان القاگر از یک مقدار به مقدار دیگری **ناگهان** پرش کند.



شکل ۱۵ـ۷ (الف) شکل موج جریان در یک القاگر 3H. (ب) شکل موج ولتاژ مربوط به $v = 3di/dt$.

اگر بخواهیم مدار یک القاگر فیزیکی را که جریان از آن عبور می‌کند باز کنیم، در دو سر کلید جرقه‌ای ظاهر خواهد شد. این پدیده در سیستم برق بعضی از اتومبیل‌ها به کارمی‌رود که در آن‌ها جریان کویل به‌وسیله دلکو متوقف شده و جرقه‌ای در دو سر شمع ایجاد می‌گردد. گرچه این وضع آناً رخ نمی‌دهد ولی زمان آن بسیار کوتاه است و درنتیجه ولتاژ زیادی تولید می‌گردد. وجود ولتاژ بالا در دو سر فاصله‌ای کوچک میدان الکتریکی قوی را به‌وجودمی‌آورد، و انرژی ذخیره‌شده ضمن یونیزه کردن هوا، جرقه‌ای را تولید می‌نماید.

می‌توان معادله (۵) را به صورت گرافیکی تفسیر کرد و در صورت لزوم حل نمود. مثال ۴ـ۷ را در این مورد ملاحظه کنید.

مثال ۴ـ۷

اگر مطابق شکل ۱۵ـ۷ (الف) موج جریان در یک القاگر 3H باشد، ولتاژ القاگر را به‌دست‌آورده آن را رسم کنید.

اگر ولتاژ v جریان i طوری تعریف شود که قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد، آن‌گاه می‌توانیم از معادله (۵) برای یافتن شکل موج ولتاژ استفاده کنیم:

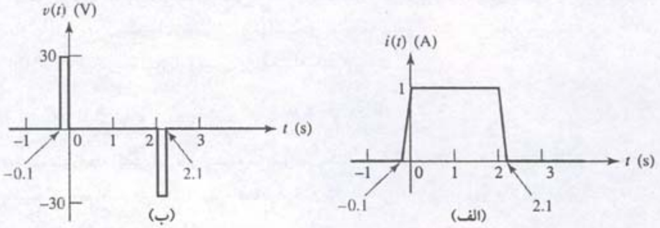
$$v = 3\frac{di}{dt}$$

چون جریان در $t < -1$s صفر است، ولتاژ نیز در این فاصله صفر می‌باشد. سپس جریان با آهنگ خطی 1A/s شروع به افزایش می‌نماید و به این ترتیب ولتاژ ثابت $L\frac{di}{dt} = 3$V تولید می‌گردد. در طی 2 ثانیه بعدی، جریان ثابت و لذا ولتاژ صفر می‌گردد. کاهش نهایی جریان منجر به $\frac{di}{dt} = -1$ A/s و بنابراین $v = -3$V می‌شود. برای $t > 3$s، $i(t)$ ثابت (صفر) است و بنابراین برای آن فاصله زمانی $v(t) = 0$ خواهد شد. شکل موج کامل در شکل ۱۵ـ۷ (ب) ترسیم شده است.

اکنون بیایید اثر افزایش و یا افول سریع‌تر جریان بین صفر و 1A را بررسی کنیم.

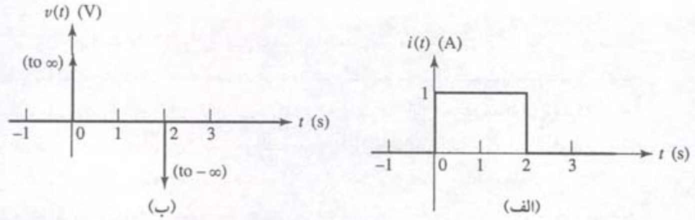
مثال ۵ـ۷

ولتاژ القاگر حاصل از اعمال موج جریان شکل ۱۶ـ۷ (الف) در القاگر مثال ۴ـ۷ را بیابید.



شکل ۱۶ـ۷ (الف) زمان لازم برای تغییر جریان شکل ۱۵ـ۷ (الف)، از 0 به 1 و از 1 به 0، یک دهم شده است. (ب) ولتاژ حاصل. توجه کنید که برای وضوح بیشتر عرض پالس بزرگ‌تر از آن‌چه هست درنظرگرفته شده است.

شکل ۱۷ـ۷ (الف) زمان لازم برای تغییر جریان موج شکل ۱۶ـ۷ (الف) از 0 به 1 و از 1 به 0، صفر شده است؛ پس تغییر جریان ناگهانی است. (ب) ولتاژ متناظر با این جریان، روی القاگر 3H دو ضربهٔ با اندازهٔ بی‌نهایت است.

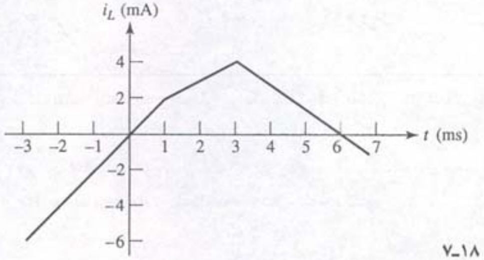


توجه کنید که زمان صعود و نزول به 0.1s کاهش یافته است. بنابراین اندازهٔ هر مشتق، 10 بار بزرگ‌تر خواهد شد. این وضعیت جریان و ولتاژ در شکل ۱۶ـ۷ (الف) و (ب) نشان داده شده است. در امواج شکل ۱۵ـ۷ (ب) و ۱۶ـ۷ (ب) جالب این است که سطح زیر هر پالس ولتاژ 3Vs است. اجازه بدهید تا به بررسی موضوع ادامه دهیم. کاهش بیشتر زمان صعود و نزول موج جریان مقدار ولتاژ متناسب بیشتری را تولید می‌کند ولی این تغییر فقط در فاصله‌ای از زمان است که جریان افزایش یا کاهش یابد. تغییر ناگهانی در جریان موجب تولید جرقه یا ولتاژی بی‌نهایت می‌گردد (هر کدام سطح 3Vs را دارند) که در شکل‌های ۱۷ـ۷ (الف) و (ب) نشان داده شده است. این جرقه‌ها از لحاظ مقدار برابر ولی در جهات مختلف تولید می‌شوند و برای تغییر ناگهانی جریان لازمند.

تمرین

۴ـ۷ جریان درون القاگر 0.2H در شکل ۱۸ـ۷ دیده می‌شود. فرض کنید قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد آن‌گاه v_L را در T برابر با: (الف) 0، (ب) 2ms و (ج) 6ms بیابید.

جواب: 0.4V، 0.2V و -0.267V.



شکل ۱۸ـ۷

رابطه انتگرالی ولتاژ ـ جریان

القاکنایی را با معادله مشتقی ساده‌ای تعریف کردیم:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

و توانستیم چندین نتیجه را در مورد مشخصه‌های یک القاگر از این رابطه به‌دست‌آوریم. مثلاً دریافتیم که می‌توان یک القاگر را در جریان ثابت به‌صورت یک اتصال کوتاه تصور کرد و توافق کردیم که جریان القاگر نمی‌تواند از یک مقدار به مقدار دیگر ناگهان تغییر یابد، زیرا لازمه آن وجود منبع ولتاژ و توان بی‌نهایت در کنار القاگر می‌باشد. این معادله ساده هنوز حاوی اطلاعات زیادی است. با نوشتن این معادله به فرم زیر:

$$di = \frac{1}{L} v\, dt$$

به سمت رابطه انتگرالی سوق داده می‌شویم. بگذارید اول محدوده‌های انتگرال را مشخص کنیم. می‌خواهیم جریان i در زمان t برقرار و دو مقدار، محدوده‌های بالای انتگرال را در دو

طرف انتگرال تشکیل دهند. محدوده‌های پایین هم می‌توانند با فرض جریان $i(t_0)$ در زمان t_0 به‌طور کلی تعریف شوند، بنابراین:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'$$

که به معادله زیر منجر می‌گردد:

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt'$$

یا

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt' + i(t_0) \qquad (۶)$$

معادله (۵) ولتاژ القاگر را برحسب جریان بیان می‌کند، درصورتی‌که معادله (۶) جریان برحسب ولتاژ است. برای معادله آخر فرم‌های دیگری هم پیشنهاد شده است. ما آن را به صورت انتگرال نامعین همراه با ثابت انتگرال خواهیم نوشت:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v\, dt + k \qquad (۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که ما مسئله ایده‌آلی را حل می‌کنیم و در آن در $t_0 = -\infty$ جریانی و یا انرژی در القاگر وجود ندارد. بنابراین $i(t_0) = i(-\infty) = 0$ بوده و آن‌گاه

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\, dt' \qquad (۸)$$

خواهد بود. بیایید کاربرد چنین انتگرالی را با مثال ساده‌ای که در آن ولتاژ دو سر القاگر معین است، بررسی کنیم.

مثال ۶ـ۷

ولتاژ دو سر یک القاگر 2H برابر 6 cos5t است. اگر $i(t = -\frac{\pi}{2}) = 1A$ باشد، جریان القاگر را به‌دست آورید.

از معادلهٔ (۶):

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t'\, dt' + i(t_0)$$

یا

$$i(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t_0 + i(t_0)$$
$$= 0.6\sin 5t - 0.6\sin 5t_0 + i(t_0)$$

اولین جمله نشان می‌دهد که جریان القاگر به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند. جملات دوم و سوم مقادیر ثابتی هستند که صرفاً وقتی مقدار جریان در زمان مشخصی به صورت عددی معین شود مفهوم پیدا می‌کنند. با فرض این‌که جریان در $t = -\frac{\pi}{2}$ برابر 1A باشد، ما $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ و $i(t_0) = 1$ را درنظر می‌گیریم و در این‌صورت:

$$i(t) = 0.6\sin 5t - 0.6\sin(-2.5\pi) + 1$$

یا

$$i(t) = 0.6\sin 5t + 1.6$$

این نتیجه را می‌توان از معادله (۷) هم به‌دست‌آورد. داریم:

$$i(t) = 0.6\sin 5t + k$$

و با جریان 1A در $t = -\frac{\pi}{2}$ مقدار عددی k را مطابق زیر به‌دست‌می‌آوریم:

$$1 = 0.6\,\sin(-2.5\pi) + k$$

یا

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

و مطابق قبل

$$i(t) = 0.6\,\sin 5t + 1.6$$

با این ولتاژ خاص در این مثال، معادله (۸) می‌رود که مشکل‌دار شود. ما معادله را بر این فرض استوار کردیم که در $t = -\infty$ جریان آن صفر است. برای اطمینان، این شرط باید در دنیای فیزیکی واقعیت داشته باشد و نه در مدل ریاضی. در مدل ریاضی همه عناصر و توابع تحریک ایده‌آل درنظرگرفته شدند. مشکل پس از انتگرال‌گیری ظهور می‌کند یعنی داریم:

$$i(t) = 0.6\,\sin 5t'\Big|_{-\infty}^{t}$$

انتگرال را در حد پایین ارزیابی می‌نماییم:

$$i(t) = 0.6\,\sin 5t - 0.6\,\sin(-\infty)$$

سینوس $-\infty$ نامعین است و بنابراین ما نمی‌توانیم عبارت خود را ارزیابی کنیم. معادلهٔ (۷) فقط هنگامی مفید است که ما توابعی را که در $t \to -\infty$ به سمت صفر می‌روند، ارزیابی کنیم.

تمرین

۷ـ۵ یک القاگر 100 mH دارای ولتاژ $v_L = 2e^{-3t}\text{V}$ در دو سر پایانه‌اش است. جریان القاگر حاصل را اگر $i_L(-0.5) = 1\text{ A}$ باشد، معین کنید.

جواب: $-\frac{20}{3}e^{-3t} + 30.9\text{ A}$

با این وجود نباید زود قضاوت کنیم، زیرا هر کدام از معادلات (۶)، (۷) و (۸) که از این پس از آن‌ها استفاده می‌کنیم بسته به مسئله و کاربرد مزایای خاص خود را دارد. معادله (۶) روشی طولانی و عمومی را نمایانگر است و نشان می‌دهد که ثابت انتگرال، از جنس جریان است. معادله (۸) کمی از معادله (۷) خلاصه‌تر است و در آن نقش ثابت انتگرال حذف شده است. بالاخره معادله (۸) عبارتی فوق‌العاده است، زیرا ثابتی لازم ندارد، با این وجود، فقط برای جریان صفر در $t = -\infty$ و هنگامی که عبارت تحلیلی جریان در $-\infty$ معین است کاربرد دارد.

ذخیره انرژی

اکنون بیایید توجه خود را به توان و انرژی معطوف کنیم. توان جذب‌شده حاصل‌ضرب جریان و ولتاژ است:

$$p = vi = Li\frac{di}{dt}$$

انرژی w_L جذب‌شده به وسیله القاگر در میدان مغناطیسی حول سیم‌پیچ ذخیره می‌گردد و به صورت انتگرال توان در یک فاصله مطلوب زمانی بیان می‌شود:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt' = L\int_{t_0}^{t}\frac{di}{dt'}\,dt' = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di = \frac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\}$$

بنابراین

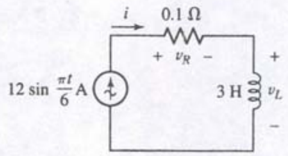
$$w_L(t) - w_L(t_0) = \tfrac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\} \qquad (۹)$$

که مجدداً فرض می‌کنیم در t_0 مقدار جریان $i(t_0)$ است. هنگام استفاده از عبارت انرژی مرسوم است که جریان در t_0 را صفر اختیار کنند، و نیز فرض می‌شود که انرژی هم در این زمان صفر باشد. در این صورت داریم:

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (۱۰)$$

به این ترتیب از این پس به‌عنوان مرجع، انرژی صفر هنگامی فرض می‌شود که جریان القاگر در آن لحظه نیز صفر باشد. از آن لحظه به بعد، که جریان صفر است، هیچ انرژی در سیم‌پیچ ذخیره نمی‌گردد. هر وقت جریان صفر نبود، مستقل از جهت و علامت آن، انرژی در القاگر ذخیره می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که انرژی برای مدتی به القاگر تحویل و مدتی دیگر از آن باز پس گرفته می‌شود. همه انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر ایده‌آل از آن باز پس گرفته می‌شود و در مدل ریاضی هیچ جای مصرف وجود ندارد، با این وجود یک سیم‌پیچ فیزیکی باید از سیم واقعی ساخته شود و بنابراین مقاومت به همراه آن است. پس انرژی نمی‌تواند ذخیره و بدون تلفات بازیابی شود.

این ایده‌ها را می‌توان با مثال ساده‌ای روشن کرد. در شکل ۷ـ۱۹ یک القاگر 3H با مقاومت 0.1Ω و منبع جریان $i_s = 12\sin\frac{\pi t}{6}$ سری شده است. مقاومت را می‌توان مقاومت سیم مربوط به سیم‌پیچ فیزیکی تصور کرد.



شکل ۷ـ۱۹ استفاده از یک منبع جریان سینوسی به‌عنوان تابع تحریک مدار سری RL. مقاومت 0.1Ω مقاومت ذاتی سیمی است که القاگر با آن ساخته شده است.

مثال ۷ـ۷

حداکثر انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۷ـ۱۹ را بیابید و انرژی تلف‌شده در مقاومت را حین ذخیره انرژی و بازیافت آن محاسبه کنید.

انرژی ذخیره شده در القاگر برابر است با:

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 = 216\,\sin^2\frac{\pi t}{6}\quad \text{J}$$

که این انرژی از عدد صفر در $t = 0$ به 216J در $t = 3\text{s}$ افزایش می‌یابد. بنابراین حداکثر انرژی ذخیره‌شده همان 216J خواهد بود.

پس از رسیدن به اوج در $t = 3\text{s}$، انرژی کلاً القاگر را ترک می‌کند. بیایید ببینیم در ازای ذخیره و بازیابی این انرژی 216J در 6 ثانیه چه بهایی را پرداخته‌ایم. توان تلف‌شده در مقاومت به راحتی محاسبه می‌شود:

$$p_R = i^2R = 14.4\,\sin^2\frac{\pi t}{6}\quad \text{W}$$

بنابراین انرژی تبدیل‌شده به گرما در این مدت برابر است با:

$$w_R = \int_0^6 p_R\,dt = \int_0^6 14.4\sin^2\frac{\pi}{6}t\,dt$$

یا

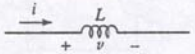
$$w_R = \int_0^6 14.4\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}t\right)\,dt = 43.2\text{ J}$$

بنابراین در فرآیند ذخیره و بازیابی 216J انرژی در 6 ثانیه، 43.2J هزینه کرده‌ایم. این مقدار 20% از حداکثر انرژی ذخیره شده است ولی در بسیاری از القاگرها این مقدار بزرگ ضریب القاء، کمیتی منطقی است. برای ضریب القاء $100\mu\text{H}$، می‌توان به حوالی 2 یا 3 درصدی انرژی حداکثر رسید.

تمرین

۷ـ۶ فرض کنید در شکل ۷ـ۲۰، $L = 25\text{mH}$ است. (الف) v را در $t = 12\text{ms}$ به‌دست‌آورید. به‌شرطی‌که $i = 10te^{-100t}\text{A}$ باشد. (ب) i را در $t = 0.1\text{s}$ محاسبه کنید، اگر $v = 6e^{-12t}\text{V}$ و $i(0) = 10\text{A}$ باشد. اگر $i = 8(1 - e^{-40t})\text{mA}$ باشد. مطلوبست: (ج) توان حمل‌شده به القاگر در $t = 50\text{ms}$ و (د) انرژی ذخیره‌شده در القاگر در $t = 40\text{ms}$.

جواب: -15.06mV، 24.0A، $7.49\mu\text{W}$ و $0.510\mu\text{J}$.



شکل ۷ـ۲۰

اکنون اجازه بدهید چهار مشخصه کلیدی یک القاگر را که از تعریف معادله $v = L\frac{di}{dt}$ به‌دست می‌آید، جمع‌بندی کنیم.

مشخصه‌های مهم یک القاگر ایده‌آل:

۱. اگر جریانی که از القاگر عبور می‌کند با زمان تغییر نکند، ولتاژی در دو سر آن وجود نخواهد داشت. بنابراین القاگر برای dc اتصال کوتاه است.

۲. حتی اگر ولتاژ دو سر القاگر صفر باشد، مقدار معینی انرژی می‌توانند در آن ذخیره شود. مثلاً اگر جریان عبوری از آن ثابت باشد این نکته معتبر است.

۳. امکان تغییر جریان درون یک القاگر در مدت زمان صفر وجود ندارد. برای تحقق آن باید ولتاژ دو سر القاگر بی‌نهایت باشد. القاگر در برابر هر تغییر در جریان خود، شبیه به مقاومت جرم در برابر تغییر سرعت، از خود مقاومت نشان می‌دهد.

۴. القاگر هرگز انرژی را مصرف نمی‌کند، بلکه فقط آن را ذخیره می‌نماید. گرچه این مطلب برای مدل ریاضی کاملاً صحیح است، به دلیل وجود مقاومت در القاگر فیزیکی صحت ندارد.

با مطالعه مجدد چهار عبارت و جایگزینی دوگان بعضی از کلمات به نتایج جالبی می‌رسیم. اگر در چهار عبارت فوق، القاگر با خازن، ضریب القا با ظرفیت، ولتاژ و جریان دو سر و عبوری از آن، مدار باز و اتصال کوتاه، فنر و جرم، تغییر مکان یا جابه‌جایی با سرعت تعویض شود، چهار عبارت قبلی متعلق به خازن به‌دست می‌آیند.

۷-۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها

اکنون که خازن و القاگر را به لیست عناصر مدار غیرفعال خود اضافه نمودیم، باید ببینیم آیا روش‌هایی که در تحلیل مدارهای مقاومتی معرفی کردیم معتبرند یا خیر. همچنین بد نیست طریقه جایگزینی ترکیبات سری و موازی آن‌ها را با معادل ساده‌تر همچون فصل ۳ بیاموزیم.
ابتدا به دو قانون کیرشهف نگاه می‌کنیم، که هر دو آن‌ها اصل بحث ما را تشکیل می‌دهند. با این وجود هنگام بیان این دو موضوع، هیچ محدودیتی بر نوع عناصر تشکیل‌دهنده شبکه نیست. بنابراین هر دو آن‌ها معتبر باقی می‌مانند.

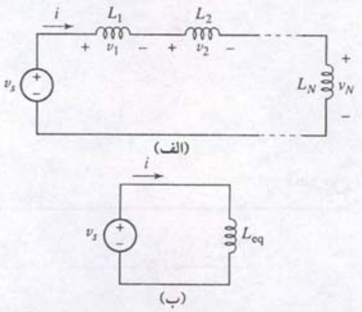
القاگرهای سری

اکنون می‌توانیم روال‌های مربوط به کاهش مقاومت‌ها را به معادلشان تعمیم داده و به‌طور مشابه به القاگرها و خازن‌ها اعمال کنیم. ابتدا منبع ولتاژ ایده‌آلی را که به N القاگر سری، طبق شکل ۲۱-۷ (الف) وصل است ملاحظه می‌نماییم. می‌خواهیم القاگری معادل با القاکنایی L_{eq} به‌دست آوریم، به‌طوری‌که اگر جایگزین این N القاگر شود، جریان $i(t)$ تغییر نکند. مدار معادل در شکل ۲۱-۷ (ب) رسم شده است. با اعمال KVL به مدار اصلی داریم:

$$v_s = v_1 + v_2 + \ldots + v_N$$
$$= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \ldots + L_N\frac{di}{dt}$$
$$= (L_1 + L_2 + \ldots + L_N)\frac{di}{dt}$$

یا به‌طور خلاصه:

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\sum_{n=1}^{N} L_n$$



شکل ۲۱-۷ (الف) مداری شامل N القاگر سری. (ب) مدار معادل مطلوب که در آن
$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$

ولی برای مدار معادل داریم:

$$v_s = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

و بنابراین القاکنایی معادل برابر است با:

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \ldots + L_N)$$

یا

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n \qquad (11)$$

القاگری که معادل با چند القاگر سری است، القاکنایی یا ضریب القایی آن با جمع القاکنایی القاگرها در مدار اصلی برابر است. این دقیقاً شبیه نتیجه‌ای است که ما برای مقاومت‌های سری به‌دست آوردیم.

القاگرهای موازی

ترکیب تعدادی القاگر موازی با نوشتن تنها معادله گرهی برای مدار اصلی، شکل ۲۲-۷ (الف)

$$i_s = \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_n(t_0)\right]$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)\int_{t_0}^{t} v\,dt + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0)$$

و مقایسه آن با مدار معادل شکل ۲۲-۷ (ب) حاصل می‌شود:

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_s(t_0)$$

چون قانون جریان کیرشهف لازم می‌دارد که $i_s(t_0)$ با مجموع جریان شاخه‌ها در t_0 برابر باشد، دو جمله انتگرال نیز باید با یکدیگر برابر باشند، از این‌رو:

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N} \qquad (12)$$

در حالت خاص که دو القاگر با هم موازی‌اند:

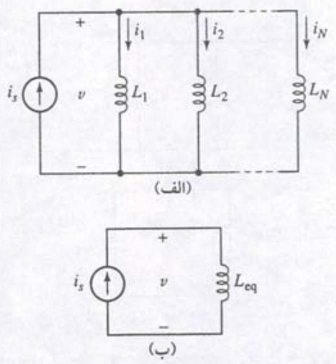
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \qquad (13)$$

می‌بینیم که القاگرهای موازی درست مثل مقاومت‌های موازی با هم ترکیب می‌شوند.

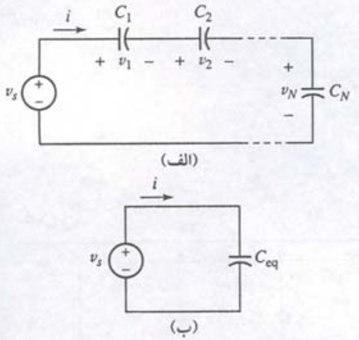
خازن‌های سری

برای یافتن خازنی که معادل N خازن سری باشد، مدار شکل ۲۳-۷ (الف) و معادل آن در شکل ۲۳-۷ (ب) را به کار برده و چنین می‌نویسیم:

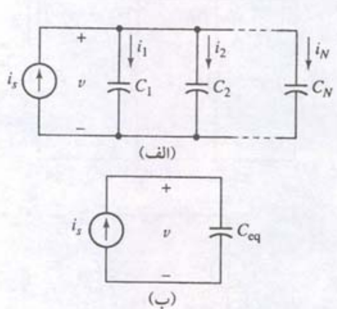
$$v_S = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_n(t_0)\right]$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0)$$



شکل ۲۲-۷ (الف) ترکیب موازی N القاگر. (ب) مدار معادل که در آن
$L_{eq} = [(1/L_1) + (1/L_2) + \ldots + (1/L_N)]^{-1}$



شکل ۲۳-۷ (الف) مداری شامل N خازن سری. (ب) مدار معادل که در آن
$C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \ldots + 1/C_N]^{-1}$



شکل ۲۴ـ۷ (الف) ترکیب موازی N خازن. (ب) مدار معادل که در آن

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

و

$$v_S = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_S(t_0)$$

با این وجود قانون ولتاژ کیرشهف برابری $v_s(t_0)$ و مجموع ولتاژ خازن‌ها در t_0 را برقرار می‌کند. بنابراین:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N} \qquad (۱۴)$$

بنابراین خازن‌های سری، همچون سری‌شدن رسانایی‌ها و یا مقاومت‌های موازی با یکدیگر ترکیب می‌شوند. حالت خاص معادل دو خازن سری به رابطه زیر منتهی می‌گردد:

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \qquad (۱۵)$$

خازن‌های موازی

بالاخره به کمک شکل ۲۴ـ۷ ظرفیت معادل N خازن موازی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

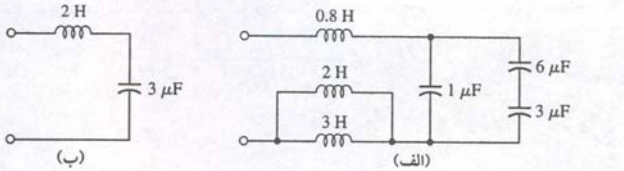
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N \qquad (۱۶)$$

و جای تعجبی ندارد که ببینیم خازن‌های موازی چون مقاومت‌های سری با یکدیگر ترکیب می‌شوند، یعنی کافی است همه ظرفیت‌ها را با هم جمع کنیم.

این فرمول‌ها ارزش حفظ کردن را دارند. فرمول‌های اعمال‌شده به ترکیبات سری و موازی القاگرها با فرمول‌های نظیرشان در ترکیب مقاومت‌ها یکی هستند، بنابراین فرمول‌های مذکور واضح به‌نظر می‌رسند. با این وجود باید دقت کرد که در ترکیب‌های سری و موازی خازن‌ها، عبارات برخلاف مقاومت‌ها و القاگرها است و اغلب به هنگام عمل موجب خطاهای فاحش در محاسبات می‌گردد.

مثال ۸ـ۷

شبکه شکل ۲۵ـ۷ (الف) را با ترکیب سری و موازی ساده بیان کنید.



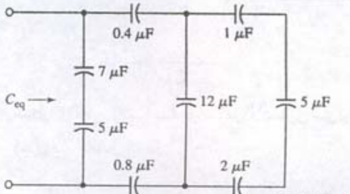
شکل ۲۵ـ۷ (الف) یک شبکهٔ مفروض LC. (ب) مدار معادل آن.

ابتدا خازن‌های 3 و $6\mu F$ به معادل $2\mu F$ خود تبدیل می‌شوند و آنگاه این خازن با عنصر $1\mu F$ که موازی است ترکیب می‌گردد و حاصل آن معادل $3\mu F$ می‌باشد. به‌علاوه القاگرهای 3 و 2H با معادل 1.2H جایگزین شده و سپس با عنصر 0.8H جمع می‌شود تا القاکنایی 2H به دست آید. مدار معادل ساده‌شده در شکل ۲۵ـ۷(ب) دیده می‌شود.

تمرین

۷ـ۷ C_{eq} را برای شبکه شکل ۲۶ـ۷ بیابید.

جواب: $3.18\mu F$

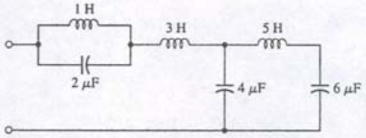


شکل ۲۶ـ۷

شبکه شکل ۲۷ـ۷ حاوی سه القاگر و سه خازن است ولی سری یا موازی هیچ‌یک از دو عنصر خازن و القاگر وجود ندارد. ساده‌سازی این شبکه با تکنیک‌های ارائه‌شده امکان‌پذیر نیست.

۴ـ۷ نتایج خطی‌بودن

اجازه بدهید به تحلیل مش و گرهی بازگردیم. چون می‌توانیم قانون کیرشهف را با حاشیه امنیت کافی اعمال کنیم، مشکلی در نوشتن معادلاتی که کافی و مستقلند نداریم. این معادلات انتگرال ـ مشتق خطی با ضرایب ثابتند که حتی ذکر آنها مشکل است، چه رسد به حل آن‌ها. بنابراین ما فقط به نوشتن آن‌ها اکتفا می‌کنیم تا با کاربرد قوانین کیرشهف در مدارهای RLC آشنا شویم. حل معادلات ساده‌تر را در فصل‌های بعدی بحث خواهیم کرد.



شکل ۲۷ـ۷ یک شبکه LC بدون قابلیت ترکیب سری یا موازی خازن‌ها و القاگرها.

مثال ۹ـ۷

معادلات گرهی را برای مدار شکل ۲۸ـ۷ بنویسید.

ولتاژهای گرهی طبق شکل انتخاب شده‌اند، و ما جمع جریان‌هایی که گره مرکزی را ترک می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1 - v_s)\,dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} = 0$$

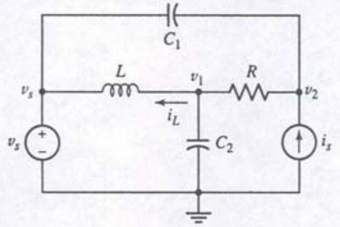
که در آن $i_L(t_0)$ مقدار جریان القاگر در آغاز انتگرال‌گیری است. در گره سمت راست داریم:

$$C_1\frac{d(v_2 - v_S)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_S = 0$$

با نوشتن مجدد دو رابطه اخیر داریم:

$$\frac{v_1}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_1\,dt - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_S\,dt - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1\frac{dv_2}{dt} = C_1\frac{dv_S}{dt} + i_S$$



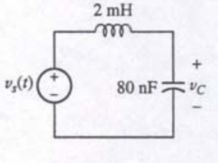
شکل ۲۸ـ۷ یک مدار RLC چهار گره‌ای و ولتاژ گره‌های آن‌ها.

این معادلات انتگرال ـ مشتق، همان‌هایی هستند که وعده داده بودیم و در این‌جا به چند نکته جالب در مورد آن‌ها اشاره می‌نماییم. اول این‌که در معادلات فوق منبع ولتاژ v_s به فرم عبارات انتگرالی و مشتقی ظاهر شده است و نه به فرم ساده v_s. چون هر دو منبع برای همه زمان‌ها وجود دارند باید بتوانیم عبارات انتگرالی و مشتقی را ارزیابی نماییم. دوم، مقدار جریان اولیه در القاگر، $i_L(t_0)$ به‌عنوان منبع جریان (ثابت) در گره وسطی عمل می‌کند.

تمرین

۸ـ۷ اگر $v_C(t) = 4\cos 10^5 t$ V در مدار شکل ۲۹ـ۷ باشد، $v_s(t)$ را بیابید.

جواب: $-2.4\cos 10^5 t$ V



شکل ۲۹ـ۷

در این لحظه ما سعی نخواهیم کرد تا معادلات انتگرال ـ مشتق را حل کنیم. با این وجود بد نیست وقتی که نیروهای محرکه توابع سینوسی هستند، مدار را بررسی کنیم و در صورت امکان نسبت ولتاژ ـ جریان (به‌نام امپدانس) یا جریان ـ ولتاژ (ادمیتانس) را برای هر سه عنصر غیرفعال تعریف نماییم. آنگاه ولتاژهای گرهی تنها با یک ضریب وارد معادلات می‌شوند و نه به صورت مشتق و انتگرال و دوباره یک مجموعه معادله جبری خطی خواهیم داشت. این معادلات جبری را می‌توان به کمک دترمینان یا با روش حذف متغیرها حل کرد.

می‌توان نشان داد که مزیت خطی‌بودن شامل مدارهای RLC نیز می‌گردد. طبق تعاریف قبلی ما در مورد یک مدار خطی، این مدارها نیز خطی هستند زیرا رابطه ولتاژ ـ جریان برای القاگر و یا خازن رابطه‌ای خطی است. برای القاگر داریم:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

و ضرب جریان در ثابت K، ولتاژی را به‌دست‌می‌دهد که K برابر بزرگ‌تر است. در فرم انتگرال:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

می‌توان دید که اگر هر عبارت K برابر شود، آنگاه جریان اولیه هم باید در K ضرب گردد.

بررسی مشابهی در مورد خازن نشان می‌دهد که خازن هم خطی است. بنابراین مداری متشکل از منابع مستقل منابع وابسته خطی، القاگرها و خازن‌ها، یک مدار خطی می‌باشد.

در این مدار خطی مجدداً پاسخ متناسب با نیروی محرکه است. برای اثبات این ادعا، معادلات انتگرال ـ مشتق را برای مجموعه می‌نویسیم. بیایید همه جملاتی که فرم Ri، $L\,di/dt$ و $1/C \int i\,dt$ دارند را در سمت چپ معادله بنویسیم و ولتاژ منابع مستقل را به سمت راست منتقل کنیم. به‌عنوان مثالی ساده، یکی از معادلات می‌تواند فرم زیر را داشته باشد:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_C(t_0) = v_S$$

اگر هر منبع مستقلی K برابر شود آن‌گاه سمت راست هر معادله به اندازه K برابر می‌شود. اکنون هر جمله در سمت چپ یا جمله‌ای خطی شامل چند جریان حلقه یا یک ولتاژ اولیه خازن است. برای این‌که همه پاسخ‌ها (جریان حلقه‌ها) K برابر شوند، باید ولتاژ خازن را هم در K ضرب کنیم. یعنی باید ولتاژ اولیه خازن را مانند یک منبع مستقل درنظربگیریم و آن را هم K برابر نماییم. به طریقی مشابه جریان‌ها نیز در تحلیل گرهی به صورت جریان منابع مستقل ظاهر می‌شوند.

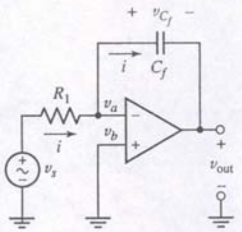
بنابراین اصل تناسب منبع و پاسخ قابل تعمیم به یک مدار کلی، RLC نیز هست و به دنبال آن می‌توان گفت که اصل تجمیع نیز معتبر می‌باشد. تأکید می‌کنیم که مقدار جریان‌های اولیه در القاگرها و ولتاژ در هر خازن باید در اصل تجمیع به صورت منابع مستقل درنظر گرفته شوند و هر یک از آن‌ها به نوبت غیرفعال شوند. در فصل ۵ آموختیم که اصل تجمیع، نتیجه طبیعت خطی مدارهای مقاومتی است. این مدارها به این دلیل خطی‌اند که رابطه ولتاژ ـ جریان برای مقاومت خطی و نیز قوانین کیرشهف هم خطی‌اند. قبل از اعمال اصل تجمیع به مدارهای RLC، لازم است روشی را برای حل معادلات توصیف‌کننده آن‌ها هنگامی که فقط یک منبع وجود دارد، معرفی کنیم. دراین‌جا باید احساس اطمینان کنیم که هر مدار خطی پاسخی را که دامنه‌اش با دامنه منبع متناسب است، تولید خواهد کرد. آنگاه آماده‌ایم تا اصل تجمیع را اعمال کنیم و در آن القاگر یا خازنی را درنظربگیریم که در آن جریان القاگر و ولتاژ خازن در $t - t_0$ مشخص شده و هرگاه نوبتش فرا برسد باید کشته شود.

قضایای تونن و نورتن بر خطی‌بودن مدار اولیه، قابلیت اعمال قضایای کیرشهف و اصل تجمیع استوار است. مدار RLC کلی کاملاً با این شرایط مطابقت دارد، و بنابراین نتیجه می‌شود که همه مدارهای خطی حاوی هر ترکیبی از منابع ولتاژ و جریان مستقل، منابع جریان و ولتاژ وابسته خطی، مقاومت‌های خطی، القاگرها و خازن‌ها را می‌توان با این دو قضیه تحلیل کرد. در این‌جا لازم نیست مجدداً قضایا را تکرار کنیم زیرا قبلاً چنان بیان شده‌اند که به مدار کلی RLC نیز قابل اعمال باشند.

۷-۵ مدارهای op amp ساده با خازن

در فصل ۶ با چند نوع مدار تقویت‌کننده مبتنی بر op amp ایده‌آل آشنا شدیم. تقریباً در هر مورد، دیدیم که خروجی با ترکیبی از مقاومت به ولتاژ ورودی مرتبط است. اگر یک یا چند عدد از این مقاومت‌ها را با یک خازن تعویض کنیم، امکان دارد مدار جالبی به‌دست‌آید و در آن خروجی با مشتق یا انتگرال ولتاژ ورودی متناسب باشد. در عمل این‌گونه مدارها کاربرد وسیعی دارند. مثلاً یک سنسور سرعت را می‌توان به مدار یک op amp وصل کرد تا سیگنالی متناسب با شتاب را تولید نماید. یا سیگنال خروجی می‌تواند نشان‌دهنده برخورد بار روی یک الکترود فلزی در پریود خاصی باشد که این‌کار فقط با اندازه‌گیری جریان انجام می‌گردد.

برای ساخت یک انتگرال‌گیر با استفاده از op amp، ما ورودی معکوس‌نکننده را به زمین وصل می‌کنیم و یک خازن ایده‌آل به‌عنوان عنصر پسخورد از خروجی به این ورودی وصل می‌نماییم و بالاخره یک منبع سیگنال v_s را از طریق مقاومت ایده‌آل طبق شکل ۳۰-۷ به آن متصل می‌کنیم.



شکل ۳۰-۷ op amp ایده‌آلی که به عنوان انتگرال‌گیر وصل شده است.

با اجرای تحلیل گرهی در ورودی وارونگر داریم:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

می‌توانیم جریان i را به ولتاژ دو سر خازن مرتبط نماییم:

$$i = C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

و بنابراین:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

با به‌کارگیری قاعده ۲ برای op amp ایده‌آل، می‌دانیم $v_a = v_b = 0$ است، بنابراین:

$$0 = \frac{-v_s}{R_1} + C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

با انتگرال‌گیری و حل v_{out} داریم:

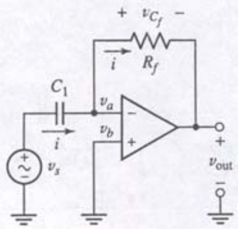
$$v_{C_f} = v_a - v_{out} = 0 - v_{out} = \frac{1}{R_1C_f}\int_0^t v_s\,dt' + v_{C_f}(0)$$

یا

$$v_{out} = -\frac{1}{R_1C_f}\int_0^t v_s\,dt' - v_{C_f}(0) \qquad (۱۷)$$

بنابراین برای ساخت یک **انتگرال‌گیر**، یک مقاومت، یک خازن و یک op amp را با هم ترکیب کردیم. توجه کنید که اولین جمله خروجی $\frac{1}{RC}$ ضرب‌در منفی انتگرال ورودی از $t' = 0$ تا t است و دومین جمله منفی مقدار اولیه v_{C_f} می‌باشد. مثلاً مقدار $(RC)^{-1}$ را با $R = 1M\Omega$ و $C = 1\mu F$ می‌توان به واحد تبدیل کرد. دیگر ترکیبات می‌تواند ولتاژ خروجی را افزایش یا کاهش دهد.

قبل از این‌که مدار انتگرال‌گیر را به کناری بگذاریم، ممکن‌است سوالی از طرف خواننده مطرح شود "آیا می‌توانیم به‌جای خازن از القاگر استفاده کرده و یک مشتق‌گیر بسازیم". البته می‌توانیم ولی طراحان مدار معمولاً از به‌کارگیری القاگرها حتی‌الامکان به دلیل سایز، وزن، قیمت، مقاومت و ظرفیت آن خودداری می‌کنند. در عوض محل مقاومت و خازن را در شکل ۲۷-۷ تعویض می‌نمایند و به این ترتیب یک مشتق‌گیر ساخته می‌شود.



شکل ۳۱-۷ یک op amp ایده‌آل به عنوان مشتق‌گیر.

مثال ۱۰-۷

عبارتی برای ولتاژ خروجی مدار op amp شکل ۳۱-۷ به‌دست‌آورید.

حل را با معادله گرهی در پایه ورودی وارونگر با $v_{C_1} = v_a - v_s$ آغاز می‌کنیم.

$$0 = C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f}$$

با به‌کارگیری قاعده ۲، $v_a - v_b = 0$ است. بنابراین:

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{out}}{R_f}$$

با حل برای v_{out} داریم:

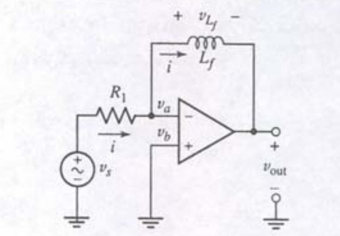
$$v_{out} = R_f C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}$$

چون $v_{C_1} = v_a - v_b = v_s$:

$$v_{out} = -R_f C_1 \frac{dv_s}{dt}$$

بنابراین با تعویض مقاومت و خازن در شکل ۳۰ـ۷ به‌جای انتگرال‌گیر یک مشتق‌گیر خواهیم داشت.

تمرین



شکل ۳۲ـ۷

۹ـ۷ عبارتی برحسب v_{in} برای v_{out} در مدار شکل ۳۲ـ۷ به‌دست‌آورید.

جواب: $v_{out} = -L_f/R_1 dv_s/dt$.

۶ـ۷ دوگانگی

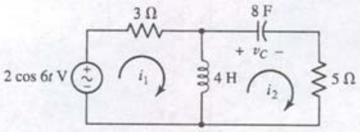
مفهوم دوگانگی به بسیاری از مفاهیم اصول مهندسی إعمال می‌شود. در این بخش، دوگانگی را برحسب معادلات مدار تعریف می‌کنیم. دو مدار را "دوگان" یکدیگر گوییم اگر معادلات مشی که یکی از آن‌ها را بیان می‌کند، از لحاظ ریاضی با معادلات گرهی دیگری همشکل باشد. اگر معادله مش یک مدار با معادله گرهی متناظر با مدار دیگر از لحاظ عادی هم، شبیه باشند، آن دو مدار را دقیقاً دوگان یکدیگر گوییم. البته متغیرهای ولتاژ و جریان نمی‌توانند یکسان باشند. دوگانگی به خواصی اشاره دارد که به وسیله مدارهای دوگان بروز داده می‌شود.

بیایید تعریف را تفسیر کنیم و از آن با نوشتن دو معادله مش در شکل ۳۳ـ۷ مدار دوگان را بسازیم. دو جریان حلقه‌ای i_1 و i_2 را تخصیص می‌دهیم و معادلات مش زیر را می‌نویسیم:

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad (۱۸)$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt + 5i_2 = -10 \qquad (۱۹)$$

البته فرض بر این‌است‌که در $t = 0$ ولتاژ $v_C = 10V$ باشد.



شکل ۳۳ـ۷ مداری که می‌خواهیم با استفاده از تعریف دوگانگی مدار دقیقاً دوگانش را به‌دست‌آوریم.

اکنون دو معادله‌ای را می‌سازیم که دقیقاً دوگان مدار را تشکیل دهند. می‌خواهیم این دو از نوع معادلات گرهی باشند و لذا شروع به جایگزینی جریان‌های حلقه i_1 و i_2 با ولتاژهای گرهی v_1 و v_2 در معادلات (۹) و (۱۰) می‌کنیم. آن‌گاه داریم:

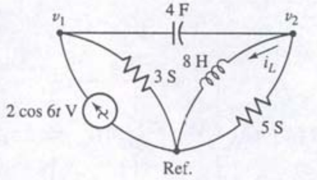
$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad (۲۰)$$

$$-4\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt + 5v_2 = -10 \qquad (۲۱)$$

حال به‌دنبال مداری خواهیم گشت که توسط دو معادله فوق بیان شود.

ابتدا خطی را برای نمایش گره مرجع خطی می‌کشیم و سپس دو گره با ولتاژهای v_1 و v_2 را نسبت به مرجع مشخص می‌کنیم. معادله (۲۰) نشان می‌دهد که یک منبع جریان 2 cos6t A بین گره 1 و گره مرجع وصل است و جهت آن طوری است که جریان وارد گره 1 می‌شود. این معادله همچنین نشان می‌دهد که بین گره 1 و گره مرجع یک رسانایی 3S قرار دارد. به سراغ معادله (۲۱) می‌رویم و ابتدا جملات غیرمشترک یعنی آن‌هایی که در معادله (۲۰) نیستند را درنظرمی‌گیریم. این جملات نشان می‌دهند که بین گره 2 و گره مرجع یک القاگر 8H و یک رسانای 5S وجود دارد. دو جمله مشابه در معادلات (۲۰) و (۲۱) نشان می‌دهد که یک خازن 4F در میان دو گره قرار دارد. مدار با نصب این خازن در بین دو گره کامل می‌شود. جمله ثابت در سمت راست معادله (۲۱) مقدار جریان القاگر در $t = 0$ است. به بیان دیگر $i(0) = 10A$.

مدار دوگان در شکل ۳۴ـ۷ نشان داده شده است. چون در مجموعه معادلات از لحاظ عددی یکسانند، مدارها دقیقاً دوگان یکدیگرند.

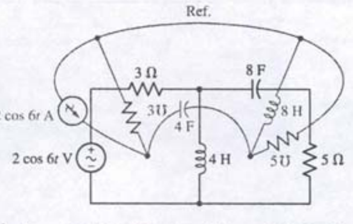


شکل ۳۴ـ۷ مدار دوگان دقیق مدار شکل ۳۳ـ۷.

برای یافتن مدارهای دوگان می‌توان روشی ساده‌تر را هم به‌کاربرد و حتی معادلات را هم ننوشت. بنابراین در این‌گونه موارد به معادلات مش یا تک‌حلقه آن‌ها فکر می‌کنیم. در هر مش باید یک گره غیرمرجع داشته باشیم، و به‌علاوه گره مرجع هم باید باشد. بنابراین روی نمودار داده‌شده در وسط هر مش گرهی را مستقر می‌نماییم و گره مرجع را به صورت خطی نزدیک نمودار و یا یک حلقه به دور مدار درنظرمی‌گیریم. هر عنصری که در مرز دو مش قرار دارد، یک عنصر مشترک است و در دو معادله مش به‌صورت جملاتی یکسان و با علائم مختلف ظاهر می‌شود. به‌جای این عنصر، باید عنصری را جایگزین کرد که در دو معادله گرهی ظاهر می‌شود. بنابراین آن را بین گره غیر مرجع داخل حلقه‌ای که عنصر دوگان بین آن‌ها قرار دارد، می‌گذاریم. نوع عنصر دوگان را هم به آسانی می‌توان تعیین کرد. اگر به‌جای القاگر از خازن، به‌جای خازن از القاگر، به‌جای مقاومت از رسانایی و به‌جای رسانایی از مقاومت استفاده کنیم، شکل ریاضی و معادلات تغییر نمی‌یابد. بنابراین القاگر 4H که بین مش‌های 1 و 2 در مدار شکل ۳۳ـ۷ مشترک است به صورت خازن 4F ظاهر می‌شود که در مدار دوگان بین گره‌های 1 و 2 قرار دارد.

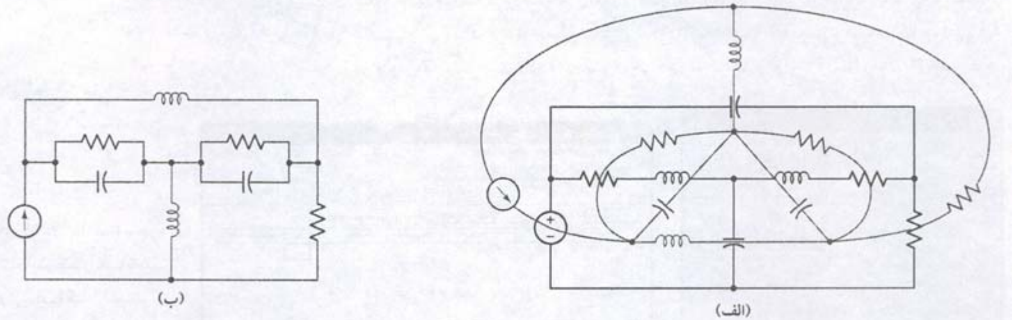
دوگان عناصری که تنها در یک حلقه قرار دارند، باید بین گره متناظر آن حلقه و گره مرجع قرار گیرند. مجدداً با توجه به شکل ۳۳ـ۷ ولتاژ 2 cos6t V فقط در مش 1 وجود دارد. دوگان آن منبع جریان 2 cos6t است که فقط به گره 1 و گره مرجع وصل است. چون منبع ولتاژ در جهت ساعتگرد است، منبع جریان هم باید به طرف گره غیرمرجع باشد. بالاخره، برای ولتاژ اولیه موجود در دو سر خازن 8F در مدار مفروض باید اولویت قایل شد. معادلات نشان می‌دهند که دوگان این ولتاژ اولیه در دو سر خازن، جریان اولیه‌ای است که در مدار دوگان از القاگر عبور می‌کند. مقادیر عددی یکسانند و علامت صحیح جریان اولیه به راحتی با ملاحظه ولتاژ اولیه در مدار مفروض و جریان اولیه مدار دوگان، به‌عنوان منبع به راحتی معین می‌شوند. بنابراین اگر v_C در مدار اصلی به‌عنوان منبع تصور شود به‌صورت $-v_C$ در سمت راست معادله حلقه ظاهر می‌گردد. در مدار دوگان تصور جریان i_L به‌عنوان منبع منجر به جمله $-i_L$ در سمت راست معادله گرهی می‌شود. چون هر دو به هنگام ایفای نقش منبع علامت یکسانی دارند، آن‌گاه اگر $v_C(0) = 10V$ باشد $i_L(0)$ نیز 10A خواهد بود.

مدار شکل ۳۳ـ۷ در شکل ۳۵ـ۷ تکرار شده و دوگان دقیق آن نیز روی همان نمودار رسم شده است. برای رسم آن، هر عنصر را بین گره‌های واقع در مرکز هر مش و گره مرجع قرار می‌دهیم. کشیدن یک گره مرجع بزرگ به دور مدار، کار را آسان می‌کند. پس از رعایت استاندارد در ترسیم، شکل ۳۴ـ۷ به‌دست خواهد آمد.

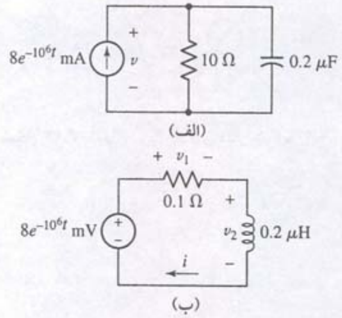


شکل ۳۵ـ۷ دوگان مدار شکل ۳۳ـ۷ که مستقیماً از مدار به‌دست‌آمده است.

مثال دیگری از ایجاد دوگان یک مدار در شکل ۳۶ـ۷(الف) و (ب) دیده می‌شود. چون هیچ مقداری برای عنصری مشخص نشده است، این دو مدار دوگان هستند ولی لزوماً دوگان دقیق نیستند. مدار اصلی را می‌توان با فرض یک گره در مرکز هر یک از پنج مش شکل ۳۶ـ۷(ب) و ادامه روش فوق به‌دست‌آورد.



شکل ۳۶ـ۷ (الف) دوگان مدار، روی خود مدار رسم شده است. (ب) شکل مناسب‌تر مدار دوگان.



شکل ۷_۳۷

مفهوم دوگانگی را می‌توان در زبانی که با آن تحلیل و طرز کار مدار بیان می‌شود هم وارد کرد. مثلاً اگر منبع ولتاژی با یک خازن سری باشد و بخواهیم جمله "منبع ولتاژ موجب ایجاد جریان در خازن می‌شود" را بیان کنیم، جمله دوگان "منبع جریان موجب ایجاد ولتاژ در دو سر القاگر می‌شود" خواهد بود. اگر در بیان جمله دقت نشود، مانند "جریان دور مدار سری می‌چرخد" برای درک دوگان آن باید ابتکار به خرج داد.

برای تمرین در به‌کاربردن زبان دوگانگی، می‌توانید دوگان قضیه تونن را بیان کنید. حاصل، قضیه نورتن خواهد بود.

صحبت از عناصر دوگان، زبان دوگان و مدارهای دوگان کردیم. و اما شبکه دوگان چیست؟ مقاومت R و القاگر L سری با آن را در نظر بگیرید. در دوگان این شبکه دو پایانه وجود داشته و به راحتی با اتصال چند منبع ایده‌آل به شبکه مفروض به‌دست‌می‌آید. آنگاه مدار دوگان به صورت منبع دوگان موازی با رسانایی G که همان مقدار R را دارد و یک ظرفیت C که دارای اندازه L است به دست خواهد آمد. ما شبکه دوگان را به صورت شبکه‌ای دو پایانه‌ای که به منبع دوگان وصل شده ملاحظه می‌کنیم. بنابراین جفت پایانه‌های بین G و C به صورت موازی به هم وصل می‌شوند.

قبل از پایان بحث، باید متذکر شویم که دوگانگی بر اساس معادلات مش و گرهی تعریف شد. چون مدارهای غیرمسطح نمی‌توانند با معادلات مش بیان شوند، مداری که در صفحه ترسیم نشود دوگان ندارد.

ما از اصل دوگان برای کاهش کاری که باید در تحلیل مدارهای استاندارد ساده انجام شود، استفاده می‌کنیم. پس از تحلیل مدار سری RL، مدار RC موازی به توجه کمتری نیاز دارد، نه به این علت که اهمیتش کمتر است، بلکه به دلیل این‌که تحلیل دوگان آن را می‌دانیم. چون حاصل تحلیل مدارهای پیچیده را نمی‌توان به خاطر سپرد، معمولاً دوگان در تحلیل این مدارها، حل سریعی را در اختیار نمی‌گذارد.

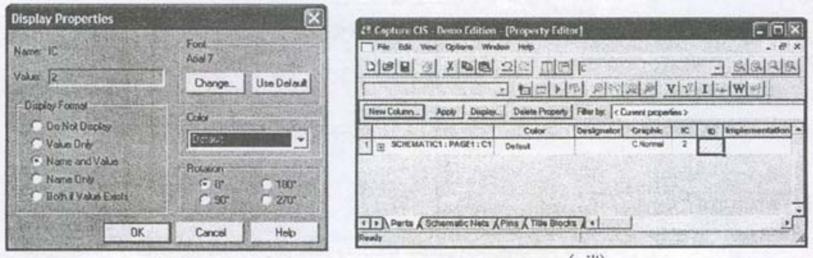
تمرین

۷_۱۰ یک معادله گرهی برای مدار شکل ۷_۳۷ (الف) بنویسید و با جایگزینی نشان دهید که $v = -80e^{-10^6 t}$ mV یک حل است. با این فرض، پیدا کنید (الف) v_1، (ب) v_2 و (ج) i را برای مدار شکل ۷_۳۷ (ب).

جواب: $-8e^{-10^6 t}$ mV ، $16e^{-10^6 t}$ V و $-80e^{-10^6 t}$ mA

۷_۷ مدل‌سازی خازن‌ها و القاگرها با PSpice

هنگام استفاده از PSpice برای تحلیل مدارهای حاوی القاگرها و خازن‌ها، اغلب لازم است تا مقدار اولیه هر عنصر را مشخص کنیم (یعنی $v_C(0)$، $i_L(0)$). برای این کار باید روی نماد آن عنصر دو بار کلیک کرد تا جعبهٔ گفتگوی شکل ۷_۳۸ (الف) ظاهر شود. همچنانکه خواهیم دید در جوار مقدار ظرفیت (1nF در پیش‌فرض) می‌توان مقدار اولیه (IC=) را هم مشخص کرد.



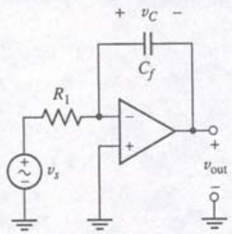
شکل ۷_۳۸ (الف) پنجره ویرایشگر خاصیت خازنی. (ب) کادر دیالوگ خصوصیات نمایشگر.

یک جعبه محاوره مشابهی را می‌توان با دو بار کلیک بر روی سمبل القاگر به‌دست‌آورد. اگر بخواهیم مقادیر اولیه روی شماتیک قرار گیرند، باید روی Change Display کلیک کنیم و انتخاب مناسب را انجام دهیم. توجه کنید که وقتی ابتدا خازن روی شماتیک قرار گیرد، به صورت افقی مستقر می‌شود و پایانه مرجع مثبت برای ولتاژ اولیه پایانه سمت چپ است.

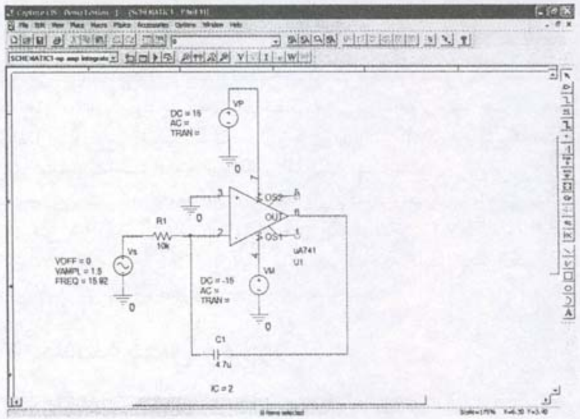
مثال ۷_۱۱

موج ولتاژ خروجی مدار شکل ۷_۳۹ را شبیه‌سازی کنید، به‌شرطی‌که $v_s = 5\sin 100t$ V ، $R_1 = 100\text{k}\Omega$ ، $C_f = 4.7\ \mu\text{F}$ و $v_C(0) = 2\text{V}$ باشد.

با ترسیم شماتیک مدار آغاز می‌کنیم و سعی خواهیم کرد تا ولتاژ اولیه را در دو سر خازن (شکل ۷_۴۰) برقرار کنیم. توجه کنید که باید فرکانس از 100rad/s به $100/2\pi = 15.92$Hz تبدیل شود.

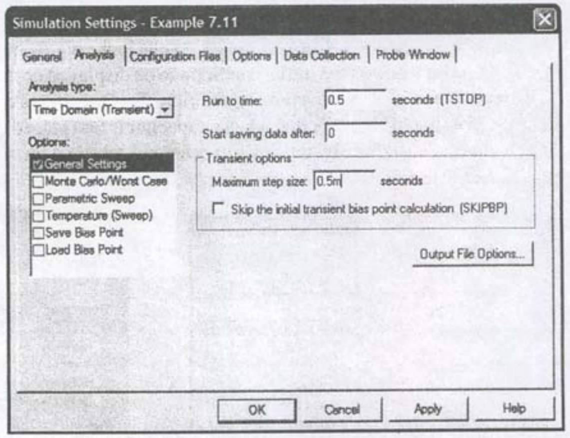


شکل ۷_۳۹ یک مدار انتگرال‌گیر op amp.



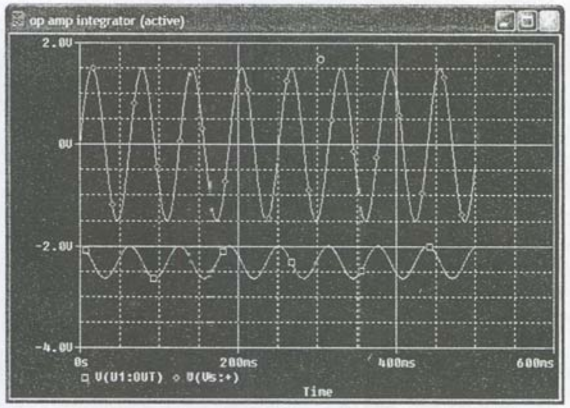
شکل ۷_۴۰ رسم مدار شکل ۷_۳۹ با ابزار ترسیم شماتیک.

برای فراهم‌کردن ولتاژها و جریان‌های متغیر با زمان باید آن‌چه که تحلیل گذرا خوانده می‌شود را اجرا نماییم. تحت منوی Setup، سعی در انتخاب Transient Analgesis کنید، در این حالت جعبه محاوره شکل ۷_۴۱ باید ظاهر گردد. Final Time زمان پایان شبیه‌سازی را



شکل ۷_۴۱ کادر محاوره تنظیم پارامترهای تحلیل گذرا. زمان نهایی را 0.5s گذاشته‌ایم تا چند تناوب از شکل موج به‌دست‌آید.
$(1/15.92 \approx 0.06\text{s})$

شکل ۷-۴۲ خروجی probe مدار انتگرال شبیه‌سازی‌شده همراه با ورودی برای مقایسه.



مشخص می‌سازد. PSpice خود اقدام به انتخاب فواصل زمانی منفصل، برای محاسبه ولتاژها و جریان‌های مختلف می‌نماید. گاهی پیام خطایی مبنی بر عدم وجود حل گذرا دریافت می‌شود. در این‌گونه موارد، بهتر است مقداری برای Step Cei ing وارد کنیم که حداکثر گام زمانی بین محاسبات است. البته هرچه گام کوتاه‌تر باشد بهتر است.

با توجه به تحلیل قبلی و معادله (۱۷)، انتظار داریم که خروجی برابر با منفی انتگرال موج ورودی یعنی $v_{out} = 0.319 \cos 100t - 2.319$ V که در شکل ۷-۴۲ می‌بینیم باشد. مقدار اولیه 2 ولت در دو سر خازن با مقدار ثابتی ترکیب می‌شود که حاصل انتگرال‌گیری است و نتیجه‌اش مقدار متوسط غیرصفری در خروجی است.

۷-۸ خلاصه فصل و مرور

- جریان درون یک خازن $i = C\dfrac{dv}{dt}$ است.
- ولتاژ دو سر خازن با رابطه زیر به جریانش مربوط است:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0)$$

- یک خازن برای جریان‌های dc به صورت مدار باز عمل می‌کند.
- ولتاژ دو سر یک القاگر با رابطه $v = L\dfrac{di}{dt}$ معین می‌گردد.
- جریان عبوری از القاگر با رابطه زیر به ولتاژش مربوط می‌شود:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

- یک القاگر در جریان‌های dc به صورت مدار اتصال کوتاه عمل می‌نماید.
- انرژی ذخیره‌شده فعلی در یک خازن برابر $\frac{1}{2}cv^2$ است، در حالی‌که انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر $\frac{1}{2}Li^2$ می‌باشد. مرجع هر دوی آن‌ها به زمانی است که در آن‌ها انرژی نبوده است.
- ترکیبات سری و موازی القاگرها را می‌توان با روابطی مشابه مقاومت‌ها در هم ادغام کرد.
- ترکیبات سری و موازی خازن‌ها را می‌توان برعکس مقاومت‌ها تصور کرد.
- خازنی که در یک op amp معکوس‌گر به‌عنوان عنصر پسخورد به‌کار می‌رود ولتاژ خروجی متناسب با انتگرال ولتاژ ورودی را تولید می‌نماید. با تعویض مقاومت ورودی با خازن پسخورد، ولتاژ خروجی متناسب با مشتق ورودی خواهد بود.
- چون خازن‌ها و القاگرها عناصر خطی‌اند، KVL، KCL، تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تحلیل‌های گرهی و مش به مدار آن‌ها قابل اعمال است.

- مفهوم دوگانگی تصویر دیگری در روابط بین مدارهای حاوی القاگر و خازن را به‌دست می‌دهد.
- PSpice اجازه می‌دهد تا ولتاژ اولیه‌ای در دو سر یک خازن یا جریان اولیه‌ای در یک القاگر ایجاد کنیم. تحلیل گذرا جزئیات پاسخ وابسته به زمان مدارهای حاوی انواع عناصر را تهیه می‌کند.

۷-۹ خواندنی‌های کمکی

A detailed guide to characteristics and selection of various capacitor and inductor types can be found in:

H. B. Drexler, *Passive Electronic Component Handbook,* 2nd ed., C. A. Harper, ed. New York: McGraw-Hill, 2003, pp. 69–203.

C. J. Kaiser, *The Inductor Handbook,* 2nd ed. Olathe, Kans.: C.J. Publishing, 1996.

Two books that describe capacitor-based op amp circuits are:

R. Mancini, (ed.). *Op Amps Are For Everyone,* 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

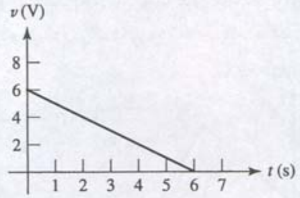
W. G. Jung, *Op Amp Cookbook,* 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

مسائل

۷-۱ خازن

۱. جریان درون خازن $10\,\mu F$ را در ازای ولتاژهای دو سر آن حساب کنید: (الف) 5 V، (ب) $115\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V و (ج) $4e^{-t}$ mV.

۲. جریان درون خازن $4.7\,\mu F$ را در پاسخ به موج شکل ۷-۴۳ رسم کنید. فرض کنید که جریان و ولتاژ طبق قرارداد علامت عناصر غیرفعال همخوانی دارد.



شکل ۷-۴۳

۳. جریان جاری درون خازن $1\ m\Phi$ را در پاسخ به v ولت در دو سر پایانه‌ها را حساب کنید، اگر v برابر باشد با: (الف) $30te^{-t}$ V و (ب) $4e^{-5t}\sin 100t$ V.

۴. حداکثر مقدار انرژی که در هر یک از خازن‌های الکترولیت شکل ۷-۲ (ب) و (ج) می‌توان ذخیره کرد چقدر است؟

۵. خازنی از دو قرص آلومینیومی نازک با قطر 1cm و فاصله $100\mu m$ از یکدیگر ساخته شده است. (الف) ظرفیت آن را حساب کنید با فرض این‌که فقط هوا در بین صفحات وجود داشته باشد. (ب) ولتاژی را معین کنید که باید برای ذخیره 1mJ انرژی در خازن به‌کاربریم. (ج) اگر بخواهیم خازن $2.5\mu J$ انرژی را در 100V ذخیره کند ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon/\varepsilon_0$ برای ناحیه بین صفحات را مشخص کنید.

۶. یک دیود پیوندی pn با ظرفیت پیوندی زیر تعریف شده است:

$$C_j = \frac{K_s \varepsilon_0 A}{W}$$

که برای سیلیکان $K_s = 11.8$ است، ε_0 ضریب گذردهی خلاء، A برابر سطح مقطع پیوند و W عرض ناحیه تهی پیوند است. W نه تنها به ساخت آن بلکه به ولتاژ اعمال‌شده به دو پایانه نیز بستگی دارد:

$$W = \sqrt{\frac{2K_s\varepsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)}$$

بنابراین دیودها غالباً در مدارهای الکترونیک به‌عنوان خازن‌های کنترل‌شده با ولتاژ به‌کار می‌روند. با این فرض که مقادیر پارامترها، $N = 10^{18}\,cm^{-3}$، $V_{bi} = 0.57$V و $q = 1.6 \times 10^{-19}$C باشند، ظرفیت خازن دیود با سطح مقطع $A = 1\mu m \times 1\mu m$ در ولتاژ -10V، -5 و -1 = V_A را به‌دست‌آورید.

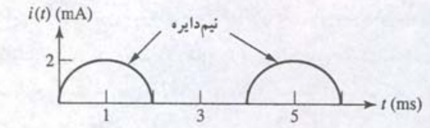
۷. خازنی طراحی کنید که ظرفیتش به‌صورت دستی با چرخش ولوم بین 100pF و 1nF تغییر کند. طرح خود را با برچسب‌های مناسب توضیح دهید.

۸. ولتاژ زیر به یک خازن $300\mu F$ وصل است:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 3e^{-t/5}\ V & t > 0 \end{cases}$$

(الف) انرژی ذخیره‌شده در خازن در $t = 2ms$ چقدر است. (ب) در چه مدتی انرژی ذخیره‌شده در خازن به 37% مقدار حداکثرش افت می‌کند. (ج) جریان عبوری از خازن در $t = 1.2s$ را معین نمایید. (د) توان انتقالی به وسیله خازن به مدار خاصی در $t = 2s$ را حساب کنید.

۹. جریان درون خازن $47\mu F$ در شکل ۷-۴۴ دیده می‌شود. ولتاژ دو سر آن را در (الف) $t = 2ms$، (ب) $t = 4ms$ و (ج) $t = 5ms$ حساب کنید.

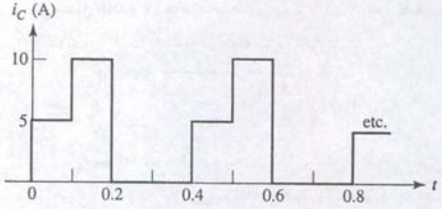


شکل ۷-۴۴

۱۰. جریان در یک خازن با رابطه $i(t) = 7 \sin \pi t$ mA داده شده است. اگر انرژی ذخیره‌شده در $t = 200$ms برابر $3\mu J$ باشد، مقدار ظرفیت چقدر است؟

۱۱. (الف) اگر خازن شکل ۷-۱ دارای ظرفیت $0.2\mu F$ باشد، با $v_C = 5 + 3 \cos^2 200t$ V مقدار $i_C(t)$ را به‌دست‌آورید. (ب) حداکثر انرژی ذخیره‌شده در خازن چیست؟ (ج) اگر در $t < 0$، $i_C = 0$ و در $t > 0$، برابر $i_C = 8e^{-100t}$mA باشد، برای $t > 0$ مقدار $v_C(t)$ را پیدا کنید. (د) اگر برای $t > 0$، $i_C = 8e^{-100t}$mA و $v_C(0) = 100$V باشد، $v_C(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.

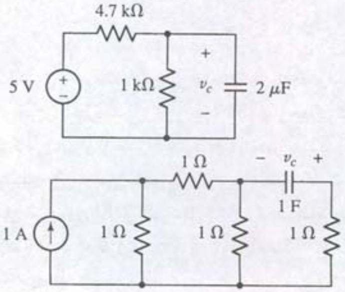
۱۲. شکل موج جریان برای $0 < t$ در شکل ۷-۴۵ به خازن 2mF اعمال شده است. با فرض $v_C(0) = 250$V و فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال، در چه فاصله زمانی v_C بین 2000 و 2100V قرار می‌گیرد؟



شکل ۷-۴۵

۱۳. مقاومت R با خازن $1\mu F$ موازی است. برای هر $0 \le t$ انرژی ذخیره‌شده در خازن برابر $20e^{-1000t}$mJ است. (الف) R را پیدا کنید. (ب) با انتگرال‌گیری، نشان دهید که انرژی تلف‌شده در فاصله $0 < t < \infty$ برابر 0.02J است.

۱۴. برای مدارهای شکل ۷-۴۶، (الف) ولتاژ دو سر هر خازن را محاسبه کنید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.

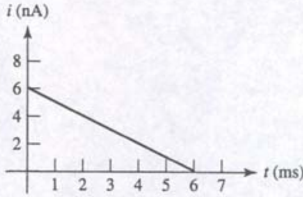


شکل ۷-۴۶

۷-۲ القاگر

۱۵. ولتاژ دو سر یک القاگر را حساب کنید، اگر جریان وارده به پایانه مرجع "+" برابر باشد با: (الف) 5 mA؛ (ب) $115 \sqrt{2} \cos 120 \pi t$ A و (ج) $4e^{-6t}$mA.

۱۶. ولتاژ ظاهرشده در دو سر القاگر 1 pH را در پاسخ به جریان شکل ۷-۴۷ رسم کنید. فرض کنید که تعریف جریان و ولتاژ با قرارداد قطعات غیرفعال همخوانی دارد.

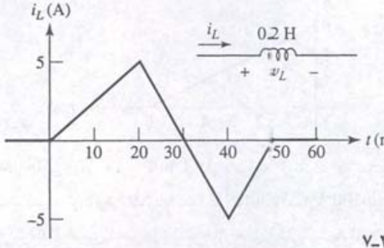


شکل ۷-۴۷

۱۷. ولتاژی را که در دو سر القاگر $5\mu H$ در پاسخ به جریان پایانه مرجع "+" ایجاد می‌شود را محاسبه نمایید، اگر i برابر باشد با: (الف) $30te^{-t}$nA و (ب) $4e^{-t}\sin 100t$ mA.

۱۸. حداکثر انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر 5 mH چقدر است اگر سیم برای حداکثر جریان 1.5 A در نظر گرفته شده باشد؟ جواب خود را تشریح کنید.

۱۹. با مراجعه به شکل ۷-۴۸: (الف) v_L را به‌عنوان تابعی از زمان بین $0 < t < 60$ms رسم کنید. (ب) زمانی که در آن القاگر حداکثر توان را جذب کند، پیدا کنید. (ج) زمان تولید توان حداکثر را به‌دست‌آورید و (د) انرژی ذخیره‌شده در القاگر در $t = 40$ms چقدر است.

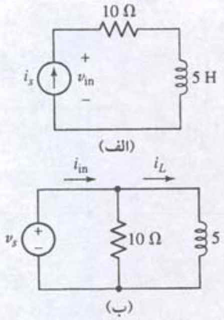


شکل ۷-۴۸

۲۰. در شکل ۷-۱۳، فرض کنید L = 50 mH باشد. با فرض $i_L = 0$ در $t < 0$ و $80te^{-100t}$mA در $t > 0$، حداکثر مقدار $|i_L|$ و $|v|$ و زمانی که این حداکثرها رخ می‌دهند را تعیین نمایید.

۲۱. (الف) اگر در مدار شکل ۷-۴۹ (الف) در $t > 0$، $i_s = 0.4t^2$ باشد، $v_{in}(t)$ را برای $t > 0$ در شکل ۷-۴۹ (ب) رسم کنید.

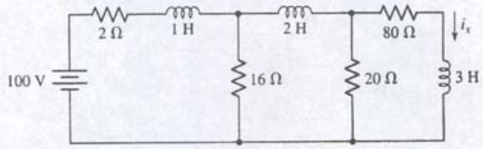
۲۲. ولتاژ $20 \cos 1000t$ V به القاگر 25mH اعمال شده است. اگر در $t = 0$ جریان القاگر صفر باشد، در $0 < t < 2\pi$ms، (الف) توان جذب‌شده به وسیله القاگر را رسم کنید. (ب) انرژی ذخیره‌شده در آن را بیابید.



شکل ۷-۴۹

۲۳. ولتاژ v_L در دو سر القاگر 0.2H در $0 < t \le 10$ms برابر 100V است. در فاصله زمانی $10 < t < 20$ms به‌طور خطی به صفر می‌رود، در $20 < t < 30$ms برابر 0 و در $30 < t < 40$ms برابر 100V و پس از آن صفر است. با فرض قرارداد علامت عنصر غیرفعال برای v_L و i_L (الف) i_L را در $t = 8$ms به‌دست‌آورید، به‌شرطی‌که $i_L(0) = -2A$. (ب) انرژی ذخیره‌شده در $t = 22$ms را معین کنید، به‌شرطی‌که $i_L(0) = 0$ فرض شود.

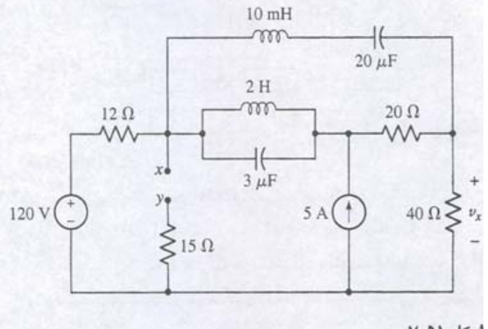
۲۴. مدار شکل ۷-۵۰ از مدت‌ها قبل وصل شده است، i_x را پیدا کنید.



شکل ۷-۵۰

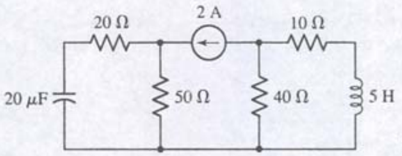
۲۵. ولتاژ دو سر یک القاگر 5H برابر $v_L = 10(e^{-t} - e^{-2t})$ است. اگر $i_L(0) = 80$mA باشد و v_L و i_L طبق قرارداد عناصر غیرفعال تعریف شده باشند (الف) $v_L(1 s)$، (ب) $i_L(1 s)$ و (ج) $i_L(\infty)$ را به‌دست‌آورید.

۲۶. پس از مدت زمان طولانی از وصل مدار شکل ۷-۵۱، v_x را بیابید، به‌شرطی‌که (الف) خازن بین x و y باشد و (ب) یک القاگر بین x و y باشد.



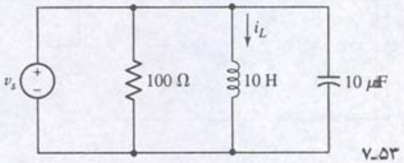
شکل ۷-۵۱

۲۷. با مراجعه به شکل ۷-۵۲ (الف) w_L، (ب) w_C، (ج) ولتاژ دو سر هر عنصر مدار و (د) جریان در هر عنصر را بیابید.



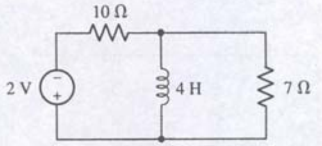
شکل ۷-۵۲

۲۸. اجازه بدهید $v_s = 400t^2$ V، $t > 0$ و $i_L(0) = 0.5$A را در مدار شکل ۷-۵۳ داشته باشیم. در $t = 0.4$s، مقادیر انرژی (الف) ذخیره شده در خازن، (ب) ذخیره‌شده در القاگر و (ج) تلف‌شده در مقاومت را از $t = 0$ تا $t = 0.4$s حساب کنید.



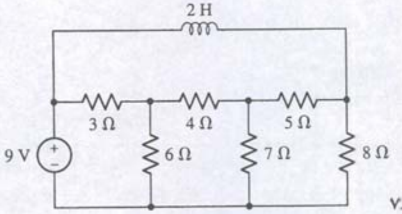
شکل ۷-۵۳

۲۹. برای مدار شکل ۷-۵۴، (الف) توان تلف‌شده با مقاومت‌های 7Ω و 10Ω را محاسبه کنید. صحت جواب را با PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۷-۵۴

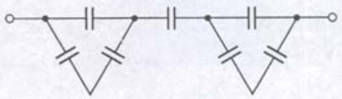
۳۰. (الف) معادل تونن شبکه متصل القاگر شکل ۷-۵۵ را به دست آورید. (ب) جریان داخل القاگر را به‌دست آورید. (ج) صحت جواب خود را با PSpice تحقیق نمایید. به نتایج خود نام مناسبی بدهید.



شکل ۷-۵۵

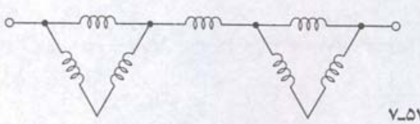
۷-۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها

۳۱. ظرفیت معادل شبکه شکل ۷-۵۶ را اگر همه خازن‌ها $10\mu F$ باشند، معین کنید.



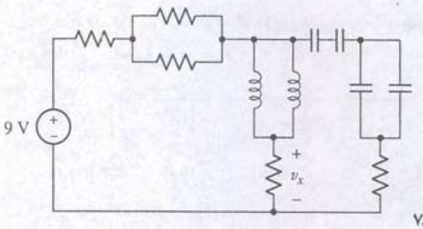
شکل ۷-۵۶

۳۲. القاء معادل شبکه شکل ۷ـ۵۷ را اگر همه القاگرها 77pH باشند، معین نمایید.



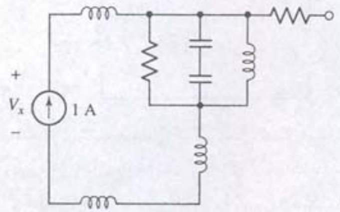
شکل ۷ـ۵۷

۳۳. برای مدار شکل ۷ـ۵۸، (الف) مدار را با استفاده از ترکیب سری/موازی تا حداقل اجزا کاهش دهید.



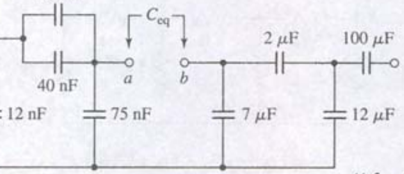
شکل ۷ـ۵۸

۳۴. برای مدار شکل ۷ـ۵۹، (الف) مدار را با حداقل استفاده از ترکیب سری/موازی تا حداقل اجزا کاهش دهید. (ب) اگر همه مقاومت‌ها 1Ω باشند، همه خازن‌ها 50µF و همه القاگرها 10nH باشند، v_x را تعیین نمایید.



شکل ۷ـ۵۹

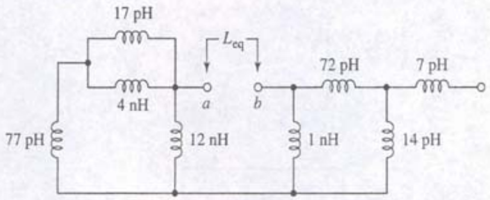
۳۵. شبکه شکل ۷ـ۶۰ را با نظاره از پایانه‌های a و b به یک خازن تقلیل دهید.



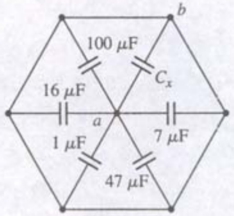
شکل ۷ـ۶۰

۳۶. با نظاره از پایانه‌های a و b در شکل ۷ـ۶۱، شبکه را به یک القاگر کاهش دهید.

۳۷. اگر شبکه شکل ۷ـ۶۲ در a و b به ولتاژ 2.5V وصل شود، انرژی ذخیره‌شده 534.8 µJ خواهد بود، مقدار C_x چقدر است؟

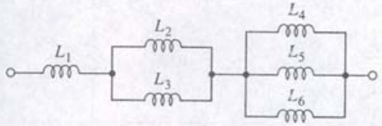


شکل ۷ـ۶۱



شکل ۷ـ۶۲

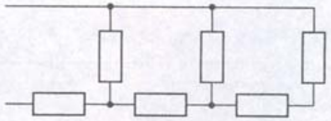
۳۸. شبکه شکل ۷ـ۶۳ از سه طبقه سری تشکیل شده است که هر کدام تعدادی القاگر موازی دارد. (الف) اگر همه القاگرها 1.5H باشند، القاگر معادل را پیدا کنید. (ب) عبارتی کلی برای شبکه از این نوع با N طبقه به‌دست‌آورید.



شکل ۷ـ۶۳

۳۹. برای شبکه شکل ۷ـ۶۳، $L_1 = 1H$، $L_2 = L_3 = 2H$، $L_4 = L_5 = L_6 = 3H$ است. (الف) القاگر معادل را بیابید. (ب) عبارتی برای این نوع شبکه با N طبقه به‌دست‌آورید، با این فرض که طبقه N از N القاگر و هر القاگر دارای القاکنایی N است.

۴۰. اگر در شکل ۷ـ۶۴ هر عنصر یک خازن 2pF باشد، با گسترش تبدیل Δ-Y آن را ساده کنید.

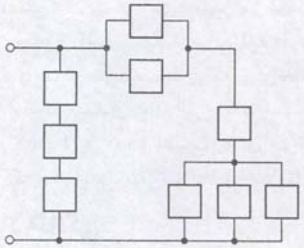


شکل ۷ـ۶۴

۴۱. از بسط مفهوم تبدیل Δ-Y شبکه شکل ۷ـ۶۴ را ساده کنید. هر عنصر یک القاگر 1nH است.

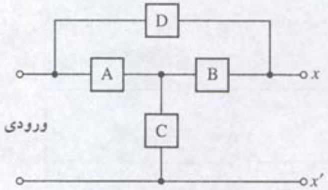
۴۲. با جعبه‌ای پر از القاگرهای 1µH بگویید با حداقل اجزا چگونه می‌توان القاگر معادل (الف) 2.25µH، (ب) 750nH و (ج) 450nH داشت.

۴۳. با توجه به شکل ۷ـ۶۵، (الف) اگر هر عنصر یک مقاومت 10Ω باشد، R_{eq} را به‌دست‌آورید. (ب) اگر هر عنصر یک القاگر 10H باشد، L_{eq} را تعیین کنید و (ج) اگر هر عنصر یک خازن 10F باشد C_{eq} چقدر است؟



شکل ۷ـ۶۵

۴۴. در شکل ۷ـ۶۶، اجازه بدهید تا A، B، C و D (الف) به ترتیب القاگرهایی با 1H، 2H، 3H و 4H باشند، القاکنایی ورودی را با x - x′ باز و سپس اتصال کوتاه پیدا کنید. (ب) به ترتیب خازن‌های 1F، 2F، 3F و 4F باشند و آنگاه ظرفیت ورودی را با x - x′ باز و سپس بسته به‌دست‌آورید.

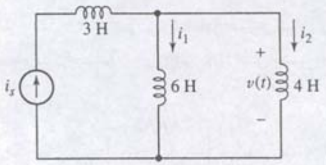


شکل ۷ـ۶۶

۴۵. با جعبه‌ای پر از خازن‌های 1nF و استفاده از حداقل خازن‌ها، نشان دهید چگونه می‌توان ظرفیت معادل (الف) 2.25nF، (ب) 0.75nF و (ج) 0.45nF را به‌دست‌آورد.

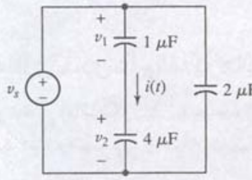
۷ـ۴ نتایج خطی‌بودن

۴۶. در مدار شکل ۷ـ۶۷، اگر $i_s = 60e^{-200t}$ mA با $i_1(0) = 20$mA باشد، (الف) $v(t)$ را در ازای همه مقادیر t بیابید. (ب) $i_1(t)$ را برای $t \geq 0$ به‌دست‌آورید. (ج) $i_2(t)$ را برای $t \geq 0$ معین کنید.



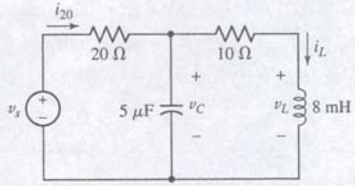
شکل ۷ـ۶۷

۴۷. اگر در مدار شکل ۷ـ۶۸، $v_s = 100e^{-80t}$ V و $v_1(0) = 20V$ باشد، (الف) $i(t)$ را برای همه مقادیر t به‌دست‌آورید. (ب) $v_1(t)$ را در $t \geq 0$ پیدا کنید و (ج) $v_2(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل ۷ـ۶۸

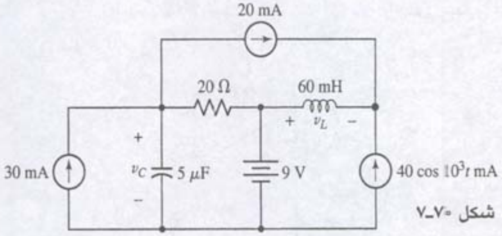
۴۸. (الف) معادلات گرهی را برای شکل ۷ـ۶۹ بنویسید. (ب) معادلات مش را برای آن بنویسید.



شکل ۷ـ۶۹

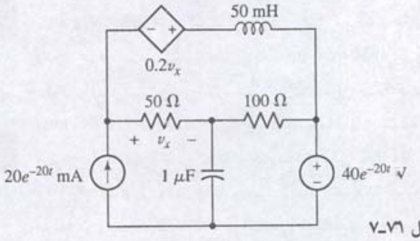
$v_C(0) = 12$ V, $i_L(0) = 2$ A

۴۹. اگر فرض شود که همه منابع در شکل ۷ـ۷۰ برای مدت مدیدی وصل و کار کرده باشند، از اصل تجمیع برای یافتن $v_C(t)$، $v_L(t)$ استفاده کنید.



شکل ۷ـ۷۰

۵۰. برای مدار شکل ۷ـ۷۱، فرض کنید در $t = 0$ هیچ انرژی ذخیره نشده است. مجموعه معادلات گرهی را بنویسید.



شکل ۷ـ۷۱

۷ـ۵ مدارهای op amp ساده با خازن

۵۱. جای مقاومت R و C را در مدار شکل ۷ـ۳۰ تعویض کرده و فرض کنید $R_i = \infty$ و $A = \infty$ است. (الف) $v_0(t)$ را به صورت تابعی از $v_s(t)$ رسم کنید. (ب) معادله‌ای به‌دست‌آورید که $v_0(t)$ و $v_s(t)$ را به هم مربوط سازد. به‌شرطی‌که A بی‌نهایت نباشد.

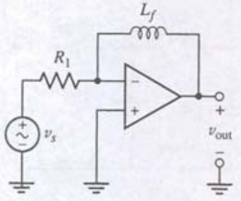
۵۲. کشت‌دهنده یونی دستگاهی است که برای تزریق اتم‌های یونیزه در سیلیکان به‌کار می‌رود، تا مشخصه‌های الکتریکی ساخت دیودها و ترانزیستورها را اصلاح نماید. یون‌هایی که به سیلیکان برخورد می‌کنند، به جریانی تبدیل می‌شوند و نهایتاً به مقاومت معلومی هدایت می‌گردند. جریان مستقیماً با شدت یون (یعنی تعداد برخورد یون‌ها در ثانیه) $i = 1.602 \times 10^{-19}$ متناسب است. اگر برای تشخیص جریان از مقاومت 1.000MΩ استفاده شده باشد، مداری طراحی کنید که

خروجی‌اش مستقیماً متناسب با کل یون‌های برخوردی با سیلیکان باشد (به آن dose می‌گویند).

۵۳. در مدار شکل ۷-۳۰، $R = 0.5M\Omega$ ، $C = 2\mu F$ ، $R_i = \infty$ و $R_0 = 0$ می‌باشد. فرض کنید که می‌خواهیم خروجی $v_{out} = \cos 10t - 1$ V باشد. $v_s(t)$ را به‌دست‌آورید. (الف) اگر $A = 2000$ و (ب) A بی‌نهایت باشد.

۵۴. یک سنسور سرعت به یک چرخ دوّار وصل است. مداری طراحی کنید که ولتاژ مثبتی تولید کند که اندازه‌اش با شتاب چرخ متناسب باشد (دور بر دقیقه بر دقیقه). فرض کنید خروجی سنسور سرعت $1\ \frac{mV}{rpm}$ و چرخ در کمتر از 3500rpm دور می‌زند.

۵۵. (الف) در مدار شکل ۷-۷۲، مقاومت و القاگر را عوض می‌کنیم. عبارتی برای v_{out} برحسب v_s به‌دست‌آورید. (ب) بگویید چرا چنین مداری در عمل به کار نمی‌رود.



شکل ۷-۷۲

۵۶. یک نورسنج که به یک دوربین وصل است یک خروجی را متناسب با سرعت نور تهیه می‌کند به طوری که 1 mV = 1 mcd است. مداری طراحی کنید که یک خروجی ولتاژ متناسب با انتگرال (مجموع) شدت نور باشد به طوری که 1 mV = 1 mcd شود.

۵۷. یک فرآیند شیشه‌گری لازم می‌دارد که میزان خنک‌کنندگی از 100°C/min تجاوز نکند. ولتاژی متناسب با دمای شیشه مذاب موجود است به طوری که در محدوده 500 الی 2000°C داریم 1 mV = 1°C. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی‌اش نمایش‌دهنده سرعت خنک‌شدن باشد به طوری که 1 V = 100°C/min.

۵۸. یک سنسور شناور در یک تانک سوخت برای اندازه‌گیری سوخت باقیمانده نصب شده است. سنسور طوری کالیبره شده است که 1 volt = 10 liters می‌باشد. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی‌اش مصرف سوخت را به لیتر بر ثانیه فراهم کند به نحوی که 1 V = 1 l/s.

۵۹. قرار است یک باتری برای انرژی که می‌تواند به یک بار مقاومتی 1Ω حمل کند، مورد تست قرار گیرد. دو سیگنال در اختیار است: یکی سیگنال ولتاژ برای مربع ولتاژ باتری ($1\ mV = 1\ V^2$) و یک سیگنال ولتاژ برای نشان‌دادن مربع جریان خروجی باتری ($1\ mV = 1\ A^2$). مداری طراحی کنید که در آن ولتاژ خروجی متناسب با کل انرژی حمله شده باشد به طوری که 1 mV = 1 J انرژی تحویل‌شده به بار باشد.

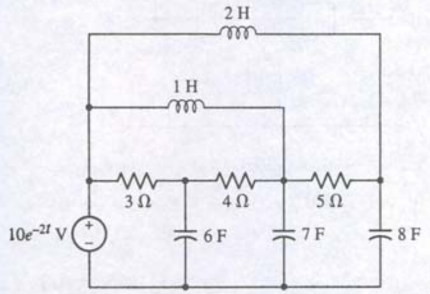
۶۰. مهندسین تست یک هواپیمای آزمایشی می‌خواهند شتاب منفی را در هنگام فرودآمدن اندازه بگیرند، زیرا آن‌ها در مورد سیستم تعلیق چرخ‌ها در ضمن فرود و میزان فشار بر آن تحقیق می‌کنند. اگر آن‌ها برای شما سیگنال ولتاژ از چرخ‌دنده‌ها را تهیه کنند به طوری که 1 mV = 1 mph باشد، مداری طراحی کنید که خروجی‌اش متناسب با شتاب منفی ($1\ V = 1\ km/s^2$) باشد.

۷-۶ دوگانگی

۶۱. (الف) دوگان دقیق مدار شکل ۷-۶۹ را بکشید. متغیرهای دوگان و مقادیر اولیه دوگان را مشخص نمایید. (ب) معادلات گرهی را برای مدار دوگان بنویسید. (ج) معادلات مش را برای مدار دوگان بنویسید.

۶۲. دوگان دقیق مدار شکل ۷-۵۱ را رسم کنید. مدار را به فرم مرتب و تمیز و گونیا برای مدار دوگان رسم نمایید.

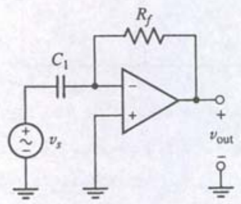
۶۳. دوگان دقیق در مدار شکل ۷-۷۳ را ترسیم نمایید. سعی کنید منظم باشد.



شکل ۷-۷۳

۶۴. (الف) دوگان دقیق مدار تمرین ۴۷ را رسم نمایید و در آن متغیرها را نشان دهید. (ب) دوگان مسئله را برای تمرین ۴۷ بنویسید. (ج) تمرین ۴۷ جدید را حل کنید.

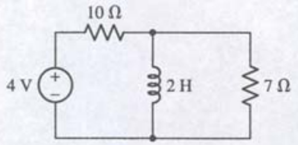
۶۵. دوگان مدار ۷-۷۴ را ترسیم کنید و عبارتی برای v_{out} برحسب v_s به‌دست‌آورید (راهنمایی: برای op amp از مدل مشروح استفاده کنید).



شکل ۷-۷۴

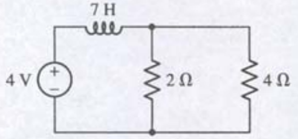
۷-۷ مدل‌سازی خازن‌ها و القاگرها با PSpice

۶۶. انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۷-۷۵ را محاسبه کنید. نتیجه خود را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب نمایید.



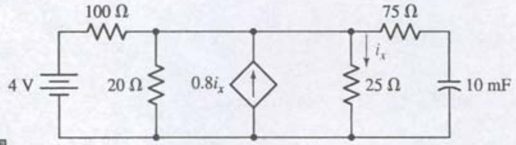
شکل ۷-۷۵

۶۷. انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۷-۷۶ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice مقایسه نمایید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



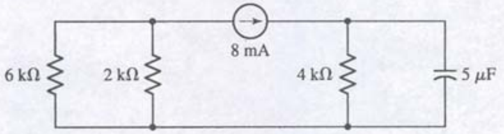
شکل ۷-۷۶

۶۸. انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷-۷۷ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice چک نمایید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



شکل ۷-۷۷

۶۹. انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷-۷۸ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice چک نمایید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



شکل ۷-۷۸

۷۰. برای op amp تفاضلی شکل ۷-۳۱، $R_f = 100\ M\Omega$ و $C_1 = 5$ nF را اختیار کنید. (الف) اگر $v_s = 3 \sin 10t$ V باشد، خروجی را پیش‌بینی کنید. (ب) حل خود را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای حل انتخاب نمایید.

۷۱. با استفاده از PSpice نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در یک خازن $33\mu F$ در $t = 10^{-2}$s وقتی به منبع ولتاژ $v(t) = 5 \cos 75t$ V وصل است $221\mu J$ می‌باشد (راهنمایی: از قطعه VSIN استفاده کنید).

۷۲. با PSpice نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر 100pH در $t = 0.01$s وقتی که منبع جریان $i(t) = 5 \cos 75t$ A باشد برابر 669pJ است (راهنمایی: از قطعه ISIN استفاده نمایید).

۷۳. برای مدار شکل ۷-۷۲، R_1 و L_f را طوری انتخاب کنید که خروجی دو برابر مشتق ولتاژ ورودی باشد که ولتاژ ورودی هم $v_s = A \cos 2M10^3 t$ V است. صحت طراحی را با PSpice مشخص کنید.

۷۴. مسئله ۷-۷۱ را با $v(t) = 5 \cos 75t - 7$ V تکرار کنید.

۷۵. مسئله ۷-۷۲ را با $i(t) = 5 \cos 75t - 7$ تکرار کنید.

فصل هشتم

مدارهای RL و RC

مفاهیم کلیدی

- ثابت‌های زمانی RL و RC
- پاسخ طبیعی واداشته
- محاسبه پاسخ وابسته به زمان برای محرک DC
- چگونگی تعیین مقادیر اولیه و اثر آنها در پاسخ مدار
- تحلیل مدارها با ورودی پله و با سوئیچ‌ها
- ایجاد امواج پالسی با توابع پله واحد
- پاسخ مدارهایی که به طور متوالی سوئیچ شده‌اند

مقدمه

در فصل ۷ معادلات حاکم بر پاسخ چند مدار حاوی القاگر و خازن را نوشتیم، ولی هیچ‌یک از آن‌ها را حل نکردیم. در این‌جا آماده‌ایم تا با حل معادلات ساده‌تر پیش رفته، توجه خود را به آن‌هایی که حاوی مقاومت و القاگر و یا مقاومت و خازن هستند، معطوف داریم.

گرچه مدارهایی که مایلیم آن‌ها را بررسی کنیم ظاهری ساده دارند، ولی دارای اهمیت عملی هستند. این‌گونه شبکه‌ها در مدارهای تقویت‌کننده الکترونیک سیستم‌های کنترل خودکار، تقویت‌کننده‌های عملیاتی، تجهیزات مخابراتی و بسیاری از کاربردهای دیگر مورد استفاده‌اند. آشنایی با این مدارهای ساده ما را قادر می‌سازد تا پیش‌بینی کنیم که خروجی یک تقویت‌کننده در دنبال‌کردن تغییرات ورودی چه دقتی دارد و یا ببینیم تغییر سرعت یک موتور در پاسخ به تغییر میدان حاصل از جریان چگونه است. درک ما از رفتار مدارهای ساده RC و RL موجب می‌شود تا اصلاحاتی بر تقویت‌کننده یا موتورها صورت دهیم تا پاسخی مطلوب‌تر حاصل گردد.

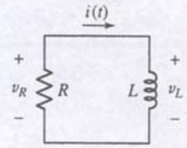
۸ـ۱ مدار RL بدون منبع

تحلیل مدارهای حاوی القاگرها و یا خازن‌دار به فرمول‌بندی و حل معادله انتگرال ـ مشتق توصیف‌کننده مدار وابسته است. معادله خاصی را که به دست می‌آوریم، معادله **دیفرانسیل خطی همگن** می‌نامیم و در واقع معادله دیفرانسیلی است که در آن هر جمله مرتبه اول متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن است. برای این مدار هنگامی حلی به‌دست‌می‌آید که برای متغیر مستقل تابعی بیابیم و این تابع در معادله دیفرانسیل صدق کند و نیز توزیع اولیه انرژی در زمان خاصی، مثل $t = 0$ را نیز برآورده نماید.

حل معادله دیفرانسیل معمولاً پاسخ مدار را نشان می‌دهد و نام‌های متعددی برای آن انتخاب شده است. چون این پاسخ به طبیعت کلی مدار (نوع عناصر، ابعاد آن‌ها و اتصالات درونی آن‌ها) بستگی دارد، اغلب آن را **پاسخ طبیعی** می‌خوانند. با این وجود مدارهای واقعی ساخته ما نمی‌توانند انرژی را تا ابد در خود ذخیره کنند و مقاومت ذاتی خازن‌ها و القاگرها نهایتاً همه انرژی را به گرما تبدیل می‌کند. پاسخ نهایتاً از بین می‌رود و به این دلیل غالباً به آن **پاسخ گذرا** هم می‌گویند. باید با اصطلاح به‌کاررفته به‌وسیله ریاضی‌دانان نیز آشنا شویم. آن‌ها پاسخ یک معادله دیفرانسیل خطی همگن را تابع مکمل می‌نامند.

وقتی منابع مستقلی بر مداری عمل کنند، بخشی از پاسخ به طبیعت منبع خاص (با تابع محرک) به‌کاررفته بستگی دارد. این بخش از پاسخ را حل خصوصی یا پاسخ ماندگار و یا پاسخ واداشته می‌نامیم که با پاسخ تولیدشده در مدار عادی از منبع ممکن می‌گردد. در این صورت پاسخ کامل مدار از جمع تابع مکمل، حل خصوصی به‌دست‌می‌آید. به بیان دیگر، پاسخ کامل مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته است. پاسخ بی‌منبع را **پاسخ طبیعی**، **پاسخ گذرا**، **پاسخ آزاد** یا **تابع مکمل** هم می‌گویند. ولی به دلیل طبیعت توصیفی‌اش آن را پاسخ طبیعی خواهیم خواند.

برای حل این معادلات دیفرانسیل چندین روش مختلف را ملاحظه خواهیم کرد. با این وجود دستکاری‌های ریاضی، تحلیل مدار نیست. بیشترین توجه ما به خود حل، مفهوم و تفسیر آن است و سعی خواهیم کرد بقدر کافی با فرم پاسخ آشنا شویم تا بتوانیم با کمی تفکر جواب یک مدار جدید را بنویسیم. گرچه به هنگام عدم موفقیت در روش‌های ساده روش‌های تحلیلی پیچیده‌تری لازم است، ولی درکی که بخوبی ایجاد شده باشد منبعی ارزشمند است.



شکل ۱ـ۸ یک مدار ساده RL که $i(t)$ آن باید به ازای شرط اولیهٔ $i(0) = I_0$ تعیین شود.

مطرح‌نمودن وجود جریان متغیر با زمان در مداری بدون منبع خیلی عجیب به‌نظرمی‌رسد! به یاد داشته باشید که فقط جریان در $t = 0$ را می‌دانیم؛ جریان قبل از این زمان مشخص نیست و نیز نمی‌دانیم مدار قبل از $t = 0$ چگونه بوده است. برای وجود جریان باید منبعی وجود داشته باشد، ولی از آن اطلاعی نداریم. خوشبختانه برای تحلیل مدار داده‌شده به این اطلاعات نیازی نیست.

ما مطالعه خود را با تحلیل گذرا و ملاحظه مدار سری شکل ۱ـ۸ آغاز می‌کنیم. بیایید جریان متغیر با زمان را $i(t)$ بخوانیم. ما مقدار $i(t)$ را در $t = 0$ با I_0 نشان می‌دهیم، به بیان دیگر $i(0) = I_0$ است. بنابراین داریم:

$$Ri + v_L = Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

یا

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (۱)$$

هدف یافتن عبارتی برای $i(t)$ است تا در این معادله صدق کند و نیز در $t = 0$ جریان برابر I_0 باشد. حل را به چند روش می‌توان به‌دست‌آورد.

روند مستقیم

یک روش بسیار سرراست برای حل معادله دیفرانسیل این است‌که متغیرها از یکدیگر جدا شوند و سپس از هر سمت معادله انتگرال بگیریم. متغیرهای موجود در معادله (۱) عبارتند از i و t و واضح است که می‌توان معادله را در dt ضرب، بر i تقسیم و با تفکیک متغیرها آن را مرتب نمود:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \qquad (۲)$$

چون جریان در $t = 0$ برابر I_0 و در زمان t نیز $i(t)$ است، می‌توانیم از دو طرف معادله بین مقادیر متناظر انتگرال بگیریم:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt'$$

با اجرای انتگرال‌گیری،

$$\ln i'\Big|_{I_0}^{i} = -\frac{R}{L}t'\Big|_0^t$$

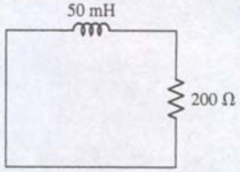
و بنابراین:

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t - 0)$$

پس از کمی دستکاری جریان $i(t)$ مطابق رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

$$i(t) = I_0e^{-Rt/L} \qquad (۳)$$

جواب را با گذاشتن معادله (۳) در معادله (۱) و رسیدن به اتحاد $0 = 0$ چک کنید و سپس نشان دهید که جایگزینی $t = 0$ در معادله (۳)، $i(0) = I_0$ را نتیجه می‌دهد. هر دو مرحله الزامی‌اند، جواب هم باید در معادله دیفرانسیل صدق کند و هم شرایط اولیه را تأیید نماید.



شکل ۲ـ۸ یک مدار ساده RL که در آن انرژی در القاگر در $t = 0$ ذخیره شده است.

مثال ۱ـ۸

اگر القاگر شکل ۲ـ۸ دارای جریان $i_L = 2$ A در زمان $t = 0$ باشد، عبارتی برای $i_L(t)$ معتبر در $t > 0$ بیابید و مقدار آن را در $t = 200\ \mu s$ پیدا کنید.

این مشابه با مداری است که در قسمت‌های قبل بررسی شد، بنابراین انتظار داریم که جریان القاگر چنین باشد:

$$i_L(t) = I_0e^{-R/L\,t}$$

که $R = 200\ \Omega$، $L = 50$ mL و I_0 مقدار اولیه جریان در القاگر در $t = 0$ است. پس:

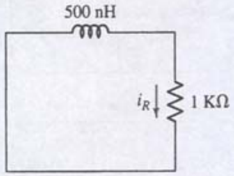
$$i_L(t) = 2e^{-4000t}$$

با جایگزینی $t = 200 \times 10^{-6}$ s داریم $i_L(t) = 898.7$ mA که کمتر از نصف مقدار اولیه می‌باشد.

تمرین

۱ـ۸ اگر $i_R(0) = 6$ A باشد جریان i_R را در داخل مقاومت شکل ۳ـ۸ در $t = 1$ ns به دست آورید.

جواب: 812 mA



شکل ۳ـ۸ مدار تمرین ۱ـ۸

روندی دیگر

حل را می‌توان با روشی که کمی با روش بالا تفاوت دارد نیز به‌دست‌آورد. پس از تفکیک متغیرها، می‌توان از طرفین معادله (۲) انتگرال نامعین گرفت و یک ثابت انتگرال‌گیری هم وارد حل کرد. بنابراین:

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L}dt + K$$

که نتیجه می‌شود:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \qquad (۴)$$

از جایگزینی معادله (۴) در معادله دیفرانسیل اولیه (۱) نمی‌توان ثابت K را مشخص کرد. البته اتحاد $0 = 0$ حاصل می‌گردد زیرا معادله (۴) حل معادله (۱) در قبال هر مقداری از K است. ثابت انتگرال باید مقدار اولیه $i(0) = I_0$ را تأیید نماید. بنابراین در $t = 0$ معادله (۴) برابر است با:

$$\ln I_0 = K$$

این مقدار K را در معادله (۴) قرار می‌دهیم تا پاسخ مطلوب به‌دست‌آید:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

یا

$$i(t) = I_0e^{-Rt/L}$$

که مثل قبل است.

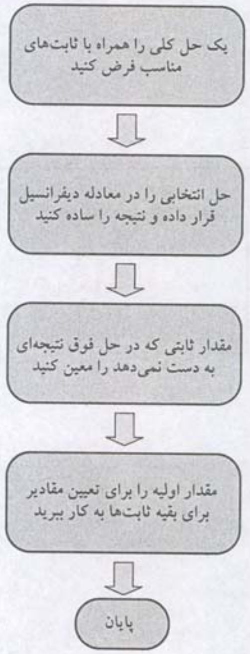
روند کلی‌تر حل

هنگامی‌که متغیرها تفکیک‌پذیر باشند هر یک از روش‌های فوق قابل استفاده‌اند، ولی همواره چنین نیست. در ادامه بحث، ما بر روشی قویتر تکیه خواهیم کرد که موفقیت در آن به بصیرت و تجربه ما وابسته است. در این روش جوابی را حدس می‌زنیم یا فرض می‌کنیم، سپس آن را در معادله دیفرانسیل می‌گذاریم و آنگاه فرضیات را تست می‌نماییم و این کار را با جایگزینی فرض در معادله دیفرانسیل بعد با اعمال مقادیر اولیه انجام می‌دهیم. چون انتظار نمی‌رود که عبارت عددی دقیقی را برای حل حدس بزنیم حل را حاوی چندین ثابت نامعلوم و انتخاب مقدار برای این ثابت‌ها انتخاب می‌نماییم، تا در معادله دیفرانسیل صدق کرده و مقدار اولیه را تأیید کند. حل بسیاری از معادلات دیفرانسیلی که ما با آن‌ها مواجهیم با تابعی نمایی یا مجموعی از توابع نمایی نشان داده می‌شود. بیایید حل معادله (۱) را با فرم نمایی زیر نشان دهیم:

$$i(t) = Ae^{s_1t} \qquad (۵)$$

که A و s_1 ثابت‌هایی هستند که باید معین شوند. پس از جایگزینی این حل مفروض در معادله (۱) داریم:

$$As_1e^{s_1t} + A\frac{R}{L}e^{s_1t} = 0$$



شکل ۸ـ۴ فلوچارت برای روش کلی. برای حل معادلات مرتبه اول، مبتنی بر تجربه، می‌توان فرم حل را حدس زد.

یا

$$(s_1 + \frac{R}{L})\, Ae^{s_1 t} = 0 \qquad (۶)$$

برای صحت این معادله در همه زمان‌ها، لازم است $A = 0$ یا $s_1 = -\infty$، یا $s_1 = -\frac{R}{L}$ باشد و اما اگر $A = 0$ یا $s_1 = -\infty$ باشد، آن‌گاه پاسخ همیشه صفر است، که نمی‌تواند حل مسئله ما باشد. بنابراین باید جواب زیر را انتخاب کنیم:

$$s_1 = -\frac{R}{L} \qquad (۷)$$

و حل مربوط به شکل زیر خواهد بود:

$$i(t) = Ae^{-Rt/L}$$

ثابت باقیمانده باید با اعمال مقدار اولیه $i(0) = I_0$ به‌دست‌آید. بنابراین $A = I_0$ شده و فرم نهایی حل موردنظر مجدداً مطابق زیر است:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

خلاصه‌ای از روش اصلی در شکل ۸ـ۴ ارائه شده است.

در واقع راه مستقیم‌تری برای انتخاب وجود دارد. با معادله (۷) داریم:

$$s_1 + \frac{R}{L} = 0 \qquad (۸)$$

که به معادله مشخصه معروف است. ما می‌توانیم معادله مشخصه را مستقیماً از معادله دیفرانسیل به دست آوریم بدون آن‌که به جایگزینی حل فرضی در معادله نیاز باشد. معادله دیفرانسیل زیر را درنظربگیرید:

$$a\frac{df}{dt} + bf = 0$$

که a و b مقادیر ثابت‌اند. ما s^1 را به جای $\frac{df}{dt}$ و s^0 را به جای f به کار می‌بریم که نتیجه چنین است:

$$a\frac{df}{dt} + bf = (as + b)f = 0$$

از این رابطه مستقیماً معادله مشخصه را به دست می‌آوریم:

$$as + b = 0$$

که یک ریشه در $s = -\frac{b}{a}$ دارد. آن‌گاه حل معادله دیفرانسیل چنین خواهد شد:

$$f = Ae^{-bt/a}$$

این روش ساده به راحتی به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل توسعه است، و ما آن را در فصل ۹ خواهیم دید.

مثال ۸ـ۲

برای مدار شکل ۸ـ۵ (الف)، جریان داخل القاگر 5H را در t = 200ms بیابید.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

شماتیک شکل ۸ـ۵ (الف) در واقع دو مدار مختلف را نشان می‌دهد: یکی با کلید بسته و دیگری با کلید باز. برای اجرای تحلیل، لازم است تا دو مدار طبق شکل‌های ۸ـ۵ (ب) و (ج) ترسیم شود. می‌خواهیم جریان i_L را طبق شکل ۸ـ۵ (ج) در t = 200ms بیابیم.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

هرگاه مدار را ترسیم کردیم، باید مطمئن شویم که کار را صحیح انجام داده‌ایم. ما مقادیر عناصر و جریان i را روی هر مدار به دقت مشخص کرده‌ایم. باید فرض کنیم که مدار

شکل ۸ـ۵ (ب) مدت‌ها به همین فرم وصل بوده و هر تأثیرگذاری حاصل از منبع 24V که هنگام روشن‌شدن وجود دارد، مدت‌ها است که از بین رفته است.

- **ارائه طرح.**

با نوشتن معادله KVL می‌توان شکل ۸ـ۵ (ج) را تحلیل کرد. نهایتاً ما معادله دیفرانسیلی می‌خواهیم با v و t به عنوان متغیر؛ این خود معادلاتی اضافی همراه با جایگزینی‌ها را لازم دارد. آن‌گاه معادله را برای $v(t)$ حل می‌کنیم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

با مراجعه به شکل ۸ـ۵ (ج) می‌توان نوشت:

$$-v + 10i_L + 5\frac{di_L}{dt} = 0$$

از جایگزینی $i_L = -v/40$ داریم:

$$\frac{5}{40}\frac{dv}{dt} + (\frac{10}{40} + 1)\,v = 0$$

یا ساده‌تر

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0 \qquad (۹)$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

با توجه به تجربه قبلی می‌دانیم که یک عبارت کامل برای v نیاز به شناخت v در یک لحظه خاص از زمان دارد که $t = 0$ بهترین آن است. ما می‌توانیم به شکل ۸ـ۵ (ب) نگاه کرده و $v(0) = 24$ را بنویسیم، ولی این فقط برای قبل از بازشدن سوئیچ صحیح است. ولتاژ مقاومت در لحظه تعویض وضعیت کلید هر چیزی می‌تواند باشد و تنها چیزی که تغییر نمی‌کند جریان القاگر است.

در مدار شکل ۸ـ۵ (ب) $i_L = \frac{24}{10} = 2.4$ A است، زیرا القاگر مثل یک اتصال کوتاه به یک جریان dc عمل می‌کند. بنابراین $i_L(0) = 2.4$ A در مدار شکل ۸ـ۵ (ج) خواهد بود ـ که نقطه کلیدی در تحلیل این نوع مدار است. بنابراین در مدار شکل ۸ـ۵ (ج) $v(0) = (40)(-2.4) = -9.6$ V است.

- **اقدام به حل.**

هر یک از سه روش حل را می‌توان انتخاب کرد. بر اساس تجربه، اجازه بدهید با نوشتن معادله مشخصه متعلق به معادله (۹) شروع کنیم:

$$s + 10 = 0$$

با حل آن داریم $s = -10$، یا

$$v(t) = Ae^{-10t} \qquad (۱۰)$$

که پس از جایگزینی در سمت چپ معادله (۹) داریم:

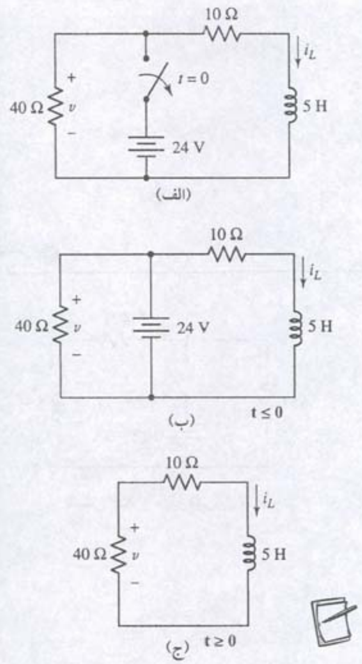
$$-10Ae^{-10t} + 10Ae^{-10t} = 0$$

(که انتظار آن را داریم).

ما A را با $t = 0$ در معادله (۱۰) و این‌که $v(0) = -96$ V است، به دست می‌آوریم. بنابراین:

$$v(t) = -96e^{-10t} \qquad (۱۱)$$

و بنابراین $v(0.2) = -12.99$ V می‌باشد که از -96 V به آن رسیده است.



شکل ۸ـ۵ (الف) یک مدار ساده RL که در $t = 0$ سوئیچ در آن باز شده است. (ب) مدار قبل از $t = 0$ و (ج) مدار پس از قطع کلید.

■ **صحت حل را تحقیق کنید.**

ما می‌توانیم جریان القاگر را با توجه به این حقیقت که القاگر مقاومتی 50 Ω را در شکل ۸ـ۵(ج) دارد، ببینیم. بنابراین یک ثابت زمانی $\tau = 50/5 = 10$ s را خواهیم داشت.

اکنون با توجه به این‌که $i_L(0) = 2.4$ A است می‌توان نوشت:

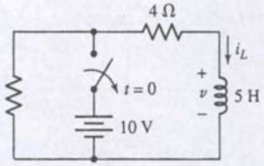
$$i_L(t) = 2.4e^{-10t} A \qquad t > 0$$

از قانون اهم $v(t) = -40i_L(t) = -96e^{-10t}$ خواهد شد که همان معادله (۱۱) را داریم. این یک اتفاق نیست که جریان القاگر و ولتاژ مقاومت دارای وابستگی نمایی یکسانی هستند.

تمرین

۸ـ۲ ولتاژ القاگر v را در مدار شکل ۸ـ۶ برای $t > 0$ معین کنید.

پاسخ: $-25e^{-2t}$V.



شکل ۸ـ۶ مدار تمرین ۸ـ۲

محاسبه انرژی

قبل از این‌که به تفسیر پاسخ بپردازیم، بگذارید به شکل ۸ـ۱ برگردیم و رابطه توان و انرژی را در این مدار چک کنیم. توان تلف‌شده در مقاومت برابر است با:

$$p_R = i^2R = I_0^2 R e^{-2Rt/L}$$

و انرژی کل تبدیل‌شده در مقاومت به گرما با انتگرال توان از لحظه صفر تا زمان معین حاصل می‌گردد:

$$w_R = \int_0^\infty p_R \, dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L} \, dt$$

$$= I_0^2 R \left(\frac{-L}{2R}\right) e^{-2Rt/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^2$$

این جوابی است که انتظار آن را داریم، زیرا انرژی کل ذخیره‌شده اولیه در القاگر $\frac{1}{2} L I_0^2$ است و پس از گذشت زمان طولانی هیچ انرژی در القاگر باقی نمی‌ماند. بنابراین تمام انرژی اولیه در مقاومت مصرف خواهد شد.

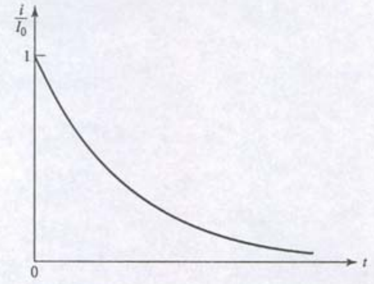
۸ـ۲ خواص پاسخ نمایی

اکنون بیایید طبیعت پاسخ را در مدار RL سری ملاحظه کنیم. دیدیم که جریان القاگر فرم زیر را دارد:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

در $t = 0$، جریان مقدار I_0 را داراست، ولی با گذشت زمان، جریان به صفر کاهش می‌یابد. این کاهش نمایی با رسم $i(t)/I_0$ در برابر t در شکل ۸ـ۷ نشان داده شده است. چون تابع ترسیمی $e^{-Rt/L}$ است، اگر R/L بدون تغییر باشد منحنی تغییر نخواهد کرد، بنابراین برای هر مدار RL سری که نسبت R/L یا L/R ثابتی داشته باشد، منحنی یکسانی به‌دست خواهد آمد. بگذارید نشان دهیم که چگونه این کسر روی شکل منحنی تأثیر می‌گذارد.

اگر نسبت L به R را دو برابر کنیم، و اگر t نیز دوبرابر شود، آنگاه نما تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر پاسخ اصلی در مدت طولانی‌تری رخ می‌دهد و در منحنی جدید باید هر نقطه منحنی قبل را به اندازه دوبرابر فاصله تا محور عمودی به سمت راست ببریم، با این نسبت بزرگ‌تر L/R، جریان زمان بیشتری را لازم خواهد داشت تا به کسری از مقدار اولیه خود برسد. دلمان می‌خواهد بگوییم که عرض منحنی زیاد شده است یا این‌که عرض متناسب با L/R است. با این وجود طرح تعریف عرض مشکل است زیرا هر منحنی از $t = 0$ تا بی‌نهایت طول می‌کشد! به‌جای این‌کار زمان لازم برای رسیدن جریان به صفر را اگر با همان آهنگ اولیه کاهش یابد، به‌دست می‌آوریم.



شکل ۸ـ۷ نمودار $e^{-Rt/L}$ برحسب t.

آهنگ اولیه کاهش جریان را با ارزیابی مشتق در زمان صفر به‌دست‌می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\frac{i}{I_0}\Big|_{t=0} = -\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\Big|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

زمان لازم برای این‌که i/I_0 با آهنگ کاهش ثابت، از 1 به صفر برسد را با حرف یونانی τ نشان می‌دهیم. به‌این‌ترتیب:

$$\left(\frac{R}{L}\right)\tau = 1$$

یا

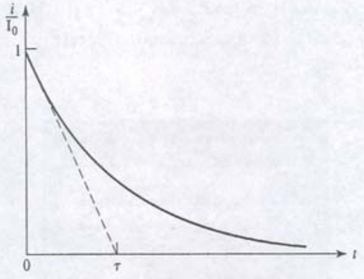
$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (12)$$

کسر L/R دارای واحد ثانیه است زیرا $-Rt/L$ باید بدون بعد باشد. این زمان τ را ثابت زمانی می‌نامند و در شکل ۸ـ۸ به تصویر کشیده شده است. ثابت زمانی یک مدار RL سری را می‌توان به‌طور گرافیکی از منحنی پاسخ هم به‌دست‌آورد. برای این‌کار فقط کافی است که خط مماس را بر منحنی در $t = 0$ رسم کرده و محل تقاطع آن با محور زمان را به‌دست‌آوریم. معمولاً این بهترین راه به‌دست‌آوردن ثابت زمانی تقریبی از صفحه‌نمایش اسیلوسکپ است.

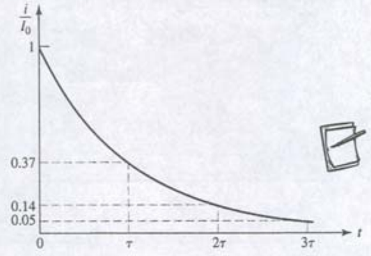
تعبیر هم‌ارزشی از ثابت زمانی τ را می‌توان از $i(t)/I_0$ در $t = \tau$ به‌دست‌آورد. داریم:

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.3679 \quad \text{یا} \quad i(\tau) = 0.3679\, I_0$$

بنابراین در یک ثابت زمانی، پاسخ به 36.8% مقدار اولیه‌اش افت می‌کند. τ را می‌توان با استفاده از این تعبیر هم طبق شکل ۸ـ۹ به‌دست‌آورد. بهتر است افت جریان را در فواصل یک ثابت زمانی اندازه بگیریم. با مراجعه به یک ماشین حساب یا جدول نماهای منفی می‌بینیم که نسبت $i(t)/I_0$ در $t = \tau$ برابر است با 0.3679، در $t = 2\tau$ برابر 0.1353 و در $t = 3\tau$ برابر است با 0.04979، در $t = 4\tau$ برابر 0.01832 و در $t = 5\tau$ هم 0.006738 است. اغلب قبول داریم در زمانی بین 3 الی 5 ثابت زمانی جریان به کسر کوچکی از مقدار اولیه‌اش می‌رسد. بنابراین سوال ممکن است چنین باشد "چقدر طول می‌کشد تا جریان به صفر برسد؟" پاسخ شاید چنین باشد، "حدود پنج ثابت زمانی". در این‌جا جریان حدود 1% مقدار اولیه‌اش خواهد بود.



شکل ۸ـ۸ ثابت زمانی τ برای مدار RL سری، L/R است و آن زمانی است که طی آن اگر نمودار با همان آهنگ کاهش اولیه نزول کند، مقدار به صفر می‌رسد.



شکل ۸ـ۹ جریان در مدار سری RL در زمان τ، 2τ و 3τ به ترتیب 37، 14 و 5 درصد مقدار اولیه خود را دارد.

تمرین

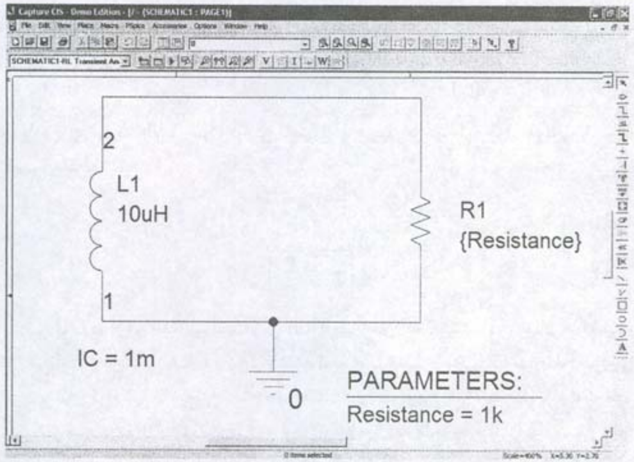
۸ـ۳ در یک مدار بدون منبع RL سری، مقدار عددی کسرهای زیر را به‌دست‌آورید:
(الف) $i(2\tau)/i(\tau)$، (ب) $i(0.5\tau)/i(0)$، (ج) t/τ اگر $i(t)/i(0) = 0.2$ باشد، (د) t/τ اگر $i(0) - i(t) = i(0)\ln 2$ باشد.

جواب: 0.368، 0.607، 1.609 و 1.181.

تحلیل کامپیوتری

توانمندی تحلیل گذرای PSpice هنگام توصیف مدارهای بدون منبع بسیار مفید است. در این مثال، از امکان خاصی استفاده می‌کنیم که به ما اجازه می‌دهد تا پارامتر قطعه را مثل تغییر ولتاژ dc در دیگر شبیه‌سازی‌ها تغییر دهیم. به این منظور عنصر PARAM را به شماتیک می‌افزاییم. ما آن را در هر جایی قرار می‌دهیم ولی به مدار وصل نمی‌کنیم. مدار کامل RL در شکل ۸ـ۱۰ نشان داده شده است، که شامل جریان اولیه 1mA در القاگر است.

برای این‌که مقدار مقاومت را به پارامتر مرتبط سازیم، باید دو کار انجام دهیم. ابتدا این‌که اسمی برای پارامتر خود انتخاب کنیم، که ما آن را به خاطر سادگی "مقاومت" می‌خوانیم. این کار با دو بار کلیک بر روی :PARAMETERS صورت می‌گیرد، یعنی برچسبی در شماتیک که Property Editor را برای این شبه‌قطعه باز می‌کند. کلیک بر روی New Column سبب

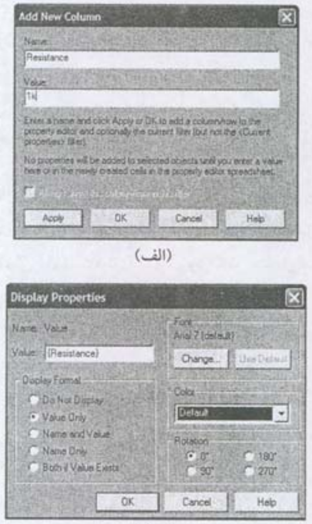


شکل ۸ـ۱۰ مدار RL ساده‌ای که با استفاده از ابزار Schematic Capture طراحی شده است.

می‌شود تا کادر محاوره شکل ۸ـ۱۱(الف) به دست آید، که ما مقاومت را تحت Name وارد می‌کنیم و یک مقدار 1 k را در Value قرار می‌دهیم. کار دوم ما متشکل از ارتباط مقاومت R_1 در Parameter Sweep است، که با دو کلیک روی مقدار پیش‌فرض R_1 در شماتیک انجام شده و کادر محاوره شکل ۸ـ۱۱(ب) به دست می‌آید. تحت Value، فقط {Resistance} را وارد می‌نماییم (دقت کنید که کروشه لازم است).

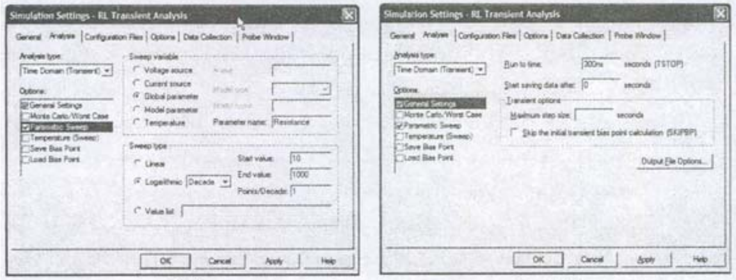
وظیفه سوم ما متشکل از برپایی شبیه‌سازی است که شامل تنظیم پارامترهای تحلیل گذرا و نیز مقادیر موردنظر R_1 است. تحت PSpice، New Simulation Profile را انتخاب می‌کنیم (شکل ۸ـ۱۲(الف))، که در آن Time Domain (Transient) برای Analysis type، 300 ns برای Run to time انتخاب می‌شود و Parametric Sweep box در زیر Options تیک می‌خورد. این آخرین عمل کادر محاوره (جعبه دیالوگ) شکل ۸ـ۱۲(ب) را به دست می‌دهد و ما Global parameter را برای Sweep variable انتخاب و Resistance را برای Parameter name وارد می‌کنیم. آخرین گام در تنظیم لازم دارد تا Logarithmic را در زیر Sweep type برگزینیم، Start value را 10 بدهیم، مقدار 1000 را به End value تخصیص دهیم و نیز Points/Decade هم 1 باشد. به همین ترتیب می‌توانیم مقادیر مقاومت موردنظر را با استفاده از Value list لیست کنیم.

پس از اجرای شبیه‌سازی جعبه محاوره شکل ۸ـ۱۳ ظاهر می‌گردد که مجموعه داده‌های مختلف را برای ترسیم در اختیار می‌گذارد (در این مسئله مقادیر مقاومت 10، 100 و 1000). ما همه مجموعه را انتخاب خواهیم کرد. خروجی در شکل ۸ـ۱۴ دیده می‌شود.



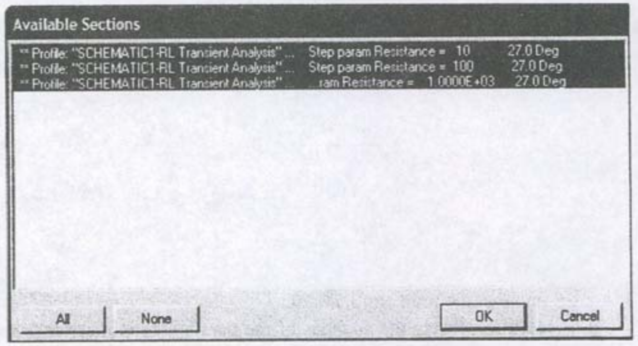
(الف) (ب)

شکل ۸ـ۱۱ (الف) کادر محاوره New Column را در Property Editor برای PARAM اضافه کنید. (ب) کادر محاوره مقادیر مقاومت.



(ب) (الف)

شکل ۸ـ۱۲ (الف) کادر محاوره شبیه‌سازی. (ب) کادر محاوره Parameter sweep.

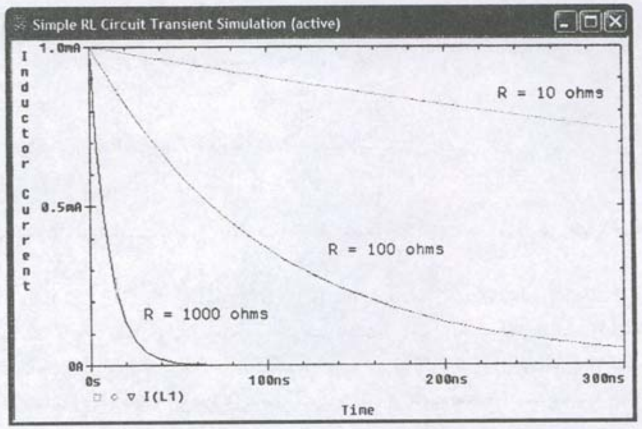


شکل ۸ـ۱۳ جعبهٔ محاوره بخش‌های داده.

چرا با مقادیر بزرگ‌تر L/R، منحنی پاسخ افول آهسته‌تری را دارد؟ اجازه بدهید تا تأثیر هر عنصر را ببینیم. پاسخ مدار RL سری برحسب ثابت زمانی τ فرم زیر را دارد:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

افزایشی در L امکان ذخیره انرژی بیشتری را با جریان اولیه یکسان به ما می‌دهد و زمان بیشتری طول می‌کشد تا این انرژی در مقاومت مصرف شود. با کاهش R هم می‌توان نسبت L/R را افزایش داد. در این حالت، توان انتقالی به مقاومت برای جریان اولیه یکسان بیشتر است. مجدداً زمان بیشتری برای مصرف انرژی ذخیره شده لازم است. این اثر به وضوح در نتیجه شبیه‌سازی ما در شکل ۸ـ۱۴ قابل ملاحظه است.



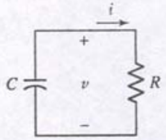
شکل ۸ـ۱۴ خروجی probe برای سه مقاومت مختلف.

۸ـ۳ مدار RC بدون منبع

مدارهای مبتنی بر ترکیب مقاومت ـ خازن رایج‌تر از نوع مشابه مقاومت ـ القاگر می‌باشند. دلیل اصلی این توجه، اتلاف کمتر انرژی در خازن واقعی، قیمت پایین‌تر، شباهت نزدیک‌تر مدل ریاضی و قطعه فیزیکی و نیز ابعاد کوچک‌تر و سبکی می‌باشند که هر دو آن‌ها در کاربردهای مدار مجتمع مورد استفاده‌اند.

بگذارید ببینیم که تحلیل مدار RC موازی شکل ۸ـ۱۵ چه‌قدر با مدار RL شباهت دارد. با انتخاب رابطه زیر انرژی اولیه ذخیره‌شده‌ای را در خازن فرض می‌کنیم:

$$v(0) = V_0$$



شکل ۸ـ۱۵ مدار RC موازی که $v(t)$ آن باید با شرط اولیهٔ $v(0) = V_0$ به‌دست آید.

جریان کل خارج‌شده از گره بالایی مدار باید صفر باشد، پس چنین می‌توان نوشت:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

با تقسیم بر C داریم:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \qquad (13)$$

معادله (۱۳) فرم آشنایی دارد، مقایسه با معادله (۱):

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (1)$$

نشان می‌دهد که از جایگزینی i با v و L/R با RC، همان معادله قبلی به‌دست‌می‌آید. اکنون ما مدار RC یعنی مدار دوگان RL را که قبلاً ملاحظه کردیم، تحلیل می‌کنیم. به علت این دوگانگی $v(t)$ از RC و $i(t)$ از RL عبارات یکسانی دارند. به‌شرطی‌که مقاومت یکی با رسانایی مدار دیگر و L با C از لحاظ عددی برابر باشند. بنابراین پاسخ مدار RL چنین است:

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0e^{-Rt/L}$$

که می‌توانیم بلافاصله برای مدار RC چنین بنویسیم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0e^{-t/RC} \qquad (14)$$

در این‌جا تصور کنید که به عنوان مجهول جریان i را در مدار RC به‌جای v انتخاب کرده‌ایم. با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v(t_0) + Ri = 0$$

که در این حالت برخلاف دیفرانسیل، یک معادله انتگرال به‌دست‌آورده‌ایم. در هر صورت با مشتق‌گیری از هر دو طرف معادله نسبت به زمان داریم:

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \qquad (15)$$

از جایگزینی i با v/R، مجدداً معادله (۷) را خواهیم داشت:

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

معادله (۱۵) می‌توانست به‌عنوان نقطه شروع تلقی شود، ولی دراین حال دوگانگی چهره خود را نشان نمی‌داد.

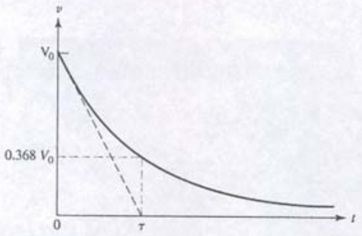
بیایید طبیعت فیزیکی پاسخ ولتاژ مدار RC را که با معادله (۱۴) بیان شده مورد بحث قرار دهیم. در $t = 0$ مقدار اولیه صحیحی را خواهیم داشت و با میل t به سمت بی‌نهایت، ولتاژ به سمت صفر میل می‌کند. نتیجه اخیر با تفکر ما مبنی بر این‌که اگر ولتاژی روی خازن باشد به مقاومت انرژی می‌دهد و این انرژی به صورت گرما تلف می‌شود، صحیح است. پس باید ولتاژ نهایی صفر شود. ثابت زمانی RC را با اعمال دوگانگی روی RL می‌توان به‌دست‌آورد و یا ببینیم چه موقعی مقدار پاسخ به 36.8% مقدار اولیه آن می‌رسد:

$$\frac{\tau}{RC} = 1$$

و بنابراین:

$$\boxed{\tau = RC} \qquad (16)$$

به‌دلیل آشنایی با نمای منفی و اهمیت ثابت زمانی τ می‌توانیم منحنی پاسخ را به راحتی بکشیم (شکل ۸ـ۱۶). مقادیر بزرگ R و یا C ثابت‌های زمانی بزرگتر و لذا اتلاف انرژی ذخیره‌شده طولانی‌تری را سبب‌می‌شوند. مقاومت بزرگ‌تر توان کمتری را با ولتاژ دو سرش

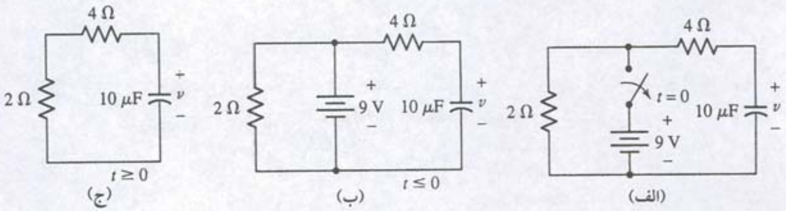


شکل ۸ـ۱۶ منحنی ولتاژ $v(t)$ خازن در یک مدار RC موازی برحسب زمان. مقدار اولیهٔ $v(t)$، V_0 است.

مصرف‌می‌کند و بنابراین به زمان بیشتری برای مصرف و تبدیل انرژی ذخیره‌شده به گرما نیازداریم، و باز هم می‌بینیم که برای از دست‌دادن انرژی اولیه زمان طولانی‌تری لازم است.

مثال ۸ـ۳

برای مدار شکل ۸ـ۱۷ (الف) ولتاژ v را در $t = 200\ \mu s$ بیابید.



شکل ۸ـ۱۷ (الف) مدار ساده RC که کلید در لحظه $t = 0$ پرتاب شده است. (ب) مدار آنطوری که در $t = 0$ وجود دارد. (ج) مدار پس از پرتاب سوئیچ و حذف منبع 9 V.

برای یافتن ولتاژ مورد تقاضا ما باید دو مدار را رسم کرده و تحلیل کنیم: یکی مربوط به قبل از پرتاب سوئیچ (شکل ۸ـ۱۷(ب)) و دیگری پس از پرتاب آن (شکل ۸ـ۱۷(ج)).

هدف اصلی تحلیل مدار شکل ۸ـ۱۷ (ب) تهیه ولتاژ اولیه خازن است؛ ما فرض می‌کنیم هر دوران گذرایی مدت‌ها قبل از بین رفته است، و لذا یک مدار dc محض باقی مانده است.

بدون وجود جریان در خازن یا مقاومت 4 Ω، داریم:

$$v(0) = 9\ V \qquad (17)$$

آن‌گاه توجه خود را به مدار شکل ۸ـ۱۷(ج) معطوف می‌نماییم که داریم:

$$\tau = RC = (2 + 4)(10 \times 10^{-6}) = 60 \times 10^{-6}\ s$$

بنابراین از معادله (۱۴) داریم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = v(0)e^{-t/60 \times 10^{-6}} \qquad (18)$$

ولتاژ خازن باید در $t = 0$ در هر دو مدار یکسان باشد. چنین قیدی در هیچ جای دیگر برای ولتاژ یا جریان وجود ندارد. از جایگزینی معادله (۱۷) در معادله (۱۸) داریم:

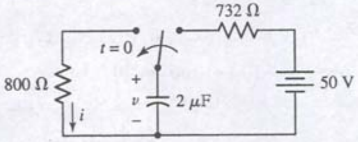
$$v(t) = 9e^{-t/60 \times 10^{-6}}V$$

بنابراین $v(200 \times 10^{-6}) = 321.1\ mV$ است (4%کمتر از حداکثر مقدار).

تمرین

۸ـ۴ برای مدار شکل ۸ـ۱۸، $v(0)$ و $v(2ms)$ را بیابید. در حل این مسئله باید دو مدار متفاوت ترسیم گردد که یکی مربوط به قبل از بازشدن و دیگری مربوط به بعد از بازشدن کلید مربوطه است. ولتاژ خازن در $t = 0$ باید در هر دو مدار یکسان باشد.

جواب: 50V و 14.33V.



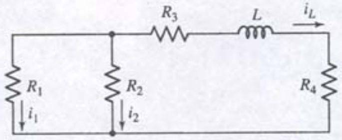
شکل ۸ـ۱۸

۸ـ۴ تعمیم دیدگاه

همان‌طورکه به وسیله مثال‌های ۸ـ۲ و ۸ـ۳ دیدیم تعمیم نتایج حاصل برای مدار RL به مداری حاوی چند مقاومت و القاگر چندان مشکل نیست. به همین ترتیب می‌توان نتایج را برای مدار RC با تعدادی خازن و مقاومت عمومیت داد. حتی می‌توان مطلب را برای مدارهای حاوی منابع وابسته هم تعمیم داد.

مدارهای RL کلی

در آغاز توجه خود را به دو پایانه القاگر معطوف کرده و مقاومت معادل دو سر این پایانه‌ها را به دست می‌آوریم. بنابراین مدار به حالت سری ساده کاهش می‌یابد. مدار شکل ۸ـ۱۹ را درنظر بگیرید.



شکل ۸ـ۱۹ این مدار بدون منبع، یک القاگر و چند مقاومت دارد. برای تحلیل مدار ثابت زمانی را به صورت $\tau = L/R_{eq}$ می‌یابیم.

مقاومت معادل همراه القاگر چنین است:

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

و بنابراین ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \tag{۱۹}$$

ما می‌توانیم این رابطه را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}}$$

که R_{TH}، مقاومت معادل تونن از دید القاگر L است.

همچنین توجه داریم که اگر چندین القاگر در مداری وجود داشته باشد و قابل ترکیب سری یا موازی باشند، آنگاه معادله (۱۹) به صورت کلی‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \tag{۲۰}$$

که L_{eq}، القاکنایی معادل را نشان می‌دهد.

برش نازک: تفکیک میان 0^+ و 0^-

به شکل ۱۹ـ۸ بازمی‌گردیم و فرض می‌کنیم که مقدار معینی از انرژی در $t = 0$ در القاگر ذخیره شده باشد به نحوی که $i_L(0) \neq 0$ باشد.

جریان i القاگر عبارت‌است‌از:

$$i_L = i_L(0)\, e^{-t/\tau}$$

که به آن جواب اساسی مسئله می‌گوییم. کاملاً محتمل است که مقداری از ولتاژها یا جریان‌ها به‌جز i_L، مانند i_2 در R_2 را لازم داشته باشیم. می‌توان قوانین کیرشهف و اهم را برای بخش مقاومت مدار بدون هر مشکلی به‌کاربرد، ولی تقسیم جریان پاسخ سریع‌تری را در این مدار فراهم می‌سازد:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}\,[i_L(0)\, e^{-t/\tau}]$$

همچنین گاهی ممکن‌است مقدار اولیه جریانی به‌جز جریان القاگر را بدانیم. چون جریان در یک مقاومت آناً تغییر می‌کند، ما هر تغییری که بلافاصله پس از لحظه تغییر $t = 0$ رخ دهد را با 0^+ یا $i(0^+)$ نشان می‌دهیم که حد $i_1(t)$ در میل t به سمت صفر است. دقت کنید که این تنها یک قرارداد است. وقتی که در معادله‌ای با $t = 0^+$ مواجه می‌شویم، به جای آن‌ها مقدار صفر را می‌گذاریم. این علامت اجازه می‌دهد تا لحظه قبل و بعد از باز یا بسته‌شدن کلید و یا قطع و وصل انرژی را از یکدیگر تفکیک کنیم. بنابراین اگر مقدار اولیه i_1 به صورت $i_1(0^+)$ داده شده باشد، آن‌گاه مقدار اولیه i_2 برابر است با:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}$$

توجه کنید که $i_L(0^+)$ همیشه برابر با $i_L(0^-)$ است. این رابطه برای ولتاژ القاگر یا هر ولتاژ یا جریان مقاومت صحت ندارد، زیرا آن‌ها می‌توانند در مدت زمان صفر تغییر کنند.

با توجه به این مقادیر، مقدار اولیه $i_L(0)$ لازم (یا $i_L(0^-)$ یا $i_L(0^+)$) را به‌دست‌می‌آوریم:

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} + i_1(0^+)$$

و لذا عبارت i_2 چنین خواهد شد:

$$i_2 = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}\, e^{-t/\tau}$$

بگذارید ببینیم آیا می‌توان آخرین عبارت را مستقیم‌تر به‌دست‌آورد. چون جریان القاگر به صورت نمایی $e^{-t/\tau}$ کاهش می‌یابد، هر جریان در مدار باید رفتاری یکسان داشته باشد. این مطلب با بررسی جریان القاگر به‌عنوان منبع که به شبکه مقاومتی اعمال می‌شود، آشکارتر می‌گردد. هر جریان یا ولتاژ در شبکه مقاومتی باید وابستگی زمانی یکسانی را دارا باشد. با به‌کارگیری این ایده جریان i_2 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

که

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

است، مقدار A باید از مقدار اولیه i_2 به‌دست‌آید. چون $i_1(0^+)$ معلوم است ولتاژ دو سر R_1 و R_2 معلوم خواهد بود:

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

که به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}$$

بنابراین:

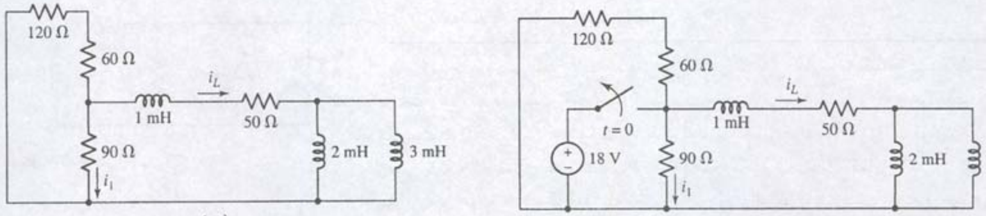
$$i_2 = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}\, e^{-t/\tau}$$

با طی گام‌های مشابهی می‌توان حل سریعی را برای بسیاری از مسائل فراهم نمود. ما ابتدا وابستگی زمانی پاسخ را به صورت نمایی میرا شناسایی می‌کنیم، با ترکیب مقاومت‌ها ثابت زمانی را معین می‌نماییم. حل را با دامنه مجهول می‌نویسیم و سپس دامنه را از مقدار اولیه مفروض به‌دست‌می‌آوریم.

تکنیک مشابهی را می‌توان به هر مدار با یک القاگر و هر تعداد مقاومت و نیز دو و یا چند القاگر اعمال کرد و در آن‌ها القاگرها و مقاومت‌ها را به فرم ساده یک القاگر و یک مقاومت درآورد.

مثال ۴ـ۸

در مدار شکل ۲۰ـ۸ (الف)، i_1 و i_L را معین کنید.



شکل ۲۰ـ۸ (الف) مداری با چند مقاومت و چند القاگر. (ب) پس از $t = 0$ مدار به یک مقاومت 110Ω سری با $L_{eq} = 2.2mH$ کاهش می‌یابد.

پس از $t = 0$، که در آن طبق شکل ۲۰ـ۸ (ب) منبع ولتاژ قطع می‌شود به سادگی القاگر معادل محاسبه می‌گردد.

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2.2mH$$

و مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{90(60 + 120)}{90 + 180} + 50 = 110\Omega$$

و ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu s$$

بنابراین فرم پاسخ طبیعی $Ke^{-50.000t}$ می‌باشد و K مقداری ثابت است. با ملاحظه مدار قبل از بازشدن سوئیچ ($t = 0^-$)، $i_L = 18/50\ A$ می‌باشد. چون $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ است، می‌دانیم که $i_L = 18/50\ A$ یا $360\ mA$ در $t = 0^+$ است و لذا:

$$i_L = \begin{cases} 360 \text{ mA} & (t < 0) \\ 360e^{-50.000t} \text{ mA} & (t \ge 0) \end{cases}$$

قیدی برای تغییر آنی i_1 در $t = 0$ وجود ندارد بنابراین مقدار آن در $t = 0^-$ (200 mA یا 18/90 A) مناسب برای یافتن i_1 در $t > 0$ نیست، در عوض باید $i_1(0^+)$ را بر اساس اطلاعمان از $i_L(0^+)$ پیدا کنیم. با به‌کارگیری روش تقسیم جریان خواهیم داشت:

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\,\frac{120 + 60}{120 + 60 + 90} = -240 \text{ mA}$$

از این‌رو:

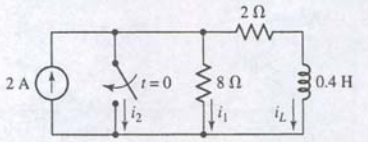
$$i_1 = \begin{cases} 200 \text{ mA} & (t < 0) \\ -240e^{-50.000t} \text{ mA} & (t \ge 0) \end{cases}$$

ما می‌توانیم صحت تحلیل خود را با به‌کارگیری PSpice و مدل سوئیچ Sw-tOpen تحقیق کنیم. هرچند که این بخش در واقع دو مقاومت دارد: یکی متعلق به قبل از بازشدن کلید در زمان معین‌شده (مقدار پیش‌فرض 10 Ω است) و یکی پس از بازشدن کلید (مقدار پیش‌فرض 1 MΩ است). اگر مقاومت معادل باقیمانده مدار سازگار با هر کدام باشد مقادیر باید با دو بار کلیک روی سمبل سوئیچ در مدار شماتیک اصلاح شود. توجه کنید که مدل سوئیچی هم وجود دارد که در زمان خاص بسته می‌شود: یعنی Sw_tClose.

تمرین

۸ـ۵ در زمان $t = 0.15$، در شکل ۸ـ۲۱، مقدار (الف) i_L، (ب) i_1 و (ج) i_2 را به‌دست‌آورید.

جواب: 0.756 A، 0 و 1.244 A.



شکل ۸ـ۲۱

تا این‌جا ما روش یافتن پاسخ طبیعی هر مداری که قابل نمایش با یک القاگر معادل سری با یک مقاومت معادل است را ملاحظه کردیم. در حالت کلی مدارهایی را که چند القاگر و چند مقاومت دارند نمی‌توان به صورت بالا ساده کرد. پاسخ این‌گونه مدارها را نمی‌توان با یک ثابت زمانی یا یک تابع نمایی منفی نشان داد، بلکه پاسخ، مجموع چند تابع نمایی با نمای منفی است. در این مدارها تعداد القاگرهایی که بعد از ساده‌کردن القاگرها با ترکیب سری و موازی باقی می‌مانند تعداد جملات نمایی را معلوم می‌کند. ما این وضعیت را در فصل ۹ خواهیم دید.

مدارهای RC کلی

بسیاری از مدارهای RC که می‌خواهیم پاسخ طبیعی آن‌ها را بیابیم بیش از یک مقاومت و یک خازن دارند. همان‌طور که برای مدارهای RL مشاهده شد، ابتدا حالاتی را درنظر می‌گیریم که در آن‌ها مدار ممکن‌است به مدار معادلی متشکل از فقط یک مقاومت و یک خازن، کاهش یابد.

ابتدا تصور کنید با مداری که فقط یک خازن ولی چند مقاومت دارد مواجه هستیم. می‌توان شبکه مقاومتی دو پایانه دو سر خازن را با یک مقاومت معادل جایگزین کرد و سپس بلافاصله عبارتی برای ولتاژ خازن نوشت. در این گونه موارد مدار دارای یک ثابت زمانی موثر است که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\tau = R_{eq}C$$

که R_{eq} مقاومت معادل شبکه است. دیدگاه دیگر این‌است که R_{eq} در واقع مقاومت معادل تونن از دید خازن است.

اگر مدار بیش از یک خازن داشته باشد، ولی قابل جایگزینی به وسیله ترکیب سری / موازی‌اش باشد، C_{eq}، آنگاه مدار دارای ثابت زمانی موثر زیر است:

$$\tau = RC_{eq}$$

در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\tau = R_{eq}C_{eq}$$

با این وجود لازم به ذکر است که خازن‌های موازی جایگزین‌شده با معادل باید دارای مقادیر اولیه یکسان باشند.

مثال ۸ـ۵

برای مدار شکل ۸ـ۲۲ (الف) اگر $v(0^-) = V_0$ باشد، $v(0^+)$ و $i(0^+)$ را بیابید.

ابتدا مدار شکل ۸ـ۲۲ (الف) را به شکل ۸ـ۲۲ (ب) ساده می‌کنیم، پس می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C}$$

که

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \quad \text{و} \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}$$

هر جریان یا ولتاژی در بخش مقاومتی شبکه باید فرم $Ae^{-t/R_{eq}C}$ را داشته باشد، که در آن A مقدار اولیه جریان یا ولتاژ است. مثلاً جریان در R_1 را می‌توان چنین بیان کرد:

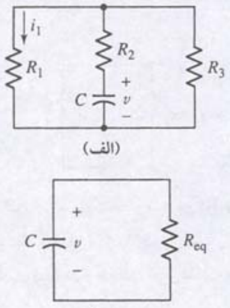
$$i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

که

$$\tau = \left(R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}\right) C$$

و $i_1(0^+)$ باقی می‌ماند تا از مقدار اولیه معین شود. هر جریانی که در $t = 0^+$ جریان یابد باید از خازن سرچشمه بگیرد. بنابراین چون v نمی‌تواند ناگهان عوض شود، $v(0^+) = v(0^-) = V_0$ و بنابراین:

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1R_3/(R_1 + R_3)}\,\frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

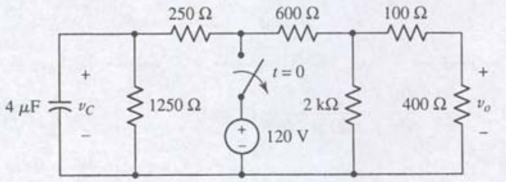


شکل ۸ـ۲۲ (الف) یک مدار شامل یک خازن و چند مقاومت. (ب) به‌جای مقاومت‌ها، مقاومت معادل را گذاشته‌ایم. اکنون به سادگی می‌توان ثابت زمانی را به‌دست‌آورد.

تمرین

۸ـ۶ مقادیر v_C، v_o را در شکل ۸ـ۲۳ برای (الف) $t = 0^-$، (ب) $t = 0^+$ و (ج) $t = 1.3\text{ms}$ به‌دست‌آورید.

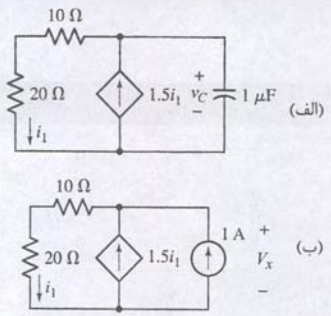
جواب: 100V، 38.4V، 100V، 25.6V، 59.5V و 15.22V.



شکل ۸ـ۲۳

روش ما می‌تواند به مدارهای حاوی یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی و یک یا چند منبع وابسته هم اعمال گردد. در این موارد، ما می‌توانیم یک معادله KCL یا KVL همراه با هر تعداد معادله پشتیبان بنویسیم و آن را به یک معادله دیفرانسیل تقلیل داده و معادله مشخصه را برای یافتن ثابت زمانی استخراج نماییم. به طریقی دیگر ممکن‌است با یافتن مقاومت معادل تونن شبکه متصل به خازن یا القاگر شروع کرده و آن را در محاسبه ثابت زمانی RL یا RC به کار ببریم ـ مگر این‌که منبع وابسته به وسیله ولتاژ یا جریان یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی کنترل گردد که در این حالت روش تونن قابل استفاده نیست. ما این مطلب را در مثال ۸ـ۶ می‌شکافیم.

مثال ۶ـ۸



شکل ۲۴ـ۸ (الف) یک مدار ساده RC حاوی یک منبع وابسته که با ولتاژ یا جریان خازن کنترل نشده است. (ب) مدار معادل تونن شبکه متصل به خازن.

برای مدار شکل ۲۴ـ۸ (الف) ولتاژ v_C را برای $t > 0$ حساب کنید به شرطی که $v_C(0^-) = 2$ V باشد.

منبع وابسته به وسیله جریان یا ولتاژ خازن کنترل نشده است، بنابراین می‌توانیم معادل تونن شبکه سمت چپ خازن را پیدا کنیم. با اتصال یک منبع مرجع 1 A به شکل ۲۴ـ۸(ب) داریم:

$$V_x = (1 + 1.5i_1)(30)$$

که

$$i_1 = \left(\frac{1}{20}\right)\frac{20}{10+20}V_x = \frac{V_x}{30}$$

با اجرای کمی عملیات جبری داریم $V_x = -60$ V، لذا شبکه دارای مقاومت معادل تونن $-60\ \Omega$ است (غیرعادی است ولی هنگام بررسی منبع وابسته غیرممکن نیست). لذا مدار دارای ثابت زمانی منفی خواهد بود:

$$\tau = -60(1 \times 10^{-6}) = -60\ \mu s$$

پس ولتاژ خازن برابر است با:

$$v_C(t) = Ae^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

که $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2$ V است. بنابراین:

$$\boxed{v_C(t) = 2e^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}} \qquad (۲۱)$$

که به قدر کافی ناپایدار است: این ولتاژ با زمان به‌طور نمایی رشد می‌کند. این حالت نمی‌تواند تا ابد ادامه یابد؛ یعنی یک یا چند عنصر در مدار بالاخره خراب خواهد شد.

به طریقی دیگر، ما می‌توانیم یک معادله KCL برای گره بالایی در شکل ۲۴ـ۸(الف) بنویسیم:

$$v_C = 30\left(1.5i_1 - 10^{-6}\frac{dv_C}{dt}\right) \qquad (۲۲)$$

که

$$i_1 = \frac{v_C}{30} \qquad (۲۳)$$

از جایگزینی معادله (۲۳) در معادله (۲۲) و کمی عملیات جبری داریم:

$$\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{60\times10^{-6}}v_C = 0$$

که معادله مشخصه زیر را دارد:

$$s - \frac{1}{60\times10^{-6}} = 0$$

بنابراین:

$$s = \frac{1}{60\times10^{-6}}$$

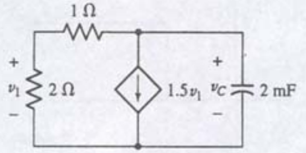
و لذا:

$$v_C(t) = Ae^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

که همان رابطه قبلی است. از جایگزینی $A = v_C(0^+) = 2$، معادله (۲۱) به دست می‌آید که عبارت ولتاژ خازن برای $t > 0$ است.

تمرین

۷ـ۸ (الف) با توجه به مدار شکل ۲۵ـ۸، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t > 0$ با $v_C(0^-) = 11$ V بیابید.
(ب) آیا مدار پایدار است.
جواب: (الف) $v_C(t) = 11e^{-2\times10^3t/3}$ V برای $t > 0$ و (ب) بله زیرا میرا است و با زمان رشد نمی‌کند.



شکل ۲۵ـ۸ مدار تمرین ۷ـ۸

بعضی از مدارهایی که دارای تعداد زیادی مقاومت و خازن هستند قابل جایگزینی با مداری هستند که فقط یک مقاومت و یک خازن دارد. لازمه این کار این است که مدار قابل تفکیک به دو بخش، یکی فقط شامل مقاومت و دیگری حاوی فقط خازن‌ها باشد. به نحوی که این دو بخش با دو سیم رابط ایده‌آل به هم وصل شوند. البته همیشه این‌طور نیست. بنابراین ثابت‌های زمانی متعددی برای توصیف مدار چند مقاومتی، چند خازنی، لازم است.

به‌عنوان پیشنهادی در جداسازی، باید محتاط بود که فقط عناصر ایده‌آل به یکدیگر وصل شوند. مثلاً می‌توان تصور کرد که دو خازن ایده‌آل سری با ولتاژ نابرابری در $t = 0$ به یکدیگر وصل گردند. معهذا این کار مشکلی را در مدل ریاضی خازن ایده‌آل به‌وجود می‌آورد، زیرا خازن‌های واقعی به همراه خود مقاومتی دارند که انرژی در آن‌ها تلف می‌شود.

۵ـ۸ تابع پله واحد

در مدارهای RL و RC مورد مطالعه ما هیچ منبع یا تابع تحریکی وجود نداشت. ما این پاسخ را **پاسخ طبیعی** نامیدیم، زیرا فرم آن فقط به طبیعت مدار وابسته است. به‌طورکلی دلیل آن وجود انرژی ذخیره‌شده در القاگر یا عناصر خازنی مدار است. در بعضی موارد با مدارهای متشکل از کلید و منابع مواجه هستیم و نیز دیدیم که برای حذف منابع از مدار باید اعمال سوئیچینگ صورت پذیرد و ضمن آن انرژی‌های ذخیره‌شده در این‌جا و آن‌جا باقی می‌ماندند. به بیان دیگر ما مسائلی را حل کردیم که در آن‌ها منابع انرژی ناگهان از مدار خارج می‌شوند. اکنون می‌خواهیم نوعی از پاسخ را که حاصل اعمال ناگهانی منابع به مدار است، ملاحظه نماییم.

در این بخش بر پاسخی توجه خواهیم داشت که از اعمال ناگهانی منابع dc حاصل می‌شود. چون هر وسیله الکتریکی حداقل یک بار تحریک می‌شود و نیز تقریباً همه وسایل در طول عمرشان به دفعات روشن و خاموش می‌شوند، مطالعه ما موارد عملی بسیاری را شامل می‌شود. گرچه ما در حال حاضر خود را به منابع dc محدود می‌کنیم ولی در موارد متعددی این مثال‌های ساده به عملکرد وسایل فیزیکی متعلقند. مثلاً اولین مثالی را که مطرح خواهیم کرد، مربوط به چگونگی ایجاد جریان هنگام روشن‌شدن یک موتور dc است. تولید و استفاده از پالس‌های ولتاژ مربعی برای نمایش یک عدد یا فرمان در یک کامپیوتر، مثال‌های دیگری را در الکترونیک و مدارهای ترانزیستوری دارد. مدارهای مشابهی در هم‌گام‌کردن و مدارهای جاروب گیرنده‌های تلویزیون، سیستم‌های مخابراتی که مدولاسیون را به‌کار می‌گیرند و در سیستم‌های رادار، مثال‌های اندکی از کاربرد این پالس‌هاست.

راجع‌به "کاربرد ناگهانی" یک منبع انرژی صحبت می‌کردیم و منظور ما از این عبارت این است که کاربرد در زمان صفر صورت می‌گیرد*. بنابراین عملکرد یک کلید سری با یک باطری معادل است با یک تابع تحریک که تا لحظه بسته‌شدن کلید صفر است و پس از آن با ولتاژ باطری برابر است. تابع تحریک در لحظه بسته‌شدن کلید شکست یا عدم پیوستگی دارد. توابع تحریک خاصی که شکست در تابع یا مشتقات خود دارند را توابع یگانه یا یکتا می‌نامند. دو تابع یکتای مهم عبارتند از تابع **پله واحد** و تابع **ضربه واحد**.

* البته در عمل چنین چیزی ممکن نیست. اگر زمان وقوع این واقعه در مقایسه با دیگر مقیاس‌های زمانی توصیف مدار کم باشد، این تقریب ریاضی بسیار مناسب است.

ما تابع تحریک پله واحد را به صورت تابعی از زمان تعریف می‌کنیم که برای همه زمان‌های کمتر از آرگومانش صفر بوده و در زمان‌های بزرگ‌تر مقدار آن مثبت است. اگر آرگومان $(t - t_0)$ و تابع پله واحد u باشد، آنگاه $u(t - t_0)$ برای همه مقادیر t کمتر از t_0 برابر صفر و برای همه مقادیر t بزرگ‌تر از t_0 برابر واحد است. در $t = t_0$، تابع $u(t - t_0)$ ناگهان از 0 به 1 تغییر پیدا می‌کند. مقدار آن در $t = t_0$ تعریف نشده است ولی در همه زمان‌های اختیاری نزدیک به $t = t_0$ مقدار آن معلوم است. ما اغلب مقدار آن را با $u(t_0^-) = 0$ و $u(t_0^+) = 1$ نشان می‌دهیم. تعریف ریاضی تابع واداشته پله واحد چنین است:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

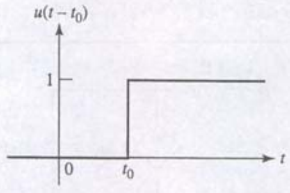
این تابع به صورت گرافیکی در شکل ۸ـ۲۶ نشان داده شده است. توجه کنید که یک خط عمودی به طول واحد در $t = t_0$ رسم شده است. گرچه این قسمت بخشی از تعریف پله واحد نیست، ولی معمولاً در شکل‌ها ترسیم می‌شود.

همچنین دقت کنید که تابع پله لزومی ندارد که تابعی از زمان باشد. مثلاً $u(x - x_0)$ را می‌توان برای تابع پله واحد به کاربرد و در آن x ممکن است فاصله به متر یا مثلاً فرکانس باشد.

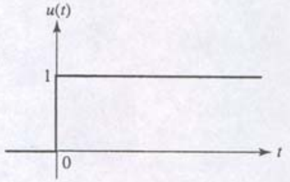
در بسیاری از موارد در تحلیل مدار در یک لحظه که آن را $t = 0$ می‌نامیم، عمل سوئیچینگ یا کلیدزنی رخ می‌دهد. دراین حال $t_0 = 0$ و بنابراین تابع تحریک پله واحد با $u(t - 0)$ یا ساده‌تر، $u(t)$، نشان داده می‌شود. این تابع در شکل ۸ـ۲۷ نشان داده شده است. بنابراین:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

تابع پله واحد خود بدون بعد است. اگر بخواهیم آن را برای ولتاژ به کار ببریم باید $u(t - t_0)$ را در ولتاژ ثابتی مثلاً 5V ضرب کنیم. بنابراین $u(t) = 5u(t - 0.2)V$ منبع ولتاژی است که قبل از $t = 0.2$ صفر بوده و پس از $t = 0.2s$، برابر ثابت 5V شده است. این تابع به یک شبکه کلی در شکل ۸ـ۲۸ (الف) وصل شده است.



شکل ۸ـ۲۶ تابع تحریک پلهٔ واحد $u(t - t_0)$.

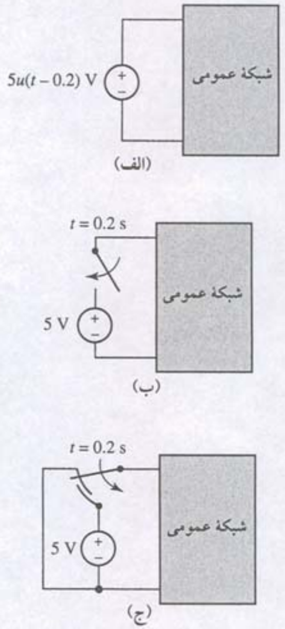


شکل ۸ـ۲۷ تابع تحریک پله واحد $u(t)$ بر حسب زمان.

منابع واقعی و تابع پله واحد

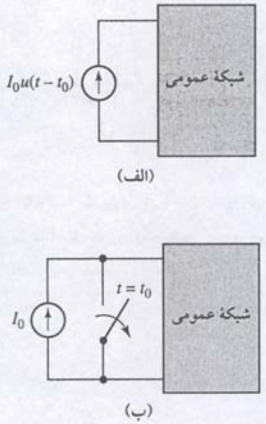
منطقی است بپرسیم که این تابع تحریک گسسته با چه منبع فیزیکی یا واقعی معادل است. منظورمان از **معادل** این است که مشخصه‌های دو شبکه یکسان باشند. برای منبع ولتاژ پله‌ای شکل ۸ـ۲۱ (الف) مشخصه ولتاژ ـ جریان کاملاً روشن است: ولتاژ قبل از $t = 0.2s$، صفر است و پس از $t = 0.2s$، برابر 5V می‌باشد، ضمن این‌که جریان در تمامی لحظات هر مقداری می‌تواند باشد. ذهنیت اولیه ما ممکن است مدار معادل شکل ۸ـ۲۸ (الف) را مجسم کند که در آن یک منبع dc 5V، با یک کلید در $t = 0.2s$ به‌طور سری بسته شده است. با این وجود این شبکه برای $t < 0$ معادل نیست زیرا ولتاژ دو سر باطری و کلید در این فاصله زمانی به کلی تعریف نشده است. منبع معادل یک مدار باز است و ولتاژ دو سر آن هر چیزی ممکن است باشد. پس از $t = 0.2s$، شبکه‌ها معادلند و اگر این تنها فاصله زمانی مطلوب ما باشد و اگر جریان‌های اولیه جاری‌شده از دو شبکه در $t = 0.2s$ یکسان باشند، آنگاه شکل ۸ـ۲۸ (ب) معادل مناسبی برای شکل ۸ـ۲۸ (الف) خواهد بود.

برای تهیه یک معادل دقیق تابع تحریک پله ولتاژ، می‌توان از یک سوئیچ دو حالته تک‌قطب استفاده کرد. قبل از $t = 0.2s$ سوئیچ ولتاژ صفر را در دو سر پایانه‌های ورودی ایجاد می‌کند. پس از $t = 0.2s$، کلید برای ایجاد ولتاژ 5V به حالت دیگر پرتاب می‌شود. در $t = 0.2s$، ولتاژ نامشخص است و باطری برای یک لحظه اتصال کوتاه می‌شود (خوشبختانه ما راجع‌به مدل ریاضی صحبت می‌کنیم). این مدار معادل دقیق در شکل ۸ـ۲۸ (ج) ملاحظه می‌گردد.



شکل ۸ـ۲۸ (الف) یک منبع تحریک که راه‌انداز یک شبکه کلی است. (ب) یک مدار ساده که گرچه کاملاً معادل منبع مدار (الف) نیست ولی در بسیاری از حالات به‌عنوان معادل آن به کار می‌رود. (ج) معادل دقیق (الف).

در شکل ۸ـ۲۹ (الف) یک منبع جریان پله‌ای دیده می‌شود که شبکه‌ای کلی را راه‌اندازی می‌کند. اگر سعی در جایگزینی این مدار با یک منبع dc موازی با یک سوئیچ کنیم (که در $t = t_0$ باز می‌شود) باید توجه داشته باشیم که مدارها پس از $t = t_0$ معادلند ولی پاسخ‌ها بشرطی یکسان خواهند بود که مقادیر اولیه یکسانی حکمفرما باشد. شکل ۸ـ۲۹ (ب) نشان می‌دهد که برای $t < t_0$ هیچ ولتاژی در دو سر پایانه‌های منبع جریان وجود ندارد. برای شکل ۸ـ۲۹ (الف) چنین چیزی صحیح نیست. معهذا ما اغلب مدارهای شکل ۸ـ۲۹ (الف) و شکل ۸ـ۲۹ (ب) را با هم تعویض می‌کنیم. معادل دقیق شکل ۸ـ۲۹ (الف) دوگان مدار شکل ۸ـ۲۸ (ج) است. معادل دقیق مدار شکل ۸ـ۲۹ (ب) را نمی‌توان به تنهایی با توابع تحریک ولتاژ ـ جریان پله‌ای ساخت.



شکل ۸ـ۲۹ (الف) اعمال یک جریان پله‌ای به یک شبکهٔ کلی. (ب) مداری که هرچند معادل دقیق (الف) نیست ولی می‌توان در بسیاری از حالات آن را به‌کاربرد.

تابع پالس مربعی

با دستکاری تابع تحریک پله واحد می‌توان بعضی از توابع تحریک مفید را تولید کرد. بیایید تا پالس ولتاژ مربعی را با شرایط زیر تعریف کنیم:

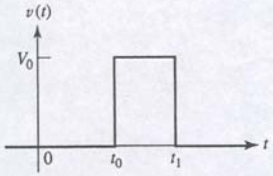
$$v(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

پالس مذکور در شکل ۸ـ۳۰ ترسیم شده است. آیا این پالس می‌تواند برحسب تابع تحریک پله واحد بیان شود؟ اجازه بدهید تا اختلاف دو پله واحد $u(t - t_0) - u(t - t_1)$ را بررسی کنیم. دو تابع پله در شکل ۸ـ۳۱ (الف) نشان داده شده‌اند که اختلاف آن‌ها یک پالس مربعی است. منبع $V_0u(t - t_0) - V_0u(t - t_1)$ که ولتاژ مطلوب ما را فراهم می‌کند نیز در شکل ۸ـ۳۱ (ب) نمایش داده شده است.

اگر یک ولتاژ سینوسی $V_m \sin\omega t$ ناگهان در $t = t_0$ به شبکه‌ای وصل شود، آنگاه نیروی محرکه، ولتاژ $u(t) = V_m u(t - t_0)\sin\omega t$ خواهد بود. اگر بخواهیم یک انرژی ناگهانی از فرستنده یک اتومبیل کنترل‌شده را نشان دهیم که با 47MHz (295 Mrad/s) کار می‌کند، باید $\frac{1}{10}\mu s$ بعد با دومین تابع تحریک پله واحد، آن را خاموش کنیم. بنابراین پالس ولتاژ برابر است با:

$$v(t) = V_m[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-8})] \sin(295 \times 10^6 t)$$

این تابع تحریک در شکل ۸ـ۳۲ ترسیم شده است.

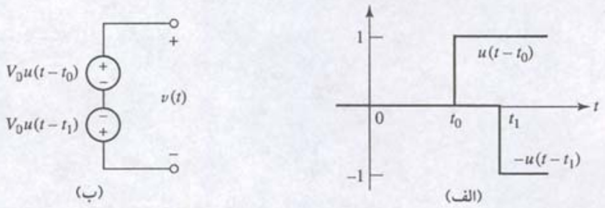


شکل ۸ـ۳۰ یک تابع تحریک مفید، پالس ولتاژ مربعی.

تمرین

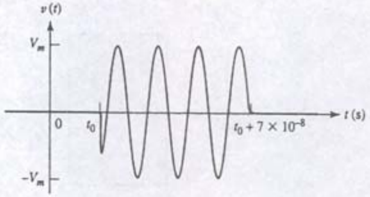
۸ـ۸ هر یک از توابع زیر را در $t = 0.8$ ارزیابی کنید:
(الف) $3u(t) - 2u(-t) + 0.8u(1 - t)$، (ب) $[4u(t)]\ u(-t)$ و (ج) $2u(t)\sin\pi t$.

جواب: 3.8، 0 و 1.176.



شکل ۸ـ۳۱ (الف) تابع پلهٔ واحد $u(t - t_0)$ و $-u(t - t_1)$. (ب) منابعی که پالس مربعی شکل ۸ـ۳۰ را تولید می‌کنند.

۸ـ۶ مدارهای RL واداشته



شکل ۸ـ۳۲ یک پالس فرکانس رادیویی، که به صورت حاصل‌ضرب یک تابع سینوسی و یک تابع پالسی تعریف شده است.

اکنون آماده‌ایم تا یک شبکه ساده را ناگهان به یک منبع dc وصل کنیم. مدار شامل یک باطری است که ولتاژ V_0 آن با یک کلید، یک مقاومت R و یک القاگر سری L است. کلید طبق شکل ۸ـ۳۳ (الف) در $t = 0$ بسته است. واضح است که قبل از $t = 0$ جریان $i(t)$ برابر صفر می‌باشد، بنابراین می‌توانیم باطری و کلید را با یک تابع تحریک پله ولتاژ $V_0u(t)$ جایگزین کنیم که این یکی هم قبل از $t = 0$ پاسخ را فراهم نمی‌کند. پس از $t = 0$، دو مدار دقیقاً یکسانند. از این رو جریان $i(t)$ را در مدار شکل ۸ـ۳۳ (الف) و یا مدار معادل ۸ـ۳۳ (ب) می‌توانیم بیابیم.

فعلاً جریان $i(t)$ را با نوشتن معادله‌ای مناسب و حل آن با جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری حل می‌کنیم. پس از یافتن پاسخ و تحقیق دو بخش تشکیل‌یافته آن، خواهیم دید که برای هر یک از این بخش‌ها اهمیتی فیزیکی وجود دارد. با آگاهی بیشتر از چگونگی تولید آن‌ها، خواهیم توانست حل سریع‌تر و مفهوم‌تری را برای هر مسئله‌ای که منبعی را ناگهان وارد مدار کند، بیابیم. بگذارید با روش اساسی‌تری حل را دنبال کنیم.

با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف به مدار شکل ۸ـ۳۳ (ب) داریم:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0u(t)$$

چون تابع تحریک پله واحد در $t = 0$ ناپیوستگی دارد، ابتدا حل در $t < 0$ را بررسی می‌کنیم، و سپس آن را در $t > 0$ مطالعه خواهیم کرد. به‌کارگیری ولتاژ صفر در $t = -\infty$ پاسخ صفری را تحمیل می‌کند، به نحوی که

$$i(t) = 0 \qquad t < 0$$

در زمان مثبت، $u(t)$ برابر واحد بوده و باید معادله زیر را حل کنیم:

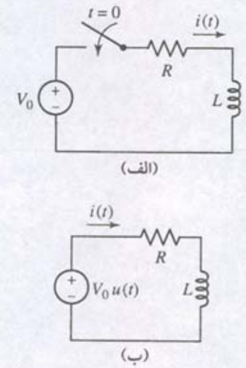
$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \qquad t > 0$$

متغیرها را می‌توان طی چند گام جبری به صورت زیر جدا کرد:

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

و هر سمت می‌تواند مستقلاً انتگرال‌گیری شود:

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$



شکل ۸ـ۳۳ (الف) مدار مفروض؛ (ب) مدار معادل (الف) که $i(t)$ آن در تمام زمان‌ها با $i(t)$ مدار قبل برابر است.

برای ارزیابی k، یک مقدار اولیه باید تعریف شود. قبل از $t = 0$، $i(t) = 0$ است و بنابراین $i(0^-) = 0$ می‌باشد. چون جریان در یک القاگر نمی‌تواند در زمان صفر به مقدار معینی بدون منبع ولتاژ بی‌نهایت تغییر کند، بنابراین $i(0^+) = 0$ خواهد بود. با $i = 0$ در $t = 0$ داریم:

$$-\frac{L}{R}\ln V_0 = k$$

و بنابراین:

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

خواهیم داشت:

$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

و یا

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L} \qquad t > 0 \qquad (۲۴)$$

بنابراین، عبارت پاسخ معتبر در همه زمان‌های t چنین خواهد بود.

$$i = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}\right)u(t) \qquad (۲۵)$$

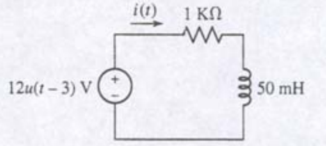
روندی مستقیم‌تر

حل فوق حلی مطلوب است، ولی به روشی ساده به‌دست نیامد. برای پی‌ریزی روش ساده‌تر، بگذارید دو عبارت معادله (۲۵) را تفسیر کنیم. جمله نمایی فرم پاسخ طبیعی مدار RL را دارد. یعنی یک تابع نمایی منفی است که با گذشت زمان با ثابت زمانی $\frac{L}{R}$ به سمت صفر میل می‌کند. پس شکل تابع این قسمت از پاسخ، مشابه پاسخ بدون منبع است. با این وجود دامنه این بخش نمایی به منبع ولتاژ V_0 وابسته است. این مطلب را به این ترتیب تعمیم می‌دهیم که پاسخ مجموع دو جمله است، یک جمله شکل پاسخ مدار بدون منبع را دارا است که دامنه‌اش به تابع تحریک وابسته است و اما جمله دیگر چگونه است؟ معادلهٔ (۲۵) حاوی یک جمله ثابت V_0/R نیز هست. جواب ساده است: به دلیل اتلاف تدریجی انرژی در مقاومت، پاسخ طبیعی به صفر میل می‌نماید ولی انرژی کل به صفر نمی‌رود. در نهایت این مدار مثل یک مقاومت و یک القاگر سری با یک باطری عمل می‌کند. چون القاگر در dc مثل اتصال کوتاه عمل می‌نماید، تنها جریان جاری V_0/R است. این جریان بخشی از پاسخ است که مستقیماً به تابع تحریک وابسته می‌باشد و ما آن را پاسخ واداشته می‌نامیم. این پاسخ حتی مدت‌ها بعد از بسته‌شدن کلید وجود دارد.

پاسخ کامل از دو بخش پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته تشکیل شده است. پاسخ طبیعی نشان‌دهنده مشخصات مدار است و مستقل از منبع می‌باشد. شکل آن را از روی مدار بدون منبع و دامنه آن را از دامنه اولیه منبع و انرژی ذخیره‌شده اولیه می‌توان یافت. پاسخ واداشته ویژگی‌های تابع تحریک را دارا است، و می‌توان آن را با این فرض که همه کلیدها مدت‌ها قبل تغییر حالت داده‌اند به‌دست‌آورد. چون فعلاً با منابع dc و کلیدها سروکار داریم، پاسخ واداشته چیزی جز حل یک مدار dc ساده نیست.

مثال ۸ـ۷

برای مدار شکل ۸ـ۳۴، $i(t)$ را برای $t = \infty$، 3^- و 3^+ و 100 μs پس از تغییر مقدار منبع به دست آورید.



شکل ۸ـ۳۴ یک مدار ساده RL راه‌اندازی‌شده با تابع تحریک ولتاژ پله‌ای.

مدت‌ها پس از میراشدن بخش گذرا ($t \to \infty$) مدار، یک مدار ساده dc رانده‌شده با منبع ولتاژ 12 V است. القاگر به صورت اتصال کوتاه درمی‌آید، پس:

$$i(\infty) = \frac{12}{1000} = 12 \text{ mA}$$

منظور از $i(3^-)$ چیست؟ این به معنی لحظه‌ای قبل از تغییر ولتاژ منبع است. برای $t < 3$، $u(t-3) = 0$ است. پس $i(3^-) = 0$ می‌باشد.

در $t = 3^+$ تابع تحریک $12u(t-3) = 12$ V است. با این وجود، چون جریان القاگر در مدت‌زمان 0 تغییر می‌کند، پس $i(3^+) = i(3^-) = 0$ است.

سرراست‌ترین روش تحلیل مدار برای $t > 3$ s، نوشتن مجدد معادله (۲۵) به صورت زیر است:

$$i(t') = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt'/L}\right)u(t')$$

و توجه کنید که این معادله به مدار ما هم قابل اِعمال می‌باشد، به شرطی که محور زمان را طوری جابه‌جا کنیم که:

$$t' = t - 3$$

بنابراین با $V_0/R = 12$ mA و $R/L = 20{,}000\ s^{-1}$:

$$i(t-3) = \left(12 - 12e^{-20{,}000(t-3)}\right)u(t-3)\text{ mA} \qquad (۲۶)$$

که می‌توان آن را ساده‌تر نوشت:

$$i(t) = \left(12 - 12e^{-20{,}000(t-3)}\right)u(t-3)\text{ mA} \qquad (۲۷)$$

زیرا تابع پله واحد یک 0 را برای $t < 0$ اجبار می‌کند که با جایگزینی $t = 3.0001$ در معادله (۲۶) یا (۲۷) درمی‌یابیم که $i = 10.38$ mA در زمان $t = 100\ \mu s$ پس از تغییر مقدار منبع است.

تمرین

۸ـ۹ منبع ولتاژ $60 - 40u(t)$ V با مقاومت 10Ω و القاگر 50mH سری است. اندازه جریان و یا ولتاژ القاگر را در t، (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (ه) 3ms به‌دست‌آورید.

جواب: 6A و 0V، 6A و 40V، 2A و 0V، 4.20A و 22.0V.

پایه‌ریزی درک شهودی

دلیل وجود دو پاسخ طبیعی و واداشته را از مباحث فیزیکی هم می‌توان دریافت. می‌دانیم که مدار ما نهایتاً پاسخ واداشته خواهد داشت. با این وجود، در لحظه پرتاب کلید به وضع دیگر، جریان‌های اولیه در القاگرها (یا در مدار RC، ولتاژ دو سر خازن‌ها) مقادیری که به انرژی ذخیره‌شده در آن‌ها وابسته است، را خواهند داشت. نباید انتظار داشته باشیم که این جریان‌ها و ولتاژها در پاسخ واداشته یکسان باشند. از این رو باید دوره گذرایی وجود داشته باشد که طی آن جریان‌ها و ولتاژها از مقدار اولیه مفروض به مقدار نهایی خود برسند. بخشی از پاسخ که گذر از مقادیر اولیه تا نهایی را فراهم می‌کند، **پاسخ طبیعی** می‌گوییم (اغلب به آن **پاسخ گذرا** می‌گویند). اگر بخواهیم پاسخ یک مدار RL بدون منبع را هم به همین نحو بررسی کنیم، باید بگوییم که پاسخ واداشته صفر است و پاسخ طبیعی، پاسخ اولیه ناشی از انرژی ذخیره‌شده در عنصر را به مقدار نهایی صفر می‌رساند.

این توصیف برای مدارهایی که در نهایت پاسخ طبیعی آن‌ها صفر می‌شود صادق است. پاسخ طبیعی مدارهای فیزیکی که عناصر آن‌ها همیشه با مقاومتی همراه است، میرا است ولی مدارهایی وجود دارند که در آن‌ها پاسخ طبیعی میرا نیست. مثال‌هایی که در آن‌ها جریان در یک حلقه متشکل از القاگرها و یا ولتاژ در یک رشته خازن سری حبس شده‌اند، نمونه‌هایی از اینگونه مدارها هستند.

۸ـ۷ پاسخ طبیعی و واداشته

برای ملاحظه پاسخ کامل به صورت دو بخش، واداشته و طبیعی پشتوانه ریاضی محکمی وجود دارد. دلیل مبتنی بر این واقعیت است که حل هر معادله دیفرانسیل خطی به صورت جمع دو بخش بیان می‌شود: با حل مکمل (پاسخ طبیعی و حل ویژه یا مخصوص) پاسخ واداشته. بدون درگیری با تئوری کلی معادلات دیفرانسیل، بگذارید با یک حل کلی از نوع آن‌چه در بخش قبل دیدیم شروع کنیم:

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

یا

$$di + Pi\ dt = Q\ dt \qquad (۲۸)$$

که Q را می‌توان تابع تحریک تصور کرده و آن را با $Q(t)$ نشان می‌دهیم تا بر وابستگی آن به زمان تأکید گردد. بگذارید بحث را با فرض این‌که P مقدار ثابتی است ساده کنیم. بعداً هم فرض خواهیم کرد که Q ثابت باشد و به این ترتیب خود را به تابع تحریک dc محدود می‌کنیم.

در هر کتاب معادلات دیفرانسیل مقدماتی، نشان داده شده است که با ضرب دو طرف معادله (۲۸) در یک عامل انتگرال‌گیری، دو طرف معادله مشتق کاملی می‌شود و با انتگرال‌گیری می‌توان حل معادله دیفرانسیل را به‌دست‌آورد. متغیرها را از هم جدا نمی‌کنیم،

بلکه فقط آن‌ها را طوری جابه‌جا می‌کنیم که انتگرال‌گیری امکان‌پذیر باشد. برای این معادلات فاکتور انتگرال‌گیری $e^{\int P dt}$ یا ساده‌تر e^{Pt} است زیرا P ثابت فرض شده است. ما هر طرف معادله را در این فاکتور انتگرال‌گیری ضرب می‌کنیم:

$$e^{Pt}di + iPe^{Pt}dt = Qe^{Pt}dt \qquad (۲۹)$$

با توجه به این‌که سمت چپ رابطه فوق مشتق ie^{Pt} است می‌توان آن را ساده کرد:

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}di + iPe^{Pt}dt$$

و بنابراین:

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}dt$$

با انتگرال‌گیری از هر سمت:

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}dt + A$$

که A ثابت انتگرال‌گیری است. ضرب طرفین در e^{-Pt} حل $i(t)$ را نتیجه می‌دهد:

$$i = e^{-Pt} \int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt} \qquad (۳۰)$$

اگر تابع تحریک $Q(t)$ معلوم‌باشد، آنگاه می‌توانیم فرم $i(t)$ را با ارزیابی انتگرال به‌دست‌آوریم. با این وجود حل چنین انتگرالی را برای هر مسئله تکرار نخواهیم کرد. بلکه علاقمندیم از آن چند نتیجه کلی بگیریم.

پاسخ طبیعی

توجه دارید که برای یک مدار عاری از منبع باید Q برابر صفر باشد و حل هم پاسخ طبیعی زیر است:

$$i_n = Ae^{-Pt} \qquad (۳۱)$$

می‌بینیم که ثابت P هرگز برای مداری شامل تنها مقاومت، القاگر و خازن منفی نمی‌شود. مقدار آن فقط به عناصر غیرفعال و اتصالات آن‌ها در مدار بستگی دارد*. بنابراین پاسخ طبیعی با گذشت زمان به سمت صفر میل خواهد کرد. البته در یک مدار ساده RL باید هم این‌طور باشد، زیرا انرژی اولیه به تدریج در مقاومت مصرف می‌شود و به فرم گرما مدار را ترک می‌کند. مدارهای فیزیکی ایده‌آلی با P مساوی صفر هم موجودند. در این مدارها پاسخ طبیعی هرگز از بین نمی‌رود.

* اگر مدار منبع وابسته یا مقاومت منفی داشته باشد، P می‌تواند منفی باشد.

پس دریافتیم که یکی از دو عبارت تشکیل‌دهنده پاسخ کامل، همان پاسخ طبیعی است که دامنه‌اش به مقدار اولیه پاسخ کامل بستگی دارد و بنابراین به مقدار اولیه تابع تحریک هم وابسته است.

پاسخ واداشته

حال دقت کنید که جمله اول معادله (۳۰) به فرم $Q(t)$، یعنی تابع تحریک بستگی دارد. هرگاه مداری با پاسخ طبیعی میرا داشته باشیم، این جمله پس از ناپدیدشدن کامل پاسخ طبیعی، کل پاسخ را تشکیل خواهد داد. این جمله را معمولاً **پاسخ واداشته** می‌نامند. به آن **پاسخ حالت ماندگار**، **حل ویژه** یا **مخصوص** یا **انتگرال ویژه** هم می‌گویند.

فعلاً فقط به مسائلی خواهیم پرداخت که منبع dc دفعتاً به مدار اعمال شود و پس از آن $Q(t)$ مقداری ثابت است. در صورت تمایل می‌توان انتگرال معادله (۳۰) را محاسبه و پاسخ واداشته را به‌دست‌آورد:

$$i_f = \frac{Q}{P} \qquad (۳۲)$$

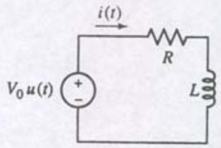
و به این ترتیب:

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} \qquad (۳۳)$$

برای مدار RL سری، $\frac{Q}{P}$ همان جریان ثابت V_0/R و $1/P$ ثابت زمانی τ است. خواهیم دید که پاسخ واداشته را می‌توان بدون محاسبه انتگرال هم به‌دست‌آورد. چون این پاسخ با گذشت زمان تبدیل به **پاسخ کامل** می‌شود، مقدار آن برابر است با منبع ولتاژ تقسیم بر مقاومت سری. پس پاسخ واداشته را می‌توان بدون محاسبه به‌دست‌آورد.

تعیین پاسخ کامل

بیایید مدار سری RL ساده را درنظرگرفته و ببینیم چگونه پاسخ کامل را از جمع پاسخ طبیعی واداشته می‌توان به‌دست‌آورد. قبلاً مدار شکل ۸.۳۵ تحلیل شد، ولی روش طولانی بود. پاسخ موردنظر جریان $i(t)$ است و ما ابتدا این جریان را به صورت مجموع جریان‌های طبیعی و واداشته بیان می‌کنیم:



شکل ۸ـ۳۵ مدار RL سری که برای نشان‌دادن روش تعیین پاسخ به صورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌کار رفته است.

$$i = i_n + i_f$$

نمایش تابع پاسخ طبیعی باید مشابه پاسخ بدون منبع باشد. بنابراین منبع ولتاژ پله را با اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم و همان حلقه سری قبلی را به‌دست‌می‌آوریم. بنابراین:

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$

که هنوز دامنه A باید محاسبه شود. چون مقدار اولیه مربوط به پاسخ کامل است، ما نمی‌توانیم به سادگی $A = i(0)$ را فرض کنیم.

حال به سراغ پاسخ واداشته می‌رویم. در این مسئله خاص، پاسخ واداشته باید ثابت باشد، زیرا منبع همواره مقدار ثابت V_0 می‌باشد. پس از مردن پاسخ طبیعی ولتاژی در دو سر القاگر وجود نخواهد داشت و لذا ولتاژ V_0 در دو سر مقاومت R ظاهر می‌گردد و بنابراین پاسخ واداشته چنین است:

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

توجه کنید که پاسخ واداشته به‌طور کامل معین شده است و دامنه مجهولی در آن وجود ندارد. اکنون با ترکیب دو پاسخ داریم:

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

و برای ارزیابی A مقدار اولیه را اعمال می‌کنیم. قبل از $t = 0$ جریان صفر است و نمی‌تواند مقدار آن ناگهان عوض شود زیرا جریان از القاگر می‌گذرد. بنابراین جریان بلافاصله پس از $t = 0$ برابر صفر است و

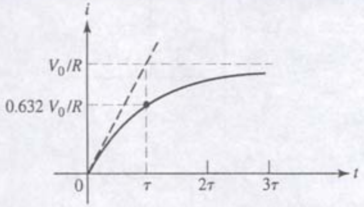
$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

و بالاخره:

$$i = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad (۳۴)$$

دقیقاً توجه کنید که A مقدار اولیه i نیست، زیرا $A = -\frac{V_0}{R}$ و $i(0) = 0$ است. در بررسی مدارهای بدون منبع دیدیم که A مقدار اولیه پاسخ بود. وقتی که توابع تحریک وجود دارند، ما ابتدا باید مقدار اولیه پاسخ را به‌دست‌آوریم و سپس آن را در معادله پاسخ کامل برای یافتن A جایگزین کنیم.

این پاسخ در شکل ۸.۳۶ ترسیم شده است و ما می‌توانیم چگونگی ایجاد جریان را از مقدار اولیه صفرش به مقدار نهایی $\frac{V_0}{R}$ ملاحظه نماییم. گذر دقیقاً 3t طول می‌کشد. اگر مدار سیم‌پیچ میدان یک موتور dc را نشان دهد، ممکن‌است $L = 10H$ و $R = 20\Omega$ باشد و لذا $\tau = 0.5s$ به‌دست‌می‌آید. پس جریان میدان در کمتر از 0.5s برقرار می‌شود. در یک ثابت زمانی، جریان حدود 63.2 درصد مقدار نهایی خود خواهد بود.



شکل ۸ـ۳۶ جریان القاگر مدار شکل ۸ـ۳۵. اگر شیب اولیهٔ منحنی را ادامه دهیم پاسخ واداشته ثابت را در $t = \tau$ قطع می‌کند.

مثال ۸ـ۸

$i(t)$ را برای تمام مقادیر زمان در شکل ۳۷ـ۸ معین کنید.

مدار دارای یک منبع ولتاژ dc و یک منبع ولتاژ پله است. می‌توانیم در سمت چپ القاگر را با معادل تونن جایگزین نماییم، ولی بیایید آن مدار معادل را تنها به صورت یک منبع سری با یک مقاومت تصور کنیم. این مدار فقط دارای یک عنصر ذخیره‌کننده انرژی، القاگر می‌باشد. پس ابتدا توجه می‌کنیم که:

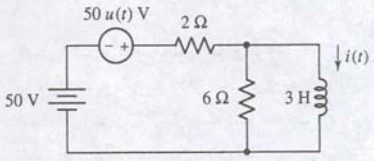
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2\ s$$

و به یاد داریم:

$$i = i_f + i_n$$

بنابراین پاسخ طبیعی مانند قبل یک نمایی منفی است:

$$i_n = Ke^{-t/2}\ A \qquad t > 0$$



شکل ۸ـ۳۷ مدار مثال ۸ـ۸

چون تابع تحریک یک منبع dc است، پاسخ واداشته جریان ثابتی خواهد بود. القاگر در برابر dc مثل یک مدار اتصال کوتاه عمل می‌کند. به‌طوری‌که:

$$i_f = \frac{100}{2} = 50\ A$$

بنابراین:

$$i = 50 + Ae^{-0.5t}\ A \qquad t > 0$$

برای ارزیابی K، باید مقدار اولیه‌ای را برای جریان القاگر حساب کنیم. قبل از $t = 0$ جریان برابر 25A بوده و نمی‌تواند آناً تغییر کند. بنابراین:

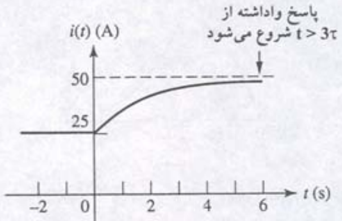
$$25 = 50 + K$$

یا

$$K = -25$$

از این رو:

$$i = 50 - 25e^{-0.5t}\ A \qquad t > 0$$



شکل ۸ـ۳۸ پاسخ $i(t)$ مدار شکل ۸ـ۳۷ که برای زمان‌های کمتر و بیشتر از صفر ترسیم شده است.

با بیان جریان زیر حل را کامل می‌کنیم:

$$i = 25\ A \qquad t < 0$$

و با رابطه زیر جریان در همه زمان‌ها به‌دست‌می‌آید:

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})\ u(t)\ A$$

پاسخ کامل در شکل ۸.۳۸ ترسیم شده است. ببینید چگونه پاسخ طبیعی، پاسخ در $t < 0$ را به پاسخ واداشته ثابت وصل می‌کند.

تمرین

۸ـ۱۰ منبع ولتاژ $v_s = 20u(t)\ V$ با مقاومت 200Ω و القاگر 4H سری است. جریان القاگر را در زمان t، (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) 8 mA و (د) 15 ms به‌دست‌آورید.

جواب: 0، 0، 33.0 mA و 52.8 mA.

به‌عنوان آخرین مثال از کاربرد این روش که به کمک آن می‌توان پاسخ کامل هر مدار را در معرض یک تغییر ناگهانی به‌طور ذهنی نوشت، دوباره یک مدار RL سری را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۹ـ۸

پاسخ جریان را در یک مدار RL سری ساده وقتی که تابع تحریک یک پالس ولتاژ مربعی با دامنه V_0 و دوره t_0 باشد را پیدا کنید.

ما تابع تحریک را به‌صورت مجموعی از دو منبع ولتاژ پله $V_0u(t)$ و $-V_0u(t - t_0)$ طبق شکل ۳۹ـ۸ (الف) و (ب) نشان می‌دهیم و برای به‌دست‌آوردن پاسخ از اصل تجمیع استفاده خواهیم کرد. فرض کنید که $i_1(t)$ بخشی از جریان $i(t)$ بدلیل فقط منبع بالایی $V_0u(t)$ و i_2 مربوط به بخش پایینی $V_0u(t - t_0)$ به تنهایی باشد. آنگاه:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

اکنون هدف ما نوشتن هر یک از پاسخ‌های جزئی i_1 و i_2 به صورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و واداشته است. پاسخ $i_1(t)$ آشنا به نظر می‌رسد. این مسئله به صورت معادله (۱۵) حل شد:

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad t > 0$$

توجه کنید که این حل فقط برای $t > 0$ معتبر است.

اکنون توجه خود را به منبع دیگر و پاسخ آن یعنی $i_2(t)$ معطوف می‌کنیم. تنها پلاریته یا قطبیت منبع و زمان اعمال آن متفاوت است. بنابراین لزومی ندارد که فرم پاسخ طبیعی و واداشته آن را معین کنیم. پس به کمک حل $i_1(t)$ می‌توانیم این پاسخ را هم بنویسیم:

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t - t_0)/L}] \qquad t > t_0$$

که محدوده مجاز t، $t > t_0$ باید مجدداً ذکر شود.

اکنون دو جواب را با هم جمع می‌کنیم ولی این کار باید با دقت انجام شود زیرا هر یک در فاصله زمانی متفاوتی معتبر است. بنابراین:

$$i(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad (۳۵)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad 0 < t < t_0 \qquad (۳۶)$$

و

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t - t_0)/L}) \qquad t > t_0$$

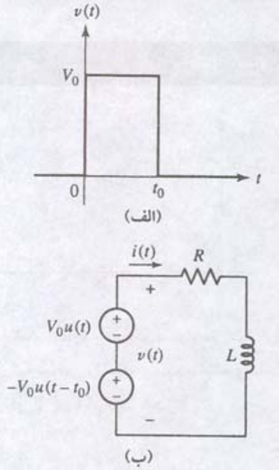
یا

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{-Rt_0/L} - 1) \qquad t > t_0 \qquad (۳۷)$$

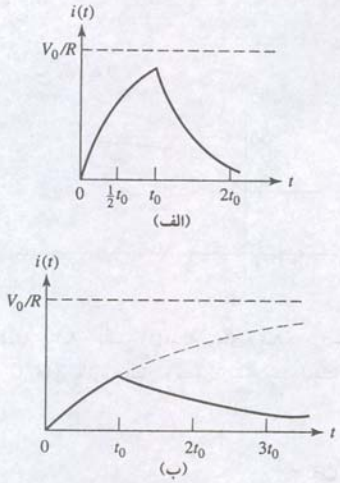
گرچه معادلات (۳۵) تا (۳۷) به‌طور کامل پاسخ مدار را در شکل ۳۹ـ۸ (ب) به پالس شکل ۳۹ـ۸ (الف) توصیف می‌کند، خود جریان به هر دو ثابت زمانی τ و دوره کاری t_0 وابسته است. این دو منحنی در شکل ۴۰ـ۸ نشان داده شده‌اند.

منحنی (الف) برای حالتی است که ثابت زمانی فقط نصف عرض پالس است. بخش صعودی آن که نمایی است قبل از نزول به V_0/R می‌رسد. حالت دیگر در نمودار (ب) نشان داده شده است و ثابت زمانی آن دو برابر t_0 است و بنابراین پاسخ هرگز شانس رسیدن به دامنه‌های بیشتر را ندارد.

روند به‌کاررفته در یافتن پاسخ مدار RL به هنگام اعمال ناگهانی منبع dc که با قطع و وصل کلید انجام می‌شود در زیر خلاصه شده است. فرض می‌کنیم که مدار قابل کاهش به یک



شکل ۳۹ـ۸ (الف) یک پالس ولتاژ مربعی که به‌عنوان تابع تحریک مدار RL سری به‌کار رفته است. (ب) مدار RL سری که تابع تحریک آن به صورت ترکیب سری دو منبع ولتاژ مستقل است. می‌خواهیم $i(t)$ را پیدا کنیم.



شکل ۴۰ـ۸ دو منحنی پاسخ برای مدار شکل ۳۹ـ۸ (ب). در شکل (الف) τ برابر $t_0/2$ است و (ب) τ برابر $2t_0$ می‌باشد.

مقاومت معادل سری R_{eq} با یک القاگر معادل L_{eq} است که در آن همه منابع مستقل صفر شده‌اند. پاسخی که به جست‌وجوی آن هستیم با $f(t)$ نشان داده می‌شود.

۱. تمام منابع را بکُشید، مدار را برای تعیین R_{eq} و L_{eq} ساده کنید. ثابت زمانی $\tau = L_{eq}/R_{eq}$ را بیابید.

۲. با فرض اتصال کوتاه‌بودن L_{eq}، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن $i_L(0^-)$، یعنی جریان القاگر قبل از قطع، به‌کار بگیرید.

۳. مجدداً با فرض اتصال کوتاه‌بودن L_{eq}، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن پاسخ واداشته به‌کار ببرید. این مقدار $f(t)$ به ازای میل t به بینهایت است و ما آن را با $f(\infty)$ نشان می‌دهیم.

۴. پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌دست‌آورید:

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$$

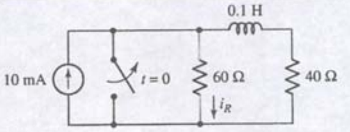
۵. $f(0^+)$ را با استفاده از شرط $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ بیابید. در صورت تمایل می‌توانید L_{eq} را با منبع جریان $i_L(0^+)$ (اگر مدار باز باشد $i(0^+) = 0$ است) در این محاسبات جایگزین کنید. به استثنا جریان القاگر (و ولتاژ خازن) دیگر جریان‌ها و ولتاژهای مدار می‌توانند ناگهان عوض شوند.

۶. $f(0^+) = f(\infty) + A$ و $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ یا پاسخ کامل = مقدار نهایی + (مقدار اولیه − مقدار نهایی)$e^{-t/\tau}$

تمرین

۱۱ـ۸ مدار شکل ۴۱ـ۸ مدت‌ها به همان شکل بوده است. کلید در $t = 0$ باز می‌شود. i_R را در زمان (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (د) 1.5ms به‌دست‌آورید.

جواب: 0، 10mA، 4mA و 5.34mA.



شکل ۴۱ـ۸

۸ـ۸ مدارهای RC واداشته

پاسخ کامل هر مدار RC را نیز می‌توان از جمع پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته به‌دست‌آورد. چون رویه نهایتاً مشابه با چیزی است که قبلاً در مدارهای RL دیدیم بهترین روش در این مرحله توضیح مثالی به صورت کامل است که هدف تنها کمیت مرتبط با خازن نیست بلکه جریان در یک مقاومت هم هست.

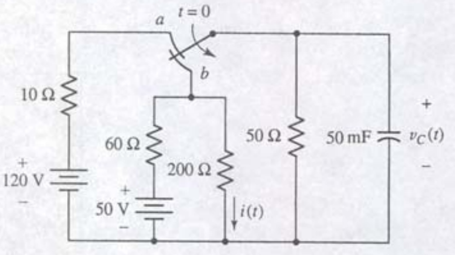
مثال ۱۰ـ۸

ولتاژ خازن $v_C(t)$ و جریان $i(t)$ را در مقاومت 200Ω شکل ۴۲ـ۸ برای همه زمان‌ها بیابید.

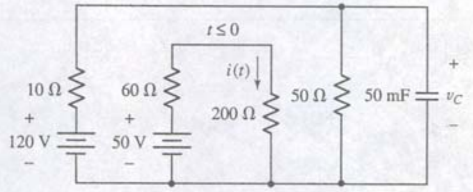
با حالت مدار در $t < 0$ که متعلق به سوئیچ درحالت a است، طبق شکل ۴۲ـ۸ (ب) شروع می‌کنیم. ما فرض می‌کنیم که پاسخ گذرا ناپدید شده باشد، و تنها پاسخ واداشته حاصل از منبع 120V را داشته باشیم که مربوط به یافتن $v_C(0^-)$ است. سپس ولتاژ اولیه را با یک تقسیم ولتاژ ساده به‌دست‌می‌آوریم:

$$v_C(0) = \frac{50}{50 + 10}(120) = 100\ \text{V}$$

چون ولتاژ خازن آناً تغییر نمی‌کند، این ولتاژ در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ معتبر است.



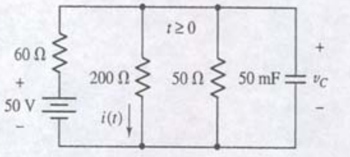
(الف)



(ب)

اکنون سوئیچ به حالت b پرتاب می‌گردد، پاسخ کامل چنین است:

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$



(ج)

شکل ۸-۴۲ (الف) یک مدار RC که در آن پاسخ کامل v_C و i با جمع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌دست‌می‌آید. (ب) مدار در $0 \ge t$. (ج) مدار در $t \ge 0$.

مدار مربوطه در شکل ۸-۴۲(ج) برای سهولت کار ترسیم شده است. فرم پاسخ طبیعی با جایگزینی منبع توسط 50V به وسیله مدار اتصال کوتاه و ارزیابی مقاومت معادل برای یافتن ثابت زمانی به‌دست‌می‌آید (به بیان دیگر مقاومت معادل تونن نظاره شده با خازن):

$$R_{eq} = \frac{1}{1/50 + 1/200 + 1/60} = 24\,\Omega$$

بنابراین:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{eq}C} = Ae^{-t/1.2}$$

برای یافتن پاسخ واداشته برای کلید در وضعیت b، آنقدر صبر می‌کنیم تا ولتاژها و جریان‌ها دیگر تغییر نکنند، بنابراین خازن به صورت مدار باز خواهد بود. با روش تقسیم ولتاژ داریم:

$$v_{C_f} = 50\left(\frac{200 \parallel 50}{50 + 200 \parallel 50}\right) = 50\left(\frac{(50)(200)/250}{60 + (50)(200)/250}\right) = 20\text{ V}$$

بنابراین:

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2}\text{ V}$$

و از مقدار اولیه حاصل قبلی:

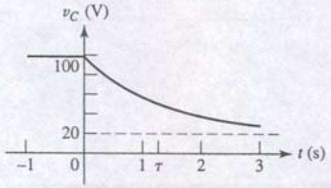
$$100 = 20 + A$$

یا

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2}\text{ V} \qquad t \ge 0$$

و

$$v_C = 100\text{ V} \qquad t < 0$$

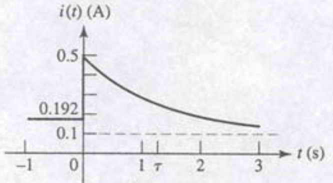


(الف)

این پاسخ در شکل ۸-۴۳(الف) کشیده شده است و دوباره پاسخ طبیعی فرم گذرایی را از مقدار اولیه به پاسخ نهایی دارا است.

اکنون به سراغ $i(t)$ می‌رویم. لزومی ندارد که این پاسخ حین کلیدزنی ثابت باشد. هنگامی که اتصال در a باشد، واضح است که $i = 50/260 = 192.3$ mA. وقتی‌که کلید به b می‌رود، پاسخ واداشته برابر است با:

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)}\left(\frac{50}{50 + 200}\right) = 0.1\text{ A}$$



(ب)

فرم پاسخ طبیعی همان فرم ولتاژ خازن است که قبلاً به دست آمد:

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

از ترکیب پاسخ طبیعی و واداشته داریم:

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2}\text{ A}$$

شکل ۸-۴۳ (الف) پاسخ v_C و (ب) پاسخ i مدار شکل ۸-۴۲ برحسب زمان.

برای محاسبه A باید $i(0^+)$ را بدانیم. این مقدار با توجه به عنصر ذخیره‌کننده انرژی خازن حاصل می‌گردد. این حقیقت که v_C حین کلیدزنی متوالی باید در 100V ثابت بماند شرط تعیین‌کننده دیگر جریان‌ها و ولتاژها در $t = 0^+$ است. چون $v_C(0^+) = 100$ V است و نیز خازن با مقاومت 200Ω موازی است، می‌بینیم که $i(0^+) = 0.5$A، $A = 0.4$A و بنابراین:

$$i(t) = 0.1923\text{ A} \qquad t < 0$$
$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2}\text{ A} \qquad t > 0$$

یا

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4^{-t/1.2})\,u(t)\text{ A}$$

که آخرین عبارت برای همه زمان‌های t صحیح است.

پاسخ کامل فوق را با $u(-t)$ که در $t < 0$ برابر واحد و در $t > 0$ برابر صفر است هم می‌توان نوشت. بنابراین:

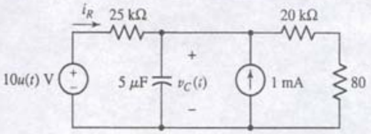
$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})\,u(t)\text{ A}$$

این پاسخ در شکل ۸-۴۳(ب) ترسیم شده است. توجه کنید که برای نوشتن فرم تابعی پاسخ این مدار با تک‌عنصر ذخیره‌ساز انرژی، تنها چهار عدد لازم است تا رسم شود: یکی مقدار ثابت قبل از کلیدزنی (0.1923 A)، مقدار لحظه‌ای پس از کلیدزنی (0.5A)، پاسخ واداشته ثابت (0.1A) و ثابت زمانی (1.2s). سپس تابع نمایی منفی به راحتی نوشته می‌شود.

تمرین

۸-۱۲ برای مدار شکل ۸-۴۴، $v_C(t)$ را در t (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (د) 0.08s بیابید.

جواب: 20V، 20V، 28V و 24.4V.



شکل ۸-۴۴

با توجه به دوگان عبارات انتهایی بخش ۸-۷ نتیجه‌گیری لازم را انجام می‌دهیم.

روالی که برای یافتن پاسخ یک مدار RC پس از قطع یا وصل منابع dc در درون یا بیرون مدار در زمانی مثل $t = 0$ به کار می‌رود، در زیر خلاصه شده است. ما فرض می‌کنیم که با صفرکردن همه منابع، مدار قابل کاهش به یک R_{eq} موازی با یک خازن C_{eq} باشد. پاسخی که در جست‌وجوی آن هستیم با f(t) نشان داده شده است.

۱. با کشتن همه منابع مستقل، مدار را ساده کنید تا R_{eq} و C_{eq} و ثابت زمانی $\tau = R_{eq}C_{eq}$ به‌دست‌آید.

۲. با فرض C_{eq} به صورت مدار باز، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن $v_C(0^-)$ که ولتاژ خازن درست قبل از قطع است به‌کاربرید.

۳. دوباره C_{eq} را مدار باز فرض کنید، از تحلیل dc استفاده کرده پاسخ واداشته را به دست آورید. این مقداری از f(t) است که با $t \to \infty$ به‌دست‌می‌آید. ما آن را $f(\infty)$ می‌نامیم.

۴. پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ‌های واداشته و طبیعی بنویسید:

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$$

۵. با استفاده از شرط $v_C(0^+) = v_C(0^-)$، $f(0^+)$ را بیابید. اگر مایلید، C_{eq} در این‌جا ممکن‌است با منبع ولتاژ $v_C(0^+)$ (اتصال کوتاه اگر $v_C(0^+) = 0$ باشد) جایگزین شود. به استثنا ولتاژ خازن (و جریان القاگر)، دیگر ولتاژها و جریان‌های مدار ممکن‌است ناگهان تغییر کنند.

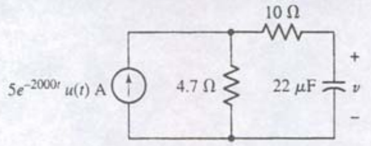
۶. $f(0^+) = f(\infty) + A$ و $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ یا

پاسخ کامل = مقدار نهایی + (مقدار اولیه − مقدار نهایی)$e^{-t/\tau}$

آنچنانکه هم‌اکنون دیدیم، گام‌های یکسانی که به تحلیل مدارهای RL اِعمال شد، قابل اِعمال به مدارهای RC هم می‌باشد. تاکنون خود را به تحلیل مدارها با توابع تحریک dc محدود کردیم، غافل از این‌که معادله (۳۰) برای توابع عمومی‌تری مثل $Q(t) = 9\cos(5t - 7°)$ یا $Q(t) = 2e^{-5t}$ هم صحیح است. قبل از نتیجه‌گیری این بخش ما یک چنین منبع غیر dc را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۸_۱۱

در شکل ۸_۴۵ عبارتی برای $v(t)$ در $t > 0$ معین کنید.



شکل ۸_۴۵ یک مدار ساده RC که با یک تابع نمایی میرا راه‌اندازی شده است.

بر اساس تجربه، یک پاسخ کاملی به فرم زیر مورد انتظار است:

$$v(t) = v_f + v_n$$

که v_f تابع تحریک و v_n فرم $Ae^{-t/\tau}$ را دارد.

اما ثابت زمانی مدار چقدر است؟ ما منبع خود را با یک بار جایگزین کرده و مقاومت معادل تونن را موازی با خازن می‌یابیم:

$$R_{eq} = 4.7 + 10 = 14.7\ \Omega$$

بنابراین ثابت زمانی ما برابر است با:

$$\tau = R_{eq}C = 323.4\ \mu s$$

یا

$$1/\tau = 3.092 \times 10^3\ s^{-1}$$

برای پیش‌رفتن چندین راه وجود دارد و شاید سرراست‌ترین آن‌ها انجام تبدیل منبع است، و نتیجه‌اش $23.5e^{-2000t}u(t)$ V است که سری با مقاومت 14.7 Ω و 22 μF می‌باشد (دقت کنید که ثابت زمانی تغییر نمی‌کند).

با نوشتن معادله KVL برای $t > 0$ داریم:

$$23.5e^{-2000t} = (14.7)(22 \times 10^{-6})\frac{dv}{dt} + v$$

با کمی دستکاری داریم:

$$\frac{dv}{dt} + 3.092 \times 10^3 v = 72.67 \times 10^3\, e^{-2000t}$$

که در مقایسه با معادلات (۲۸) و (۳۰) اجازه می‌دهد تا پاسخ کامل را بنویسیم:

$$v(t) = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt}$$

که در حالت ما $P = 1/\tau = 3.092 \times 10^3$ و $Q(t) = 72.67 \times 10^3 e^{-2000t}$ است. بنابراین:

$$v(t) = e^{-3092t}\int 72.67 \times 10^3 e^{-2000t}e^{3092t}dt + Ae^{-3092t}\ \text{V}$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$v(t) = 66.55e^{-2000t} + Ae^{-3092t}\ \text{V} \qquad (۳۸)$$

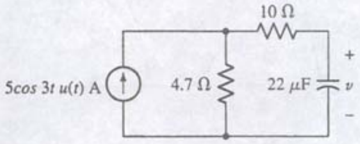
تنها منبع ما با تابع پله و مقدار صفر برای $t < 0$ کنترل می‌شود، بنابراین $v(0^-) = 0$. چون v ولتاژ یک خازن است، $v(0^-) = v(0^+)$، و بنابراین مقدار اولیه $v(0) = 0$ است. با جایگزینی در معادله (۳۸) داریم $A = -66.55$ V و لذا:

$$v(t) = 66.55(e^{-2000t} - e^{-3092t})\ \text{V}, \qquad t > 0$$

تمرین

۸_۱۳ ولتاژ خازن v را در مدار شکل ۸_۴۶ برای $t > 0$ معین کنید.

جواب: $23.5\cos 3t + 22.8 \times 10^{-3}\sin 3t - 23.5e^{-3092t}$ V



شکل ۸_۴۶ یک مدار RC راه‌اندازی‌شده به وسله تابع تحریک سینوسی.

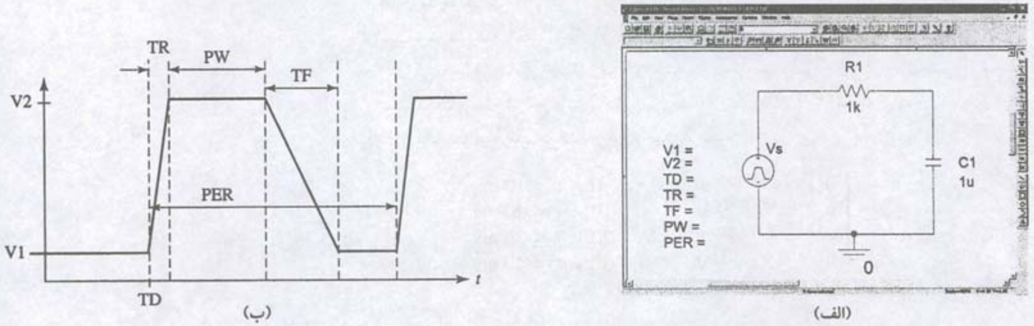
۸_۹ پیش‌بینی پاسخ مدارهای سوئیچ‌شده متوالی[1]

در مثال ۸_۹ ما به‌طور خلاصه پاسخ یک مدار RL را به موج پالسی بررسی کردیم که در آن یک منبع به‌طور موثر در خارج از مدار به صورت متوالی سوئیچ می‌گردد. این نوع در عمل خیلی رایج است، درحالی‌که به بعضی از مدارها فقط یک بار انرژی داده می‌شود (مثلاً مدارهای تریگر ایربگ اتومبیل). در پیش‌بینی پاسخ یک مدار RL یا RC که به پالس‌ها و سری‌هایی از پالس متصل است ـ بعضی اوقات به آن مدارهای سوئیچ‌شده متوالی می‌گویند ـ کلید موضوع سایز نسبی ثابت زمانی مدار به زمان‌های متفاوتی است که رشته پالس تعریف می‌کند. اساس کار در پشت تحلیل این‌است‌که عنصر ذخیره‌ساز انرژی زمان کافی برای شارژ قبل از انتهای پالس دارد و آیا زمان دشارژ آن قبل از شروع پالس بعدی کافی است.

مدار شکل ۸_۴۷ (الف) را درنظربگیرید، که به یک منبع ولتاژ پالسی‌شده وصل است و به وسیله هفت پارامتر در شکل ۸_۴۷ (ب) توصیف شده است. موج بین دو مقدار **V1** و **V2** محدود است. زمان t_r لازم برای تغییر از **V1** به **V2** را زمان صعود (**TR**) و زمان t_f لازم برای تغییر از **V2** به **V1** را زمان نزول (**TF**) گویند. دوره کاری W_P پالس را پهنای پالس (**PW**)، و پریود T شکل موج (**PER**) زمانی است که موج برای تکرار لازم دارد. توجه کنید که SPICE زمان تأخیر (**TD**) را قبل از شروع رشته پالس اجازه می‌دهد که می‌تواند در میرایی پاسخ گذرا در بعضی آرایش‌ها مفید باشد.

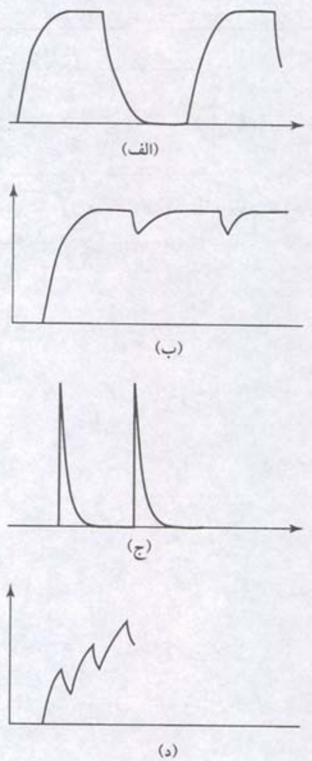
به‌خاطر بحث، ما زمان تأخیر را صفر، $V1 = 0$ و $V2 = 9$ V انتخاب می‌کنیم. ثابت زمانی مدار $\tau = RC = 1$ ms است، لذا زمان صعود و نزول را در 1 ns تنظیم می‌نماییم. گرچه SPICE اجازه تغییر ولتاژ در زمان صفر را نمی‌دهد زیرا با استفاده از فواصل زمانی گسسته معادلات دیفرانسیل را حل می‌کند، ولی در مقایسه با ثابت زمانی مدار، 1 ns به‌طور موثر آنی است.

ما چهار حالت اصلی را که در جدول ۸_۱ خلاصه شده است، ملاحظه خواهیم کرد. در دو حالت اول، پهنای پالس W_P خیلی طولانی‌تر از ثابت زمانی τ است، بنابراین انتظار داریم که پاسخ‌های گذرا از شروع پالس قبل از اتمام پالس از بین برود. در دو حالت بعد عکس آن صحیح است: پهنای پالس آنقدر کوتاه است که خازن زمانی کافی برای شارژ کامل قبل از پایان پالس ندارد. موضوع مشابهی زمانی حادث می‌شود که ما پاسخ مدار را در هنگامی که زمان بین پالس‌ها $(T - W_P)$ در مقایسه با ثابت زمانی یا کوتاه (حالت II) یا طولانی (حالت III) باشد، به دست آوریم.



شکل ۸_۴۷ (الف) شماتیک یک مدار RC ساده متصل به موج ولتاژ پالسی. (ب) نمودار تعریف پارامترهای VPULSE.

1. sequentially switched circuits



شکل ۸ـ۴۸ ولتاژ خازن مدار RC با پهنای پالس و پریود در (الف) حالت I، (ب) حالت II، (ج) حالت III و (د) حالت IV.

جدول ۸ـ۱ چهار حالت جداگانه پهنای باند و پریود نسبت به ثابت زمانی 1 ms.

حالت	پهنای پالس W_P	پریود T
I	$10\ \text{ms}\ (\tau \ll W_p)$	$20\ \text{ms}\ (\tau \ll T - W_p)$
II	$10\ \text{ms}\ (\tau \ll W_p)$	$10.1\ \text{ms}\ (\tau \gg T - W_p)$
III	$0.1\ \text{ms}\ (\tau \gg W_p)$	$10.1\ \text{ms}\ (\tau \ll T - W_p)$
IV	$0.1\ \text{ms}\ (\tau \gg W_p)$	$0.2\ \text{ms}\ (\tau \gg T - W_p)$

ما به صورت کیفی پاسخ مدار را برای هر چهار حالت در شکل ۸ـ۴۸ کشیده‌ایم و به‌طور اختیاری ولتاژ خازن را به عنوان کمیت موردنظر برگزیده‌ایم، چون هر ولتاژ یا جریانی وابستگی زمانی یکسانی دارد. در حالت I، خازن زمان کافی برای شارژ کامل و دشارژ کامل دارد (شکل ۸ـ۴۸ (الف))، درحالی‌که در حالت II (شکل ۸ـ۴۸ (ب)) که زمان بین پالس‌ها کاهش یافته، زمان لازم برای دشارژ کامل وجود ندارد. برعکس خازن در حالات III (شکل ۸ـ۴۸ (ج)) یا حالت IV (شکل ۸ـ۴۸ (د)) وقت کافی برای شارژ کامل ندارد.

حالت I: زمان کافی برای شارژ کامل و دشارژ کامل

ما می‌توانیم مقادیر دقیقی را برای پاسخ در هر حالت به دست آوریم که البته با یک سری پاسخ امکان‌پذیر است. ما ابتدا حالت I را بررسی می‌کنیم. چون خازن فرصت شارژ کامل را دارد، پاسخ واداشته متعلق به ولتاژ راه‌انداز 9 V dc است. پس پاسخ کامل به پالس اول عبارت‌است‌از:

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V}$$

با $v_C(0) = 0$، $A = -9\ \text{V}$ است و بنابراین:

$$v_C(t) = 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V} \qquad (۳۹)$$

در فاصله زمانی $0 < t < 10\ \text{ms}$ است. در $t = 10\ \text{mA}$ منبع ناگهان به 0 V افت می‌کند، و خازن شروع به دشارژ در مقاومت می‌نماید. در این فاصله زمانی ما با یک مدار ساده RC بی‌منبع مواجه هستیم و می‌توانیم پاسخ را چنین بنویسیم:

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-0.01)}, \quad 10 < t < 20\ \text{ms} \qquad (۴۰)$$

که $B = 8.99959\ \text{V}$ است که از جایگزینی $t = 10\ \text{ms}$ در معادله (۳۹) حاصل می‌شود. ما مقدار فوق را به 9 V گرد می‌کنیم، توجه داریم که مقدار محاسبه‌شده با فرض ما مبنی بر این‌که گذر اولیه قبل از پایان پالس تلفات دارد، توافق دارد.

در $t = 20\ \text{ms}$، منبع ولتاژ بلافاصله به 9 V پرش می‌کند، درست قبل از این پدیده ولتاژ خازن از جایگزینی $t = 20\ \text{ms}$ در معادله (۴۰) به دست می‌آید که $v_C(20\ \text{ms}) = 408.6\,\mu\text{V}$ است و در مقایسه با مقدار پیک 9 V در واقع صفر است.

اگر به‌خاطر سادگی چهار رقم باارزشتر را نگه داریم، ولتاژ خازن در آغاز پالس دوم صفر است که مثل نقطه شروع ماست. بنابراین معادلات (۳۹) و (۴۰) مبنای پاسخ را برای همه پالس‌های بعدی فراهم می‌کنند و می‌توانیم بنویسیم:

$$v_C(t) = \begin{cases} 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V}, & 0 \le t \le 10\ \text{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.01)}\ \text{V}, & 10 < t \le 20\ \text{ms} \\ 9(1 - e^{-1000(t-0.02)})\ \text{V}, & 20 < t \le 30\ \text{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.03)}\ \text{V}, & 30 < t \le 40\ \text{ms} \end{cases}$$

و به همین ترتیب.

حالت II: زمان شارژ کامل وجود دارد ول زمان دشارژ چنین نیست

اینک حالتی را بررسی می‌کنیم که ببینیم اگر خازن نتواند کاملاً دشارژ شود (حالت II) چه پیش می‌آید. معادله (۳۹) هنوز وضعیت بین $0 < t < 10\ \text{ms}$ را توصیف می‌کند، و معادله (۴۰) ولتاژ خازن را در فاصله بین پالس‌ها توصیف می‌کند، که به $10 < t < 10.1\ \text{ms}$ تقلیل یافته است.

درست قبل از ایجاد پالس دوم در $t = 10.1\ \text{ms}$، اکنون v_C برابر با 8.144 V است؛ خازن تنها 0.1 ms زمان برای دشارژ دارد، و بنابراین هنوز 82 درصد از حداکثر انرژی آن باقی است و پالس بعدی هم می‌رود که آغاز شود. بنابراین در فاصله بعدی:

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \quad 10.1 < t < 20.1\ \text{ms}$$

که $v_C(10.1\ \text{ms}) = 9 + C = 8.144\ \text{V}$، بنابراین $C = -0.856\ \text{V}$ و

$$v_C(t) = 9 - 0.856e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 20.1\ \text{ms}$$

که خیلی سریع‌تر از پالس قبلی در رسیدن به 9 V است.

حالت III: زمان شارژ کافی نیست ولی دشارژ کامل انجام می‌شود

اما اگر روشن نباشد که دوران گذرا قبل از پایان پالس ولتاژ تمام است یا خیر چه می‌شود؟ در واقع این وضعیت در حالت III رخ می‌دهد. درست همان‌طور که برای حالت I نوشتیم:

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V} \qquad (۴۱)$$

رابطه فوق به این حالت می‌تواند اِعمال شود، ولی این بار فقط در فاصله $0 < t < 0.1\ \text{ms}$ خواهد بود. شرط اولیه ما عوض نشده است، لذا مثل قبل $A = -9\ \text{V}$ است. اکنون، قبل از اتمام اولین پالس در $t = 0.1\ \text{ms}$، می‌بینیم که $v_C = 0.8565\ \text{V}$ است. با این وجود اگر اجازه دهیم خازن کاملاً شارژ شود، با مقدار 9 V ممکن خیلی فاصله دارد که حاصل مستقیم از یک دهم ثابت زمانی است که طول می‌کشد.

اکنون خازن شروع به دشارژ می‌کند، بنابراین:

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.1 < t < 10.1\ \text{ms} \qquad (۴۲)$$

ما قبلاً معین کردیم که $v_C(0.1^{-}\text{ms}) = 0.8565\ \text{V}$، بنابراین $v_C(0.1^{+}\text{ms}) = 0.8565\ \text{V}$ و جایگزینی در معادله (۴۲) داریم $B = 0.8565\ \text{V}$. درست در پالس دوم در $t = 10.1\ \text{ms}$ ولتاژ خازن به 0 V افول کرده است؛ این خود مقدار اولیه‌ای در آغاز پالس دوم است و لذا می‌توان معادله (۴۱) را برای پاسخ مربوطه چنین نوشت:

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 10.2\ \text{ms} \qquad (۴۳)$$

حالت IV: زمان کافی برای شارژ و دشارژ موجود نیست

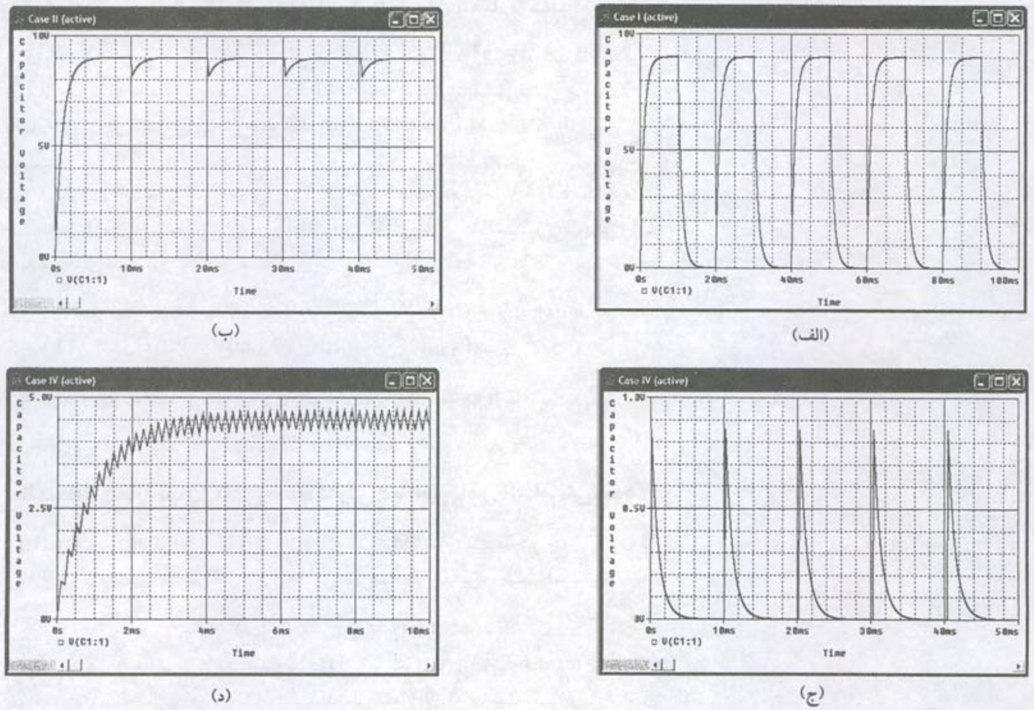
در آخرین حالت ما وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن عرض پالس و پریود آنقدر کوتاه‌اند که خازن نمی‌تواند در یک پریود کاملاً شارژ یا کاملاً دشارژ گردد. بر اساس تجربیت قبل می‌توان نوشت:

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000t}\ \text{V}, \qquad 0 < t < 0.1\ \text{ms} \qquad (۴۴)$$

$$v_C(t) = 0.8565e^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.1 < t < 0.2\ \text{ms} \qquad (۴۵)$$

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-2\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.2 < t < 0.3\ \text{ms} \qquad (۴۶)$$

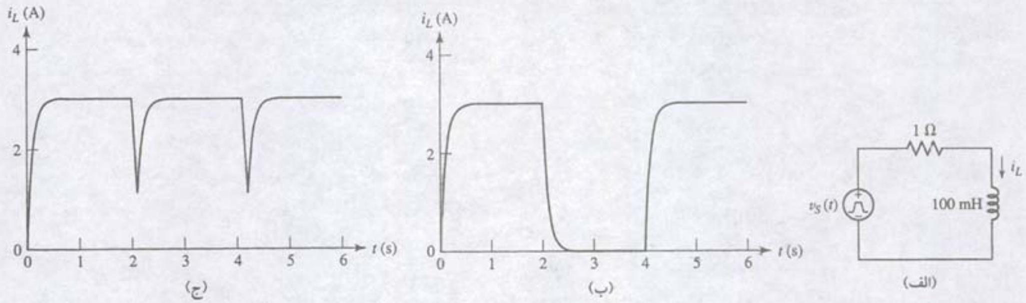
$$v_C(t) = De^{-1000(t-3\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.3 < t < 0.4\ \text{ms} \qquad (۴۷)$$



شکل ۴۹ـ۸ نتایج شبیه‌سازی PSpice متناظر با: (الف) حالت I، (ب) حالت II، (ج) حالت III و (د) حالت IV.

درست قبل از پالس دوم در $t = 0.2$ ms، ولتاژ خازن به $v_C = 0.7750$ V افت می‌کند؛ و زمان برای دشارژ آن موجود نیست. خازن بخش بزرگی از یک انرژی کم را که در آغاز وقت داشته نگه داشته است. برای فاصله زمانی $0.2 < t < 0.3$ ms جایگزینی $v_C(0.2^+) = v_C(0.2^-) = 0.7750$ V در معادله (۴۶) منجر به $C = -8.225$ V می‌گردد. در ادامه، ما معادله (۴۶) را در $t = 0.3$ ms ارزیابی می‌کنیم و $v_C = 1.558$ V را درست قبل از پایان پالس دوم محاسبه می‌نماییم. بنابراین $D = 1.558$ V است و خازن ما به آهستگی ولتاژ خود را طی چندین پالس بالا می‌برد. در این مرحله شاید ترسیم پاسخ‌های مشروح مفید باشد لذا ما نتایج شبیه‌سازی حالت I تا IV را در شکل ۴۹ـ۸ ترسیم کرده‌ایم. دقت کنید که در شکل ۴۹ـ۸(د)، پاسخ گذرای شارژ / دشارژ از نظر شکل مشابه با شکل‌های ۴۹ـ۸(الف) و (ج) است که بر روی یک پاسخ شارژ مانند به فرم $(1 - e^{-t/\tau})$ سوار شده است. بنابراین حدود 3 تا 5 ثابت زمنی برای خازن زمان لازم است تا به مقدار حداکثر شارژ شود و تنها یک پریود جوابگوی شارژ یا دشارژ آن نیست.

چیزی که تاکنون انجام نداده‌ایم، پیش‌بینی رفتار پاسخ برای $t >> 5\tau$ است، هرچند که به انجام آن تمایل داریم، خصوصاً اگر نخواهیم یک رشته طولانی از پالس‌ها را و هر بار یکی بررسی نماییم. توجه دارید که پاسخ شکل ۴۹ـ۸(د) دارای متوسط مقدار 4.50 V از حدود 4 ms به بعد است. این دقیقاً نصف مقداری است که ما انتظار داریم اگر عرض پالس منبع ولتاژ به خازن اجازه شارژ کامل می‌داد. در واقع این متوسط طولانی با ضرب ولتاژ dc خازن در نسبت پهنای پالس به پریود به دست می‌آید.



شکل ۵۰ـ۸ (الف) مدار مسئله ۱۴ـ۸. (ب) حل بخش (الف). (ج) حل بخش (ب).

تمرین

۱۴ـ۸ $i_L(t)$ را در محدوده $0 < t < 6$ s برای

(الف) $v_S(t) = 3u(t) - 3u(t - 2) + 3u(t - 4) - 3u(t - 6) + \ldots$

(ب) $v_S(t) = 3u(t) - 3u(t - 2) + 3u(t - 2.1) - 3u(t - 4.1) + \ldots$

به دست آورید.

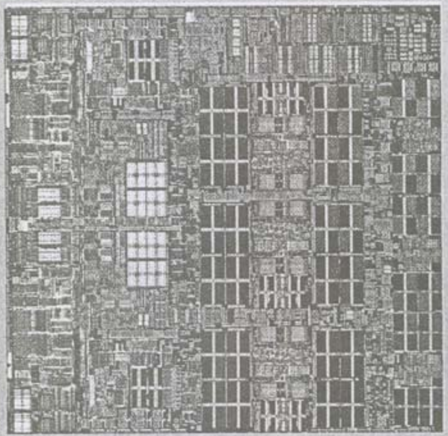
جواب: (الف) شکل ۵۰ـ۸ (ب) را ببینید. (ب) شکل ۵۰ـ۸ (ج) را ببینید.

کاربرد عملی

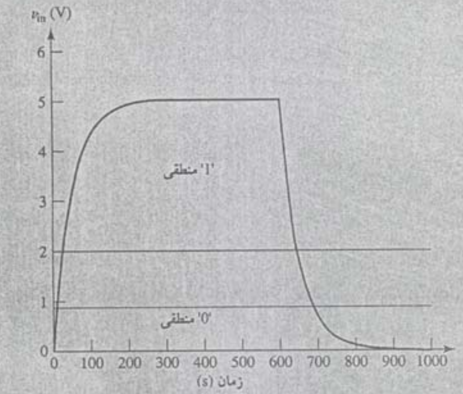
محدودیت‌های فرکانسی در مدارهای مجتمع

مدارهای مجتمع دیجیتال مدرن، مانند آرایه‌های برنامه‌پذیر منطقی (PAL) و ریزپردازنده‌ها (شکل ۵۱ـ۸) متشکل از مدارهای ترانزیستوری بهم وصل شده‌ای به‌نام گیت می‌باشد.

سیگنال‌های دیجیتال به‌طور سمبلیک با صفرها و یک‌ها نشان داده می‌شوند و می‌توانند داده یا دستورالعمل (مانند "add" یا "subtract" باشد). به لحاظ الکتریکی، ما "1" منطقی را با ولتاژ بالا و "0" منطقی را با ولتاژ پایین نشان می‌دهیم. در عمل به هر یک، محدوده ولتاژی اختصاص یافته است. مثلاً در مدارهای منطقی TTL سری 7400، هر ولتاژ بین 2 تا 5V به‌عنوان منطق 1 و هر ولتاژی بین 0 تا 0.8 به‌عنوان منطق 0 تفسیر می‌گردد. ولتاژهای بین 0.8 تا 2V به هیچ‌یک از حالات منطقی متعلق نیستند (شکل ۵۲ـ۸).

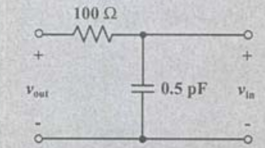


شکل ۵۱ـ۸ IBM Power Chip.



شکل ۵۲ـ۸ تعیین ظرفیت خازنی شارژ/دشارژ مسیر که به ترتیب محدوده ولتاژ TTL را برای "1" منطقی و "0" منطقی تعیین می‌نماید.

یک پارامتر کلیدی در مدارهای دیجیتال سرعت آن‌ها است. در این‌جا منظور از سرعت توانایی واکنش یک گیت ز یک حالت منطقی به حالت منطقی دیگر (مثل 0 به 1 و بالعکس) و زمان تأخیر لازم برای حمل خروجی یک گیت به ورودی گیت دیگر است. گرچه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی‌اند و لذا سرعت آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد، مسیرهای درونی آن‌ها هم سرعت مدارهای مجتمع سریع را تحت تأثیر قرار می‌دهد. ما می‌توانیم مسیر بین دو گیت منطقی را با استفاده از مدار ساده RC مدل‌سازی نماییم (با کاهش سایز در طرح‌های جدید، مدل‌های دقیق‌تری برای پیش‌بینی رفتار مدارها لازم است). مثلاً مسیری به طول $2000\mu m$ و عرض $2\mu m$ را درنظربگیرید. می‌توانیم این مسیر را در یک نمونه مدار مجتمع سیلیکانی به صورت ظرفیت 0.5pF و مقاومت 100Ω مدل‌سازی کنیم (شکل ۸ـ۵۳).



شکل ۸ـ۵۳ مدل مداری یک مسیر مداری.

بیایید تصور کنیم که v_{out} نمایش ولتاژ خروجی یک گیت باشد که از منطق "0" به حالت "1" تغییر می‌کند. ولتاژ v_{in} در ورودی گیت دیگر ظاهر می‌شود و ما مایلیم بدانیم چقدر طول می‌کشد تا v_{in} به v_{out} برسد.

با فرض ظرفیت 0.5 pF و خالی‌بودن مسیر اتصال (یعنی $v_{in}(0) = 0$) با محاسبه ثابت زمانی RC برای مسیر به صورت $\tau = RC = 50$ ps، تعریف $t = 0$ به‌عنوان زمان تغییر v_{out}، عبارت زیر را به‌دست‌می‌آوریم:

$$v_{in}(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{out}(0)$$

با تنظیم $v_{in}(0) = 0$، می‌بینیم $A = -v_{out}(0)$ است و بنابراین:

$$v_{in}(t) = v_{out}(0)[1 - e^{-t/\tau}]$$

خواهد شد. با بررسی این معادله، می‌بینیم که v_{in} پس از 5τ یا 250 ps به $v_{out}(C)$ می‌رسد. اگر ولتاژ v_{out} دوباره قبل از این زمان گذرا عوض شود، آن‌گاه خازن زمان کافی برای تغییر ندارد. در این صورت v_{in} کوچک‌تر از v_{out} خواهد شد، اگر مثلاً فرض شود $v_{out}(0)$ حداقل مقدار خود را داشته باشد، آن‌گاه v_{in} منطق 1 را نخواهد داشت. اگر v_{out} ناگهان به 0 تغییر کند (منطق 0) خازن شروع به تخلیه خواهد کرد به‌طوری‌که v_{in} بیش از حد خالی می‌شود. بنابراین با سوئیچ‌کردن سریع حالات منطقی، قادر نخواهیم بود اطلاعاتی را به گیت دیگر انتقال دهیم. بنابراین سریع‌ترین سرعت تغییر حالات منطقی $(5\tau)^{-1}$ است. این سرعت را می‌توان به وسیله فرکانس کاری مطابق زیر نشان داد:

$$f_{max} = \frac{1}{2(5\tau)} = 2 \text{ GHz}$$

که ضریب 2 پریود شارژ ـ دشارژ را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم مدار مجتمع ما در فرکانس‌های بالاتر کار کند تا به این ترتیب محاسبات سریع‌تر انجام شود، باید ظرفیت و مقاومت اتصالات درونی را کاهش دهیم.

۸ـ۱۰ خلاصه فصل و مرور

- پاسخ مداری که منابعش ناگهان در داخل یا بیرون مدار حاوی خازن یا القاگر تغییر کند از دو بخش تشکیل شده است: یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ واداشته.
- فرم پاسخ طبیعی (که به آن پاسخ گذرا هم می‌گویند) فقط به مقدار قطعات و نحوه اتصال آن‌ها وابسته است.
- فرم پاسخ واداشته آینه‌ای از تابع تحریک است. بنابراین یک تابع dc همواره به پاسخ واداشته ثابت منجر می‌شود.
- مداری که به یک القاکنایی معادل L و یک مقاومت معادل R کاهش یابد، پاسخ طبیعی $i(t) = I_0e^{-t/\tau}$ را دارد، که در آن $\tau = L/R$ ثابت زمانی مدار می‌باشد.
- مداری که به یک ظرفیت معادل C و یک مقاومت معادل R کاهش یابد، پاسخ طبیعی $v(t) = V_0e^{-t/\tau}$ را دارد که در آن $\tau = RC$ ثابت زمانی مدار می‌باشد.
- پاسخ پله واحد راهی مفید برای مدل‌سازی باز و بسته‌شدن یک کلید است، ضمن این‌که نیم‌نگاهی هم باید به مقادیر اولیه داشت.
- پاسخ کامل مدار RL و یا RC که با یک منبع dc تحریک شود فرم $f(0^+) = f(\infty) + A$ و
$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$$
یا $e^{-t/\tau}$ (مقدار نهایی - مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کامل، را دارد.

- پاسخ کامل یک مدار RL یا RC را می‌توان با نوشتن یک معادله دیفرانسیل برای کمیت موردنظر و حل آن میسر می‌شود.
- در مدارهایی که به‌طور متوالی سوئیچ می‌شوند یا به یک موج پالسی وصل هستند، موضوع مرتبط این‌است‌که عنصر ذخیره‌کننده زمان کافی برای شارژ یا دشارژ کامل در مقایسه با ثابت زمانی مدار دارد یا نه.

۸ـ۱۱ خواندنی‌های کمکی

A guide to solution techniques for differential equations can be found in:

W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* 7th ed. New York: Wiley, 2002.

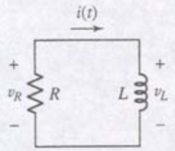
A detailed description of transients in electric circuits is given in:

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I.* New York: Wiley, 1954. (Out of print, but in many university libraries.)

مسائل

۸ـ۱ مدار RL بدون منبع

۱. مدار ساده RL در شکل ۸ـ۵۴ نشان داده شده است. اگر $R = 4.7\ k\Omega$، $L = 1\ \mu H$ و $i(0) = 2$ mA باشد، مطلوبست (الف) i در 100 ps؛ (ب) i در $t = 212.8$ ps، (ج) v_R در 75 ps و (د) v_L در 75 ps.



شکل ۸ـ۵۴

۲. مدار شکل ۸ـ۵۴ متشکل از مقاومت $R = 1\ \Omega$ و یک القاکنایی $L = 2$ H است. در $t = 0$، القاگر 100 mJ انرژی می‌گیرد. مطلوبست (الف) i در $t = 1s$؛ (ب) i در $t = 5s$؛ (ج) i در $t = 10$ s و (د) انرژی باقیمانده در القاگر در $t = 2s$.

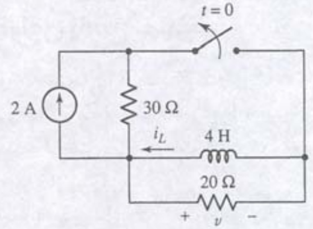
۳. برای مدار ساده RL در شکل ۸ـ۵۴، R برابر 100 Ω فرض می‌شود. اگر $i(0) = 2$ mA و $i(50\ \mu s) = 735.8\ \mu A$ باشد، مطلوبست مقدار القاکنایی L.

۴. برای مدار ساده شکل ۸ـ۵۴، $L = 3$ mH فرض می‌شود. اگر $i(0) = 1.5$ A و $i(2\ s) = 551.8$ mA باشد، مطلوبست مقدار مقاومت R.

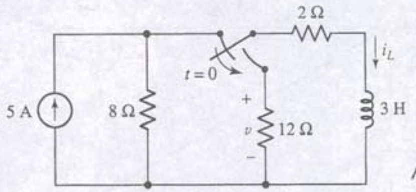
۵. یک القاگر 3 mH در مدار شکل ۸ـ۵۴، 1 J انرژی را در $t = 0$ و 100 mJ انرژی را در $t = 1$ ms ذخیره کرده است، R را محاسبه کنید.

۶. کلید مدار شکل ۸ـ۵۵ مدت‌ها در حالت بسته بوده است. اگر در $t = 0$ کلید باز شود، (الف) i_L را در یک لحظه پس از تغییر کلید بیابید. (ب) v را بلافاصله پس از تغییر وضع کلید به‌دست‌آورید.

۷. کلید شکل ۸ـ۵۶ تک‌پل دو حالته است و نشان می‌دهد که قبل از بازشدن، یک مدار دیگر را می‌بندد. این نوع کلید را معمولاً "وصل قبل از قطع" می‌خوانند. با فرض این‌که کلید از مدت‌ها قبل در وضعیت ترسیم‌شده واقع باشد، مقدار v و i_L را (الف) درست قبل از تغییر وضع کلید و (ب) درست بعد از تغییر وضع کلید، به‌دست‌آورید.

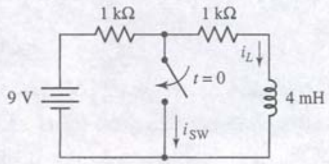


شکل ۸ـ۵۵



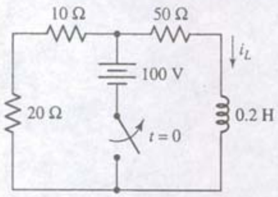
شکل ۸ـ۵۶

۸. پس از آرایش یک‌ساعته در شکل، کلید مدار شکل ۸ـ۵۷ در $t = 0$ بسته می‌شود. در $t = 5\mu s$ مطلوبست: (الف) i_L و (ب) i_{sw}.



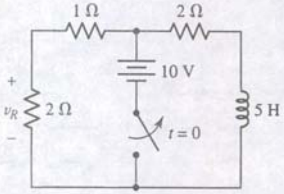
شکل ۸ـ۵۷

۹. کلید مدار شکل ۸ـ۵۸ پس از مدت‌ها بسته‌بودن در $t = 0$ باز می‌شود. (الف) i_L را برای $t > 0$ پیدا کنید. (ب) $i_L(10\text{ms})$ را حساب کنید. (ج) اگر $i_L(t_1) = 0.5 i_L(0)$ باشد، t_1 را بیابید.



شکل ۸ـ۵۸

۱۰. برای مدار شکل ۸ـ۵۹، (الف) معادله دیفرانسیلی بنویسید که ولتاژ مقاومت v_R را برای $t > 0$ توصیف کند. (ب) معادله مشخصه را حل کنید. (ج) v_R را درست قبل از بازشدن سوئیچ، و درست بعد از بازشدن سوئیچ و در $t = 1$s محاسبه کنید.

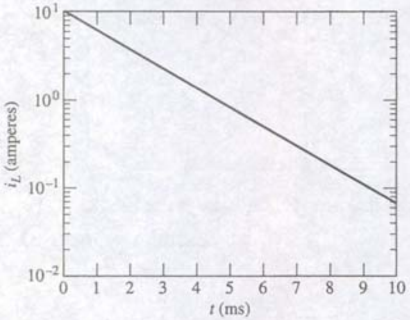


شکل ۸ـ۵۹

۸ـ۲ خواص پاسخ نمایی

۱۱. شکل ۸ـ۷ نمودار i/I_0 را به‌عنوان تابعی از t نشان می‌دهد. (الف) مقادیری از t/τ را معین کنید که در آن i/I_0 برابر 0.1، 0.01 و 0.001 گردد. (ب) اگر خطی مماس در نقطه $t/\tau = 1$ بر منحنی رسم شود، در کجا محور t/τ را قطع می‌کند.

۱۲. با مراجعه به پاسخ شکل ۸ـ۶۰، ثابت زمانی مدار و جریان اولیه داخل القاگر را به‌دست‌آورید.



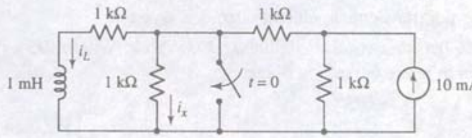
شکل ۸ـ۶۰

۱۳. ولتاژ مقاومت را در یک مدار RL ساده با مقدار انرژی اولیه 15mJ که در القاگر 10mH ذخیره شده برای R = 1kΩ، R = 10kΩ و R = 100kΩ رسم کنید. جواب خود را با PSpice تأیید نمایید.

۱۴. در مدار شکل ۸ـ۱، R = 1MΩ و L = 3.3μH می‌باشد. (الف) ثابت زمانی مدار را حساب کنید. (ب) اگر القاگر انرژی اولیه 43μJ را در t = 0 داشته باشد، i_L را در t = 5ps به‌دست‌آورید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.

۱۵. یک سیگنال دیجیتال به داخل یک سیم‌پیچ القاکنایی 125.7 μH، ارسال شده است. حداکثر مقدار مجاز مقاومت معادل تونن گیرنده اگر انتقال کمتر از 100ns طول بکشد، چقدر است.

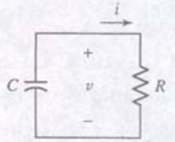
۱۶. کلید شکل ۸ـ۶۱ قبل از بسته‌شدن در t = 0، مدت‌ها در حالت باز بوده است. در فاصله زمانی -5 < t < 5μs، (الف) $i_L(t)$ و (ب) $i_x(t)$ را ترسیم کنید.



شکل ۸ـ۶۱

۸ـ۳ مدار RC بدون منبع

۱۷. در مدار RC موازی در شکل ۸ـ۶۲، $C = 1\ \mu F$ و $R = 100\ M\Omega$ نشان‌دهندهٔ تلفات در دی‌الکتریک خازن است. خازن 1 mJ انرژی را در $t = 0$ دارد. (الف) ثابت زمانی مدار را تعیین کنید. (ب) i را در 20 s محاسبه نمایید. (ج) صحت حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۸ـ۶۲

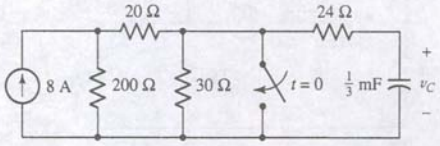
۱۸. برای مدار شکل ۸ـ۶۲، فرض می‌شود که $R = 1\ \Omega$، $C = 2$ F و $v(0) = 10$ V است. v را در شرایط (الف) $t = 1$ s؛ (ب) $t = 2$ s؛ (ج) $t = 5$ s و (د) $t = 10$ s محاسبه کنید.

۱۹. از $R = 1$ kΩ و $C = 4$ mF در مدار شکل ۸ـ۶۱ استفاده شده است. اگر $v(0) = 5$ V باشد، (الف) v را در $t = 1$ ms محاسبه کنید. (ب) i را در $t = 2$ ms محاسبه کنید. (ج) انرژی باقیمانده در خازن را در $t = 4$ ms تعیین کنید.

۲۰. برای مدار RC که در شکل ۸ـ۶۲ نشان داده شده است، C، 100 pF محاسبه شده است. (الف) اگر $v(0) = 1.5$ V و $v(2\text{ ns}) = 100$ mV باشد، مقدار مقاومت R را به دست آورید. (ب) صحت حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق نمایید.

۲۱. منبع تغذیه یک گیرنده استریو دو خازن بزرگ موازی 50mF دارد. هنگام خاموش‌کردن منبع انرژی، مشاهده می‌کنید که یک LED که به علامت وجود برق است به آهستگی و پس از گذشت زمان چندثانیه‌ای خاموش می‌شود. به علت نبودن برنامه خوب در تلویزیون تصمیم می‌گیرید آزمایشی را با دوربین 35mm و سرعت متغیر شاتر با چند حلقه فیلم ارزان انجام دهید. با سرعت شاتر 2s، هیچ تصویری روی فیلم ظاهر نمی‌شود. در سرعت 1s یک تصویر ضعیف مشاهده می‌شود. با سرعت 150ms تصویر 14% شدت حاصل از سریع‌ترین سرعت دوربین است. مقاومت معادل تونن مدار متصل به منبع تغذیه گیرنده را تخمین بزنید.

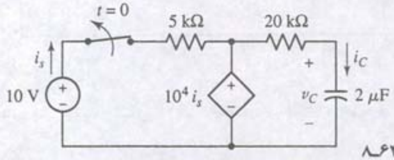
۲۲. (الف) $v_C(t)$ را برای همه زمان‌های شکل ۸ـ۶۳ بیابید. (ب) در چه زمانی $v_C = 0.1\ v_C(0)$ است.



شکل ۸ـ۶۳

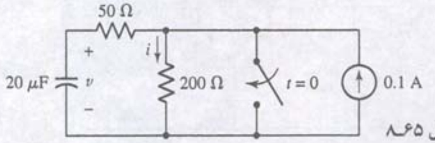
۲۳. یک منبع جریان 4A، یک مقاومت 20Ω و یک خازن 5μF همگی با هم موازیند. دامنه منبع جریان ناگهان در t = 0 به صفر افت می‌کند. در چه زمانی خازن به نصف مقدار اولیه‌اش می‌افتد. (ب) انرژی ذخیره‌شده در این حال در خازن چقدر است؟

۲۴. $i_C(t)$، $v_C(t)$ را برای مدار شکل ۸ـ۶۴ بیابید و هر دو منحنی را روی یک محور زمانی با -0.1 < t < 0.1 s رسم کنید.



شکل ۸ـ۶۴

۲۵. برای مدار شکل ۸ـ۶۵ مقدار جریان i و ولتاژ v را در $t = 0^+$، t = 1.5ms و t = 3.0s به‌دست‌آورید.

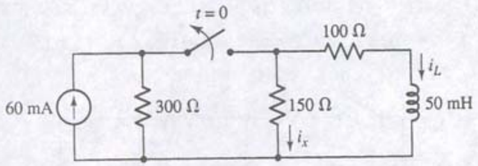


شکل ۸ـ۶۵

۸ـ٤ تعمیم دیدگاه

۲۶. سوئیچ در شکل ۸ـ۶۶ پس از زمان طولانی بسته‌ماندن در $t = 0$ باز شده است. i_L و i_x را در (الف) $t = 0^-$؛ (ب) $t = 0^+$؛ (ج) $t = 300\ \mu s$ محاسبه کنید.

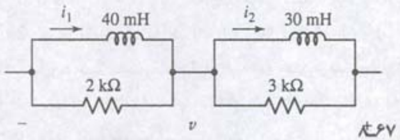
۲۷. یک القاگر 0.2H با یک مقاومت 100Ω موازی است. جریان القاگر در t = 0 برابر 4A است. (الف) $i_L(t)$ را در t = 0.8s به‌دست‌آورید. (ب) اگر یک مقاومت 100Ω دیگر موازی با القاگر در t = 1ms وصل شود، i_L را در t = 2ms محاسبه کنید.



شکل ۸ـ۶۶

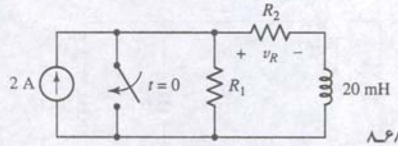
۲۸. یک القاگر 20mH با یک مقاومت 1kΩ موازی است. بگذارید در t = 0 جریان حلقه 40mA باشد. (الف) در چه زمانی جریان 10mA می‌گردد؟ (ب) چه مقاومت سری را باید به مدار در t = 10μs متصل کرد به‌طوری‌که جریان در t = 15μs به 10mA برسد.

۲۹. در شبکه شکل ۸ـ۶۷، مقادیر اولیه عبارتند از $i_1(0) = 20$mA و $i_2(0) = 15$mA. (الف) $v(0)$ را معین کنید. (ب) $v(15\mu s)$ را به‌دست‌آورید. (ج) در چه زمانی $v(t) = 0.1\ v(0)$ می‌گردد؟



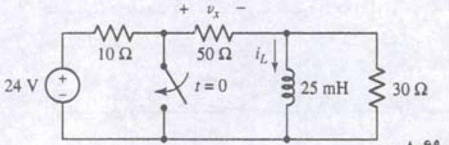
شکل ۸ـ۶۷

۳۰. مقادیر R_1 و R_2 را در مدار شکل ۸ـ۶۸ طوری انتخاب کنید که $v_R(0^+) = 10$V و $v_R(1\text{ms}) = 5$V باشد.



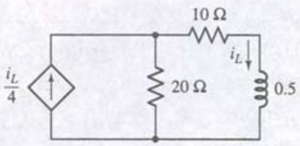
شکل ۸ـ۶۸

۳۱. کلید در شکل ۸ـ۶۹ از مدت‌ها قبل باز بوده است. اگر آن را در t = 0 ببندیم، (الف) i_L را در t > 0 بیابید. (ب) $v_x(t)$ را برای -4 < t < 4ms رسم کنید.



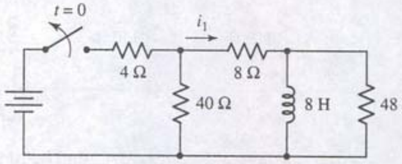
شکل ۸ـ۶۹

۳۲. اگر در مدار شکل ۸ـ۷۰، $i_L(0) = 10$A باشد برای t > 0 مقدار $i_L(t)$ را بیابید.



شکل ۸ـ۷۰

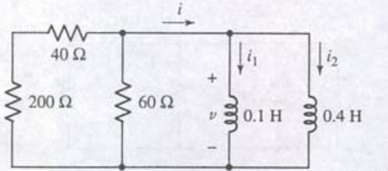
۳۳. به شکل ۸-۷۱ مراجعه نمایید و در 0.1s، 0.03 و 0.1- = t مقدار i_1 را بیابید و آن را برحسب t $(-0.1 < t < 0.1\ s)$ رسم کنید.



شکل ۸-۷۱

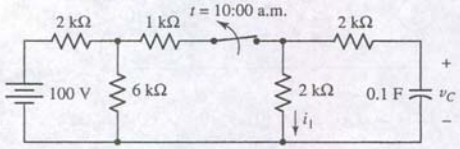
۳۴. مداری متشکل از القاگر 0.5H، مقاومت 10Ω و یک مقاومت 40Ω سری است. جریان القاگر در t = 0 برابر 4A است. (الف) $i_L(15ms)$ را حساب کنید. (ب) مقاومت 40Ω در t = 15ms اتصال کوتاه شده است. $i_L(30ms)$ را محاسبه نمایید.

۳۵. مدار شکل ۸-۷۲ حاوی دو القاگر موازی است. بنابراین، این فرصت پیش می‌آید تا جریان در حلقه القایی بچرخد. فرض کنید $i_1(0^-) = 10A$ و $i_2(0^-) = 20A$ بـاشد. (الف) $i_1(0^+)$، $i_2(0^+)$ و $i(0^+)$ را به‌دست‌آورید. (ب) ثابت زمانی τ را برای $i(t)$ معین کنید. (ج) $i(t)$ را در $t > 0$ پیدا کنید. (د) $v(t)$ را به‌دست‌آورید. (ه) مقدار $i_1(t)$ و $i(t)$ را از $v(t)$ و مقدار اولیه به‌دست‌آورید. (و) نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در t = 0 برابر مجموع انرژی‌های تلف‌شده در شبکه مقاومتی بین t = 0 و t = ∞، به علاوه انرژی ذخیره‌شده در القاگر در t = ∞ می‌باشد.



شکل ۸-۷۲

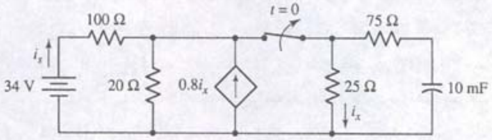
۳۶. مدار شکل ۸-۷۳ از روز قبل به فرم نشان داده شده است. کلید در ساعت 10 صبح باز شده است. (الف) v_C و i_1 را در ساعت 9:59 صبح محاسبه کنید. (ب) در ساعت 10:05 محاسبه نمایید. (ج) $i_1(t)$ را در t = 1.2s به‌دست‌آورید. (د) صحت حل خود را با PSpice نشان دهید.



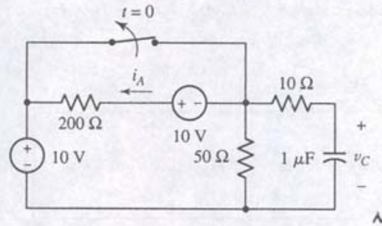
شکل ۸-۷۳

۳۷. پس از مدتی، کلید در شکل ۸-۷۴، در t = 0 باز شده است. مقادیر (الف) $i_s(0^-)$، (ب) $i_x(0^-)$، (ج) $i_x(0^+)$، (د) $i_s(0^+)$ و (ه) $i_s(0.4s)$ را بیابید.

۳۸. پس از مدتی طولانی، در شکل ۸-۷۵ کلید در t = 0 باز شده است. (الف) $v_C(t)$ را برای $t > 0$ بیابید. (ب) مقادیر $i_A(-100\mu s)$ و $i_A(100\mu s)$ را پیدا کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.

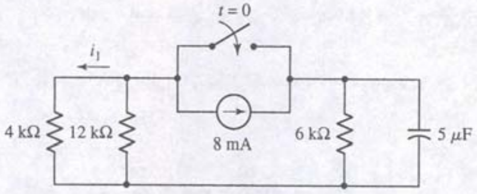


شکل ۸-۷۴



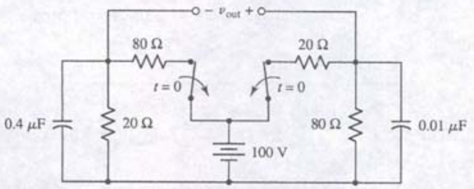
شکل ۸-۷۵

۳۹. پس از مدتی از مونتاژ مدار شکل ۸-۷۶ کلید در t = 0 بسته شده است. (الف) $i_1(t)$ را برای $t < 0$ پیدا کنید. (ب) $i_1(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.



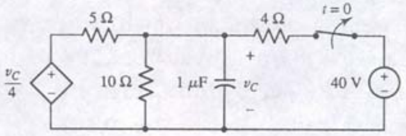
شکل ۸-۷۶

۴۰. مدتی پس از مونتاژ شکل ۸-۷۷، هر دو کلید در t = 0 به‌طور همزمان باز شده‌اند. (الف) عبارتی برای v_{out} در $t > 0$ به‌دست‌آورید. (ب) مقادیر v_{out} را در $t = 0^+$ و در $1\mu s$ و $5\mu s$ به‌دست‌آورید.



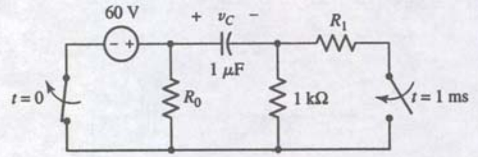
شکل ۸-۷۷

۴۱. (الف) فرض کنید که مدار شکل ۸-۷۸ از مدت‌ها قبل به همان شکل است. $v_C(t)$ را برای همه زمان‌های t پس از بازشدن کلیدها به‌دست‌آورید. (ب) $v_C(t)$ را در $t = 3\mu s$ محاسبه کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.



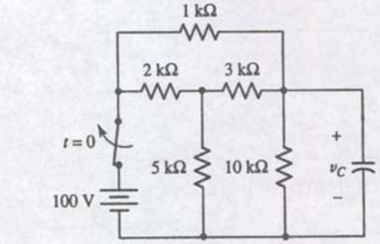
شکل ۸-۷۸

۴۲. مقادیر R_0 و R_1 را در شکل ۸-۷۹ طوری معین کنید که در t = 0.5ms مقدار $v_C = 50V$ و در t = 2ms مقدار $v_C = 25V$ باشد.



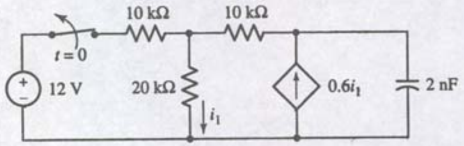
شکل ۸-۷۹

۴۳. برای مدار شکل ۸-۸۰ $v_C(t)$ را برای (الف) $t < 0$ و (ب) $t > 0$ معین کنید.



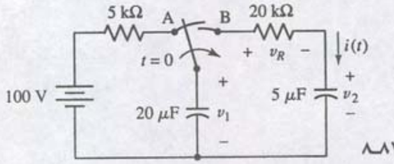
شکل ۸-۸۰

۴۴. $i_1(t)$ را برای $t < 0$ و $t > 0$ در مدار شکل ۸-۸۱ به‌دست‌آورید.



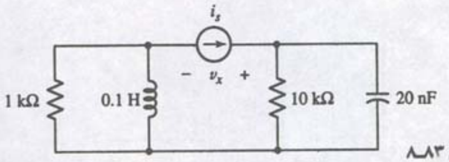
شکل ۸-۸۱

۴۵. در شکل ۸-۸۲ کلید در t = 0 از A به B رفته است. این کار دو خازن را سری می‌کند و لذا اجازه می‌دهد تا ولتاژهای dc مخالف و برابری در خازن‌ها به تله بیفتد. (الف) $v_1(0^-)$، $v_2(0^-)$ و $v_R(0^-)$ را بیابید. (ب) $v_1(0^+)$، $v_2(0^+)$ و $v_R(0^+)$ را به‌دست‌آورید. (ج) ثابت زمانی $v_R(t)$ را معین کنید. (د) در $t > 0$ مقدار $v_R(t)$ چیست؟ (ه) $i(t)$ را پیدا کنید. (و) v_1 و $v_2(t)$ را از $i(t)$ و مقادیر اولیه پیدا کنید. (و) نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در t = ∞ به علاوه انرژی تلف‌شده در مقاومت 20kΩ برابر با انرژی ذخیره‌شده در خازن در t = 0 است.



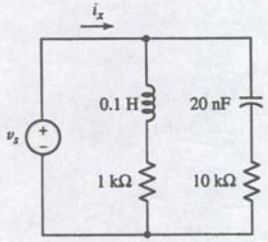
شکل ۸-۸۲

۴۶. مقدار i_s در مدار شکل ۸-۸۳ برابر 1mA در $t < 0$ و صفر در $t > 0$ است. مقدار $v_x(t)$ را برای (الف) $t < 0$ و (ب) $t > 0$ بیابید.



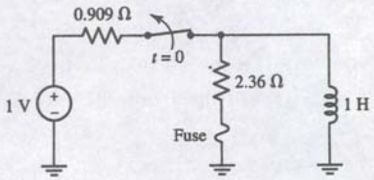
شکل ۸-۸۳

۴۷. مقدار v_s در مدار شکل ۸-۸۴ برای $t < 0$ برابر 20V است و $t > 0$ برابر صفر می‌باشد. $i_x(t)$ را برای (الف) $t < 0$ و (ب) $t > 0$ به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۸۴

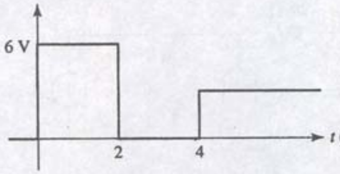
۴۸. کلید در شکل ۸-۸۵ برای مدت چند ساعت بسته بوده است. فیوز نوع خاصی از مقاومت است که اگر جریان برای مدتی بیش از 100ms از 1A تجاوز کند می‌سوزد. مقاومت فیوز 3mΩ است. اگر کلید در t = 0 باز شود، آیا فیوز خواهد سوخت؟ جواب را با PSpice پیدا کنید.



شکل ۸-۸۵

۸-۵ تابع پله واحد

۴۹. با استفاده از تابع پله واحد عبارتی که شکل ۸-۸۶ را توصیف کند بنویسید.

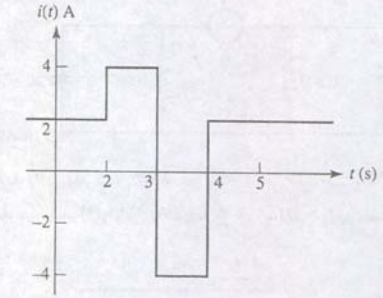


شکل ۸-۸۶

۵۰. با استفاده از توابع پله واحد شکل موج ۸-۸۷ را توصیف کنید.

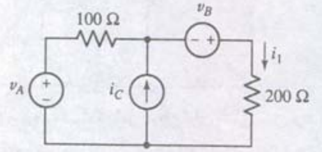
۵۱. با فرض $f(t) = 6u(-t) + 6u(t + 1) - 3u(t + 2)$، تابع $f(t)$ را در t برابر با (الف) 1-، (ب) 0^-، (ج) 0^+، (د) 1.5 و (ه) 3 ارزیابی کنید.

۵۲. با فرض $g(t) = 9u(t) - 6u(t + 10) + 3u(t + 12)$، $g(t)$ را در t برابر با (الف) 11-، (ب) 0^+، (ج) 5، (د) 11 و (ه) 30 ارزیابی کنید.



شکل ۸.۸۷

۸.۵۳. مقادیر منبع در مدار شکل ۸.۸۸ عبارتند از $v_A = 300u(t-1)$ V، $v_B = -120u(t+1)$ V و $i_C = 3u(-t)$A. i_1 را در $t = -1.5, -0.5, 0.5, 1.5$ پیدا کنید.

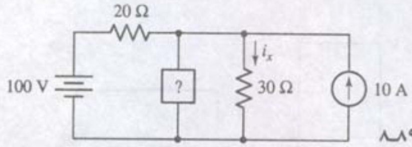


شکل ۸.۸۸

۸.۵۴. مقادیر منبع برای شکل ۸.۸۸ عبارتند از $v_A = 600tu(t+1)$ V، $v_B = 600(t+1)u(t)$ V و $i_C = 6(t-1)\,u(t-1)$ A. i_1 را برابر با $-2.5 < t < 2.5$s رسم کنید.

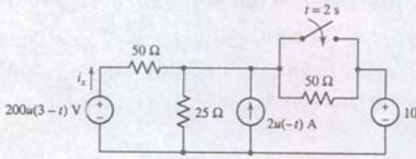
۸.۵۵. در $t = 2$ مقدار (الف) $2u(1-t) - 3u(t-1) - 4u(t+1)$؛ (ب) $[5 - u(t)][2 + u(3-t)][1 - u(1-t)]$ و (ج) $4e^{-u(3-t)}u(3-t)$ را پیدا کنید.

۸.۵۶. در مدار شکل ۸.۸۹ مقدار i_x را برای $t < 0$ و $t > 0$ پیدا کنید به‌شرطی‌که: (الف) یک کلید معمول باز در $t = 0$ بسته شود و موازی با باطری 60V باشد، مرجع + در بالا است. (ب) یک منبع ولتاژ، $60u(t)$V، مرجع + در بالا باشد.



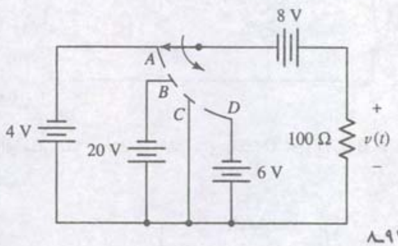
شکل ۸.۸۹

۸.۵۷. i_x را در مدار شکل ۸.۹۰ از $t = -0.5$s تا $t = 3.5$s با فواصل 1s پیدا کنید.



شکل ۸.۹۰

۸.۵۸. کلید در شکل ۸.۹۱ در $t < 0$ در وضعیت A قرارگرفته‌است. در $t = 0$ به B جابه‌جا می‌شود و سپس در $t = 4$s به C جابه‌جا می‌شود و بعد در $t = 6$s به D می‌رود و در آن‌جا می‌ماند. $v(t)$ را به‌عنوان تابعی از زمان رسم کنید و آن را به صورت مجموع توابع تحریک پله بیان کنید.

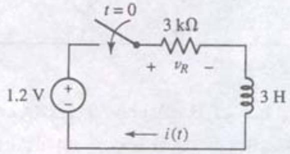


شکل ۸.۹۱

۸.۵۹. یک شکل موج در دو سر عنصر مجهول به صورت $7u(t) - 0.2u(t) + 8u(t-2) + 3$ V ظاهر می‌شود، (الف) ولتاژ را در $t = 1$s معین کنید. (ب) اگر جریان مربوطه در عنصر $3.5u(t) - 0.1u(t) + 4u(t-2) + 1.5$ A باشد، عنصر از چه نوع است و مقدار آن چیست؟

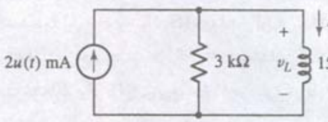
۸-۶ مدارهای RL واداشته

۸.۶۰. برای مدار شکل ۸.۹۲ (الف) عبارتی برای $v_R(t)$ معتبر در همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب) v_R را در $t = 2$ ms به دست آورید. (ج) حل خود را با بخش (ب) امتحان کنید.



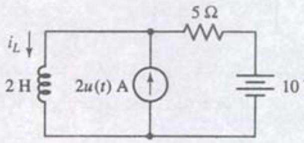
شکل ۸.۹۲

۸.۶۱. به شکل ۸.۹۳ مراجعه کنید. (الف) $i_L(t)$ را بیابید. (ب) از عبارت $i_L(t)$ برای یافتن $v_L(t)$ استفاده کنید.



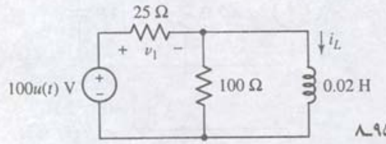
شکل ۸.۹۳

۸.۶۲. i_L را در مدار شکل ۸.۹۴ در زمان‌های داده‌شده به دست آورید. (الف) -0.5s، (ب) 0.5s و (ج) 1.5s.



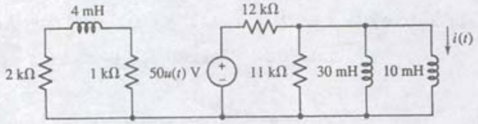
شکل ۸.۹۴

۸.۶۳. با مراجعه به شکل ۸.۹۵، عبارت جبری را برای: (الف) $i_L(t)$ و (ب) $v_1(t)$ به‌دست‌آورده و آن را رسم نمایید.



شکل ۸.۹۵

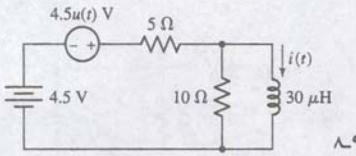
۸.۶۴. با مراجعه به مدار شکل ۸.۹۶ (الف) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 2kΩ را در $t = 1$ms محاسبه کنید. (ب) مقدار $i(t)$ را در $t = 3\mu s$ معین کنید. (ج) جریان اوج را در مقاومت 12kΩ به‌دست‌آورید. (د) پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۸.۹۶

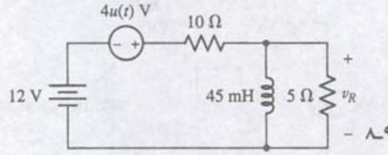
۸-۷ پاسخ طبیعی و واداشته

۸.۶۵. برای مدار شکل ۸.۹۷ (الف) عبارتی برای $i(t)$ در همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب) $i(t)$ را در $t = 1.5\ \mu s$ به دست آورید. (ج) نتیجه خود را با شبیه‌سازی به وسیله PSpice امتحان کنید.



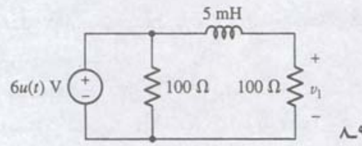
شکل ۸.۹۷

۸.۶۶. برای مدار شکل ۸.۹۸ (الف) عبارتی برای $v_R(t)$ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید. (ب) $v_R(t)$ را در $t = 2$ ms به دست آورید. (ج) نتیجه خود را با یک شبیه‌سازی PSpice امتحان کنید.



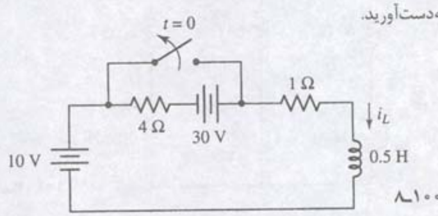
شکل ۸.۹۸

۸.۶۷. با مراجعه به شکل ۸.۹۹، $v_1(t)$ را در $t = 27\ \mu s$ محاسبه نمایید.



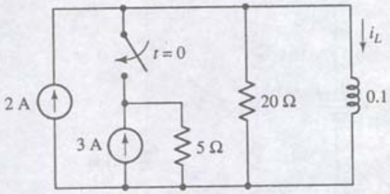
شکل ۸.۹۹

۸.۶۸. کلید در شکل ۸.۱۰۰ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. (الف) i_L را برای $t < 0$ به‌دست‌آورید. (ب) $i_L(t)$ را پس از بازشدن کلید در $t = 0$ به‌دست‌آورید.



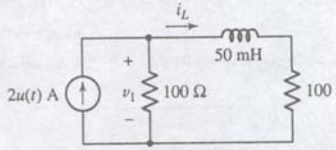
شکل ۸.۱۰۰

۸.۶۹. کلید در شکل ۸.۱۰۱ از مدت‌ها قبل باز بوده است. (الف) i_L را در $t < 0$ به‌دست‌آورید. (ب) $i_L(t)$ را برای همه زمان‌های t پس از بسته‌شدن کلید در $t = 0$ پیدا کنید.



شکل ۸.۱۰۱

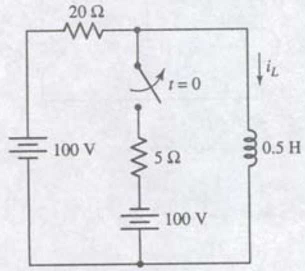
۸.۷۰. برای مدار شکل ۸.۱۰۲، مقادیر i_L و v_1 را در زمان‌های t برابر با (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (د) 0.2ms به‌دست‌آورید.



شکل ۸.۱۰۲

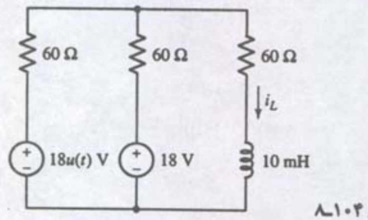
۸.۷۱. معادله (۳۳) در بخش ۸.۷ حل کلی مدار RL سری تحریک‌شده را نشان می‌دهد که در آن Q تابعی از زمان و A و P ثابتند. بگذارید $R = 125\Omega$ و $L = 5$H باشد. $i(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید، به‌شرطی‌که تابع تحریک Q(t) در (الف) 10V، (ب) $10u(t)$V، (ج) $10 + 10u(t)$ V و (د) $10u(t)\cos 50t$ V باشد.

۸.۷۲. کلید در شکل ۸.۱۰۳ از مدت‌ها قبل بسته بوده است (الف) i_L را برای $t < 0$ به‌دست‌آورید. (ب) درست پس از بازشدن کلید، $i_L(0^+)$ را پیدا کنید. (ج) $i_L(\infty)$ را پیدا کنید. (د) عبارتی برای $i_L(t)$ در $t > 0$ به‌دست‌آورید.



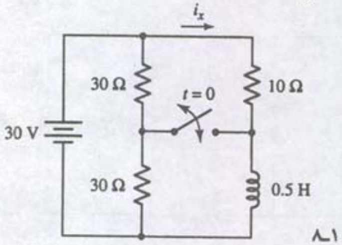
شکل ۸.۱۰۳

۷۳. i_L را برای همه زمان‌های t در شکل ۸-۱۰۴ به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۰۴

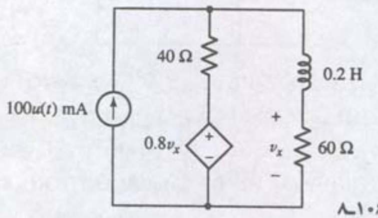
۷۴. فرض کنید کلید در شکل ۸-۱۰۵ از مدت‌ها قبل بسته بوده است و در $t = 0$ باز شود. i_x را در t برابر با (الف) 0^-، (ب) 0^+ و (ج) 40ms به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۰۵

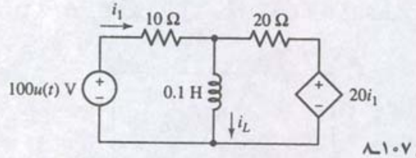
۷۵. فرض کنید کلید در شکل ۸-۱۰۵ از مدت‌ها قبل باز بوده و در $t = 0$ بسته شود. i_x را در زمان‌های t برابر با (الف) 0^-، (ب) 0^+ و (ج) 40ms به‌دست‌آورید.

۷۶. با مراجعه به شکل ۸-۱۰۶، v_x را برای تمام زمان‌ها به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۰۶

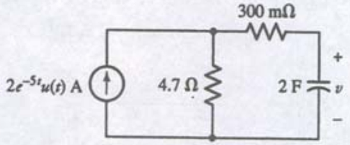
۷۷. با مراجعه به شکل ۸-۱۰۷، (الف) $i_L(t)$ را پیدا کنید. (ب) $i_1(t)$ را به‌دست‌آورید.



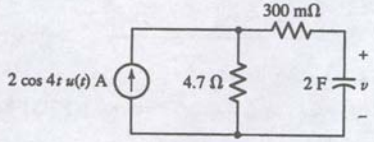
شکل ۸-۱۰۷

۷۸. عبارتی برای $v(t)$ در مدار شکل ۸-۱۰۸ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید.

۷۹. عبارتی برای $v(t)$ در مدار شکل ۸-۱۰۹ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید.



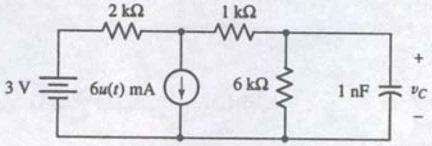
شکل ۸-۱۰۸



شکل ۸-۱۰۹

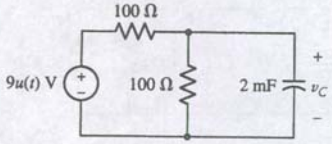
۸-۸ مدارهای RC واداشته

۸۰. (الف) v_C را در مدار شکل ۸-۱۱۰ در $t = -2\mu s$ و $t = 2\mu s$ پیدا کنید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق نمایید.



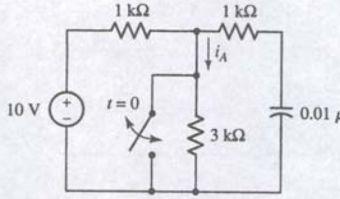
شکل ۸-۱۱۰

۸۱. با مراجعه به مدار RC در شکل ۸-۱۱۱ عبارتی برای $v_C(t)$، معتبر در همه زمان‌ها بیابید.



شکل ۸-۱۱۱

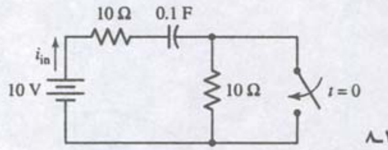
۸۲. پس از مدت مدیدی بسته‌بودن، کلید شکل ۸-۱۱۲ در $t = 0$ باز می‌شود. i_A را برای همه زمان‌ها به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۱۲

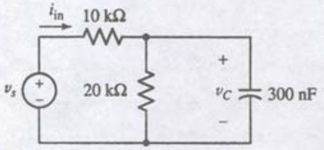
۸۳. سوئیچ شکل ۸-۱۱۲، پس از مدتی بازبودن در $t = 0$ بسته می‌شود. i_A در تمام زمان‌ها به دست آورید.

۸۴. کلید از مدت‌ها قبل در شکل ۸-۱۱۳ باز بوده است. این کلید ناگهان در $t = 0$ بسته می‌شود. i_{in} را در t (الف) -1.5s و (ب) 1.5s به‌دست‌آورید.



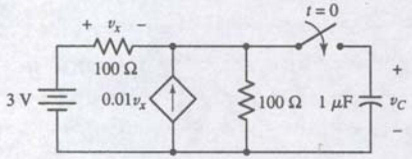
شکل ۸-۱۱۳

۸۵. اجازه بدهید در مدار شکل ۸-۱۱۴، $v_s = -12u(-t) + 24u(t)$ V باشد. در فاصله زمانی $-5ms < t < 5ms$، برای کمیت (الف) $v_C(t)$ و (ب) $i_{in}(t)$ عبارت جبری به‌دست‌آورید و آن‌ها را رسم کنید.



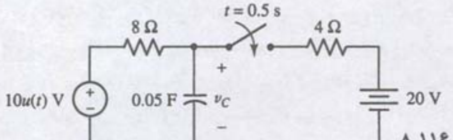
شکل ۸-۱۱۴

۸۶. در مدار شکل ۸-۱۱۵، v_C را برای $t > 0$ پیدا کنید.



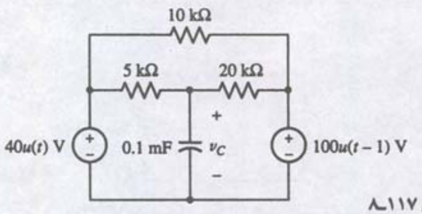
شکل ۸-۱۱۵

۸۷. مقدار $v_C(t)$ را در $t = 0.4$ و 0.8s در شکل ۸-۱۱۶ به‌دست‌آورید.



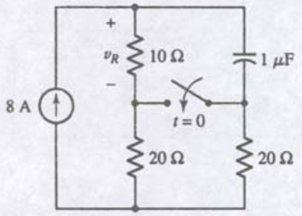
شکل ۸-۱۱۶

۸۸. در مدار شکل ۸-۱۱۷: (الف) $v_C(t)$ را برای همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب) $v_C(t)$ را برای $-1 < t < 2s$ رسم کنید. صحت حل خود را با PSpice تحقیق نمایید.



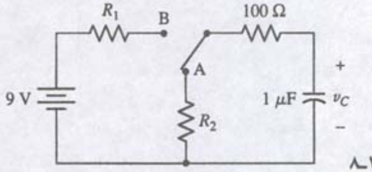
شکل ۸-۱۱۷

۸۹. در مدار شکل ۸-۱۱۸، (الف) $v_R(t)$ را برای $t < 0$ و (ب) $t > 0$ پیدا کنید. اکنون فرض کنید که این کلید که برای مدت‌ها بسته بوده در $t = 0$ باز شود. $v_R(t)$ را برای (ج) $t < 0$ و (د) $t > 0$ به‌دست‌آورید.



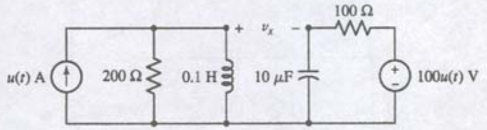
شکل ۸-۱۱۸

۹۰. کلید در شکل ۸-۱۱۹ از مدت‌ها قبل در A بوده است. در $t = 0$ به B برده می‌شود، و در $t = 1ms$ به A بازگردانده می‌شود. R_1 و R_2 را طوری تعیین کنید که $v_C(1ms) = 8V$ و $v_C(2ms) = 1V$ باشد.



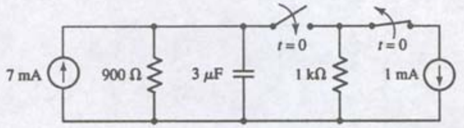
شکل ۸-۱۱۹

۹۱. برای شکل ۸-۱۲۰ اولین زمان پس از $t = 0$ را که در آن برای اولین بار $v_x = 0$ است، مشخص کنید.



شکل ۸-۱۲۰

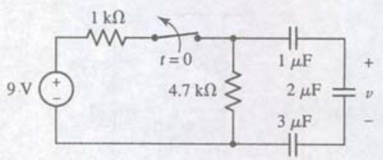
۹۲. در مدار شکل ۸-۱۲۱، یک کلید در $t = 0$ باز و دیگری همزمان بسته می‌شود. توان جذب‌شده با مقاومت 1kΩ در فاصله $-1ms < t \leq 7ms$ را به‌دست‌آورید. در $t = 0$ منبع 1mA نیز خاموش شده است.



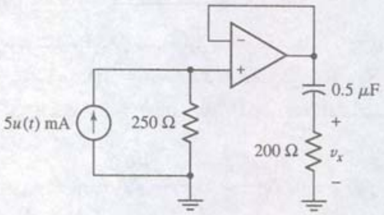
شکل ۸-۱۲۱

۹۳. اگر کلید در شکل ۸-۱۲۲ برای مدتی بسته بوده باشد، (الف) v را در $t = 5.45ms$ معین کنید. (ب) توان تلف‌شده به وسیله مقاومت 4.7kΩ را در $t = 1.7ms$ به‌دست‌آورید. (ج) انرژی کل تبدیل‌شده به حرارت در مقاومت 4.7kΩ پس از بازشدن کلید محاسبه کنید.

۹۴. فرض کنید که op amp شکل ۸-۱۲۳ ایده‌آل باشد. $v_x(t)$ را برای همه زمان‌های t پیدا کنید.

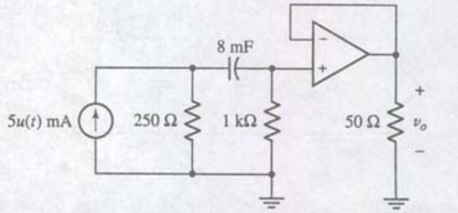


شکل ۱۲۲ـ۸



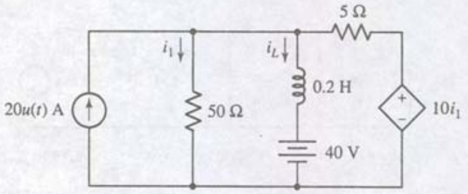
شکل ۱۲۳ـ۸

۹۵. فرض کنید که op amp در شکل ۱۲۴ـ۸، ایده‌آل باشد. (الف) $v_0(t)$ را برای همهٔ زمان‌های t بیابید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید (**راهنمایی**: می‌توانید توابع را با probe رسم کنید و برای این کار با واردکردن عبارت در جعبه Trace Expression انجام دهید).



شکل ۱۲۴ـ۸

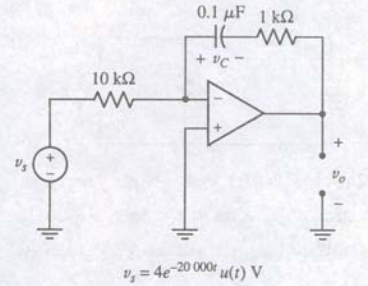
۹۶. (الف) در مدار RL شکل ۱۲۵ـ۸، $i_L(0)$ را بیابید. با PSpice و مقدار اولیه بخش (الف) i_L را در $t = 50ms$ به‌دست‌آورید.



شکل ۱۲۵ـ۸

۹۷. (الف) فرض کنید که op amp شکل ۱۲۶ـ۸ ایده‌آل و $v_C(0) = 0$ باشد. $v_0(t)$ را برای همهٔ زمان‌ها به‌دست‌آورید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید (**راهنمایی**: می‌توانید توابع را با واردکردن عبارت در Trace Expression انجام دهید).

۹۸. مداری طراحی کنید که پس از خاموش‌شدن کلید 5s روشن باقی بماند. لامپ را 40W و تغذیه ac را 115V فرض کنید.



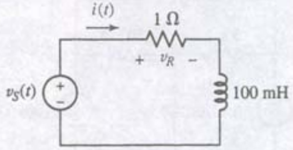
شکل ۱۲۶ـ۸

۹۹. یک آشکارساز حرکت که به عنوان بخشی از سیستم حفاظتی به‌کاررفته است نسبت به تغییرات منبع الکتریکی حساس به نظر می‌رسد. یک راه‌حل واردکردن مدار تأخیر بین سنسور و مدار آلارم است تا اعلان خطاهای غلط حداقل شود. فرض کنید معادل تونن سنسور مقاومتی 2.37kΩ سری با منبع 1.5V باشد و مقاومت معادل تونن آلارم نیز 1MΩ است. مداری طراحی کنید که بتواند بین سنسور و مداری که حداقل تأخیر 1 ثانیه تولید کند قرار گیرد. مدار سنسور/آلارم به طریق زیر کار می‌کند: سنسور مرتباً جریان کوچکی به آلارم می‌فرستد مگر این‌که حرکتی شناسایی شود. در این حال جریان متوقف می‌گردد.

۹ـ۸ پیش‌بینی پاسخ مدارهای سوئیچ‌شده متوالی

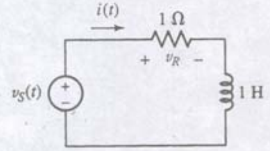
۱۰۰. (الف) یک موج پالسی PSpice برای مدل موج ولتاژ v_B مسئله ۵۳ بسازید و با Prob آن را رسم نمایید (**راهنمایی**: منبع را به یک مقاومت برای انجام یک شبیه‌سازی وصل کنید). (ب) یک شکل موج در PSpice برای مدل‌سازی موج i_C در مسئله ۵۳ ساخته و آن را با Probe رسم کنید.

۱۰۱. ولتاژ مقاومت v_R مدار شکل ۱۲۷ـ۸ را در پاسخ به یک موج $v_s(t)$ رسم کنید. حداقل مقدار $v_s(t)$ برابر 0 V است و حداکثر آن 3 V می‌باشد، پهنای پالس 2 s و پریود 5 s است. شکل خود را بین $0 \le t \le 20$ s ترسیم کنید. (ب) نمودار خود را با اجرای PSpice امتحان کنید.



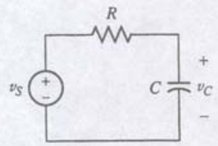
شکل ۱۲۷ـ۸

۱۰۲. جریان القاگر i در مدار شکل ۱۲۸ـ۸ را در پاسخ به موج پالسی $v_s(t)$ رسم کنید. حداقل مقدار $v_s(t)$ برابر 0 V است و حداکثر آن 5 V می‌باشد، پهنای پالس 5 s و پریود 5.5 s است. ترسیم خود را بین $0 \le t \le 20$ s ... کنید. (ب) نمودار خود را با اجرای PSpice امتحان کنید.



شکل ۱۲۸ـ۸

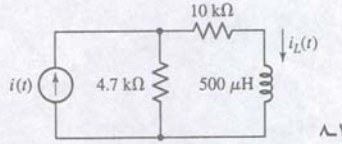
۱۰۳. منبع ولتاژ v_s شکل ۱۲۹ـ۸ یک منبع پالسی با حداقل مقدار 2 V و حداکثر 10 V می‌باشد. پهنای پالس 4 RC است. نمودار ولتاژ خازن را اگر زمان بین پالس‌های v_s برابر با (الف) 0.1 RC؛ (ب) RC؛ و (ج) 10 RC باشد را رسم نمایید.



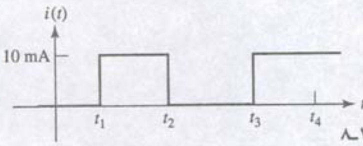
شکل ۱۲۹ـ۸

۱۰۴. با مراجعه به مدار شکل ۱۳۰ـ۸، $i_L(t)$ را در پریود $0 \le t \le t_4$ رسم کنید به شرطی که $i(t)$ طبق شکل ۱۳۱ـ۸ باشد.

(الف) $t_1 = 4$ ns، $t_2 = 160$ ns، $t_3 = 164$ ns، $t_4 = 200$ ns؛ (ب) $t_1 = 150$ ns، $t_2 = 300$ ns، $t_3 = 450$ ns و $t_4 = 500$ ns؛ (ج) $t_1 = 150$ ns، $t_2 = 200$ ns، $t_3 = 350$ ns و $t_4 = 400$ ns.



شکل ۱۳۰ـ۸



شکل ۱۳۱ـ۸

فصل نهم

مدار RLC

مفاهیم کلیدی

- فرکانس تشدید و ضریب میرایی مدارهای RLC سری و موازی
- پاسخ فوق میرا
- پاسخ میرای بحرانی
- پاسخ زیرمیرا
- پاسخ کامل مدارهای RLC (طبیعی + واداشته)

مقدمه

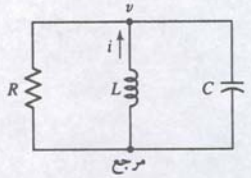
بحث ما در فصل قبل خصوصاً روی مدارهای مقاومتی با خازن و یا با القاگر، و نه هر دو، متمرکز بود. وجود القاکنایی و ظرفیت در یک مدار حداقل یک سیستم **مرتبه دو** را تولید می‌کند که با یک معادله دیفرانسیل خطی با مشتق مرتبه دو یا با دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همزمان نشان داده می‌شود. این افزایش مرتبه معادله موجب می‌شود تا دو ثابت اختیاری لازم باشد. به علاوه، باید مقادیر اولیه‌ای را برای مشتق‌ها معین کرد. خواهیم دید چنین مدارهایی که اغلب به نام مدارهای RLC معروفند، نه تنها در عمل به کرات دیده می‌شوند، بلکه برای مدل‌کردن دیگر سیستم‌ها هم مورد استفاده‌اند. مثلاً یک مدار RLC می‌تواند برای مدل‌سازی سیستم تعلیق یک اتومبیل، رفتار یک کنترل‌گر دما در رشد کریستال نیمه هادی و حتی پاسخ یک هواپیما به کنترل‌های بالابر و شهپر به‌کارگرفته شود.

۹ـ۱ مدار موازی بدون منبع

اولین کار تعیین پاسخ طبیعی است که دوباره به طریقی مناسب از بررسی مدار بدون منبع حاصل می‌شود. آن‌گاه می‌توانیم منابع dc، کلیدها یا منابع پله را در مدار لحاظ نماییم، تا دوباره پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ طبیعی واداشته، به‌دست‌آوریم.

کار خود را با تعیین پاسخ طبیعی مدار ساده حاصل از اتصال موازی R، L و C آغاز می‌کنیم. این ترکیب خاص عناصر ایده‌آل مدل خوبی برای بسیاری از قسمت‌های مختلف در شبکه‌های مخابراتی است. مثلاً این ترکیب بخش عمده‌ای از مدارهای تقویت‌کننده لکترونیک موجود در گیرنده‌های رادیویی می‌باشد و تقویت‌کننده‌ها را در تولید ولتاژ تقویت‌شده‌ای در باند باریکی از فرکانس‌ها و تقریباً صفر در خارج این باند توانمند می‌سازد. قابلیت انتخاب فرکانس ما را قادر می‌سازد تا به مراسلات یک ایستگاه گوش فرا دهیم، ضمن این‌که دیگر ایستگاه‌ها حذف می‌شوند. از جمله دیگر کاربردها می‌توان از مدارهای RLC موازی در ساخت مولتی‌پلکسرها و فیلترهای حذف هارمونیک نام برد. در هر صورت حتی، بحث ساده‌ای از این گونه لازم می‌دارد تا با مفاهیمی چون تشدید (رزونانس) پاسخ فرکانس و مپدانس آشنا شویم. بنابراین اجازه بدهید بگوییم درک رفتار طبیعی یک مدار RLC موازی اساس مطالعات آینده در شبکه‌های مخابرات و طراحی فیلترها و نیز کاربردهای دیگر است.

وقتی‌که یک خازن واقعی با یک القاگر موازی شود و ضمناً خازن دارای مقاومت معینی هم باشد، شبکه حاصل مدلی شبیه به شکل ۱ـ۹ را خواهد داشت. وجود این مقاومت می‌تواند مدل تلاف انرژی در خازن را در مدت زمان موردنظر توجیه کند. می‌دانیم که همه خازن‌ها حتی اگر قطع هم باشند نهایتاً دشارژ می‌شوند. می‌توان اتلاف انرژی در القاگر را هم با جمع یک مقاومت ایده‌آل سری با آن به حساب آورد. با این وجود به خاطر سادگی ما بحث خود را که در آن القاگر با خازن موازی نشتی‌دار موازی است، محدود می‌کنیم.



شکل ۱ـ۹ مدار RLC موازی بدون منبع.

معادله دیفرانسیل برای مدار RLC موازی

در تحلیل زیر فرض بر این است‌که انرژی در آغاز در هر دو عنصر خازن و القاگر ذخیره شده باشد. به بیان دیگر مقادیر اولیه غیرصفری از جریان القاگر و ولتاژ خازن وجود دارد. با مراجعه به شکل ۱ـ۹ می‌توان معادله زیر را روی تنها گره نوشت:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (۱)$$

توجه کنید که علامت منها از جهت فرضی i ناشی شده است. ما باید معادله (۱) را با توجه به مقادیر اولیه

$$i(0^+) = I_0 \qquad (۲)$$

$$v(0^+) = V_0 \qquad (۳)$$

حل کنیم. وقتی از هر دو طرف معادله (۱) نسبت به زمان یک بار مشتق بگیریم، حاصل معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم زیر است.

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad (۴)$$

که حل $v(t)$ پاسخ طبیعی مورد نظر است.

حل معادله دیفرانسیل

برای حل معادله (۴) روش‌های جالب و متعددی وجود دارد. بسیاری از این روش‌ها را به درس معادلات دیفرانسیل واگذار می‌کنیم. در این‌جا تنها سریع‌ترین و ساده‌ترین روش را به‌کارمی‌گیریم. ما بر اساس دانسته‌ها و تجربیات خود یکی از چند فرم را که مناسب‌تر است انتخاب می‌کنیم. تجربیات ما با معادلات مرتبه اول ممکن‌است چنین حکم کند که فرم نمایی پاسخ را یک بار دیگر آزمایش کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$v = Ae^{st} \qquad (۵)$$

باشد و به‌طورکلی اجازه می‌دهیم A و s به صورت مختلط (در صورت لزوم) باشند. از جایگزینی معادله (۵) در معادله (۴) داریم:

$$CAs^2e^{st} + \frac{1}{R}Ase^{st} + \frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

یا

$$Ae^{st}\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0$$

برای این‌که معادله فوق در همه زمان‌ها صحیح باشد، حداقل یکی از سه فاکتور باید برابر صفر گردد. اگر یکی از دو فاکتور اول را صفر فرض کنیم، آنگاه $v(t) = 0$ می‌شود. این حلی غلط از معادله دیفرانسیل است چون نمی‌تواند مقادیر اولیه ما را تأیید نماید. بنابراین فاکتور سوم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0 \qquad (۶)$$

ریاضی‌دانان این معادله را معمولاً **معادله کمکی** یا **معادله مشخصه** می‌خوانند. اگر این رابطه برقرار باشد آنگاه حل فرض‌شده، صحیح خواهد بود. چون معادله (۶) یک معادله مرتبه دوم است، دو حل s_1 و s_2 برای آن وجود دارد:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (۷)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (۸)$$

هر یک از این دو مقدار برای s می‌تواند حل موردنظر باشد، آنگاه حل مذکور در معادله دیفرانسیل مربوط باید صدق کند. در این صورت حل معتبری از معادله دیفرانسیل را به‌دست‌آورده‌ایم.

اکنون فرض کنید که s را در معادله (۵) با s_1 جایگزین کنیم، در این صورت:

$$v_1 = A_1e^{s_1t}$$

و به‌طورمشابه:

$$v_2 = A_2e^{s_2t}$$

اولین پاسخ را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$C\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

دومین پاسخ را نیز در معادله قرار می‌دهیم:

$$C\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

از جمع این دو معادله دیفرانسیل و ترکیب جملات مشابه داریم:

$$C\frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

با توجه به خاصیت خطی، می‌بینیم که جمع دو حل نیز یک حل است. بنابراین پاسخ طبیعی به فرم زیر است:

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \qquad (۹)$$

که در آن s_1 و s_2 با معادلات (۷) و (۸) داده شده‌اند، A_1 و A_2 دو ثابت اختیاری‌اند که باید طوری انتخاب شوند تا مقادیر اولیه تأیید گردند.

تعریف جملات فرکانس

فرم پاسخ طبیعی معادله (۹) اطلاعات کمی را از طبیعت منحنی $v(t)$ برحسب تابعی از زمان به‌دست‌می‌دهد. مثلاً دامنه‌های A_1 و A_2 مطمئناً در شکل منحنی پاسخ نقش عمده‌ای دارند. به علاوه ثابت‌های s_1 و s_2 بسته به مقادیر R، L و C در شبکه می‌توانند اعداد حقیقی یا مزدوج مختلط باشند. از هر دو نوع مذکور پاسخ‌هایی به‌دست‌می‌آید که تفاوت بنیادی دارند. بنابراین، برخی جایگزینی‌ها در معادله (۹) برای ساده‌سازی مفید خواهد بود.

چون نماهای s_1t و s_2t بدون بعد هستند، s_1 و s_2 باید کمیتی بدون بعد بر ثانیه باشد. بنابراین از معادلات (۷) و (۸) درمی‌یابیم که واحد $1/2RC$ و $1/\sqrt{LC}$ هم باید s^{-1} (یعنی $\frac{1}{\text{ثانیه}}$) باشد. این نوع واحد را فرکانس می‌نامیم.

اجازه بدهید تا عبارت $1/\sqrt{LC}$ را با ω_0 نشان دهیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۱۰)$$

که به آن فرکانس **رزنانس یا تشدید** گویند. از طرف دیگر $1/2RC$ را فرکانس نپر، یا ضریب میرایی نمایی یا استهلاک گفته و آن را با α (آلفا) نشان می‌دهند:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (۱۱)$$

نام آخری که برای این پارامتر فوق درنظر گرفته شده است به این علت است که α سرعت استهلاک پاسخ طبیعی به سمت حالت ماندگار یا مقدار نهایی را نشان می‌دهد (معمولاً صفر). بالاخره s، s_1 و s_2 که کمیت‌های مبنا برای کارهای بعدی ما هستند، **فرکانس‌های مختلط** خوانده می‌شوند.

باید توجه داشت که s_1، s_2، α و ω_0 فقط نمادها یا سمبل‌هایی هستند که بحث مدارهای RLC را ساده کنند و چیز تازه و اسرارآمیزی را نشان نمی‌دهند. مثلاً ساده‌تر است بگوییم "آلفا" تا این‌که بگوییم "عکس 2RC".

اکنون بیایید اطلاعات را سرجمع کنیم. پاسخ فرکانس مدار RLC برابر است با:

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \qquad (۹)$$

که

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (۱۲)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (۱۳)$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (۱۱)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۱۰)$$

که A_1 و A_2 باید با اعمال مقادیر اولیه مشخص شوند.

ملاحظه می‌کنید که بسته به اندازه‌های نسبی α و ω_0 که به وسیله مقادیر R، L و C دیکته می‌شود دو سناریوی مبنا وجود دارد. اگر $\omega_0 < \alpha$ باشد، هم s_1 و هم s_2 اعداد حقیقی خواهند بود، و منجر به وضعیتی به نام پاسخ فوق میرا می‌گردد. در مقابل آن، که $\alpha < \omega_0$ است، هم s_1 و هم s_2 مولفه‌های موهومی غیرصفر خواهند داشت که این یکی هم پاسخ زیر میرا را در پی دارد. در بخش‌های زیر هر دو وضعیت جداگانه همراه با حالت خاص $\alpha = \omega_0$ که پاسخ میرای بحرانی است، بررسی خواهند شد. همچنین باید توجه داشت که پاسخ کلی که به وسیله معادلات (۹) تا (۱۳) بیان شده‌اند، نه فقط ولتاژ، بلکه هر سه جریان انشعاب‌ها در مدار RLC موازی را به دست می‌دهند، البته A_1 و A_2 برای هر کدام متفاوت است.

مثال ۹ـ۱

مدار موازی RLC دارای القاگر 10 mH و خازن 100 μF است. مقادیر مقاومتی که به پاسخ‌های زیرمیرا و فوق میرا منجر می‌شود را معین کنید.

ابتدا فرکانس تشدید مدار را به دست می‌آوریم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10\times10^{-3})(100\times10^{-6})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

یک پاسخ فوق میرا به شرطی وجود دارد که $\omega_0 < \alpha$ باشد و پاسخ زیرمیرا هم در $\alpha < \omega_0$ وجود دارد. پس:

$$\frac{1}{2RC} > 10^3$$

و لذا:

$$R < \frac{1}{(2000)(100\times10^{-6})}$$

یا

$$R < 5\,\Omega$$

منجر به پاسخ فوق میرا می‌شود؛ $R > 5\,\Omega$ پاسخ زیرمیرا تولید می‌کند.

تمرین

۹ـ۱ مدار RLC موازی حاوی مقاومت 100Ω و مقادیر پارامتر $\alpha = 1000s^{-1}$ و $\omega_0 = 800$ rad/s است. مطلوبست: (الف) C، (ب) L، (ج) s_1 و (د) s_2.

جواب: 5μF، 312.5mH، $-400s^{-1}$ و $-1600s^{-1}$.

۹ـ۲ مدار RLC موازی فوق میرا

مقایسه معادلات (۱۰) و (۱۱) نشان می‌دهد که اگر $LC > 4R^2C^2$ باشد آنگاه α بزرگ‌تر از ω_0 خواهد شد. در این حالت جذر موجود مقداری حقیقی خواهد بود، هر دو مقدار s_1 و s_2 حقیقی‌اند. علاوه بر آن نامعادلات زیر

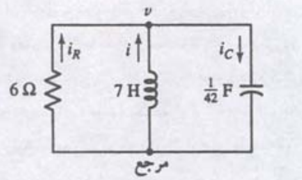
$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0$$

می‌توانند به معادلات (۱۲) و (۱۳) اعمال شوند و مشاهده شود که s_1 و s_2 هر دو اعداد حقیقی منفی‌اند. بنابراین پاسخ $v(t)$ به صورت جمع دو جمله نمایی کاهشی بیان می‌شود. در واقع چون مقدار مطلق s_2 بزرگ‌تر از s_1 است، جمله حاوی s_2 سرعت کاهش بیشتری دارد و در زمان‌های طولانی می‌توانیم حد عبارت را بنویسیم:

$$v(t) \to A_1e^{s_1t} \to 0 \qquad \text{با} \qquad t \to \infty$$

گام بعدی تعیین ثابت‌های A_1 و A_2 در رابطه با مقادیر اولیه می‌باشد. به‌خاطر سادگی $R = 6\Omega$، $L = 7H$ و $C = \frac{1}{42}F$ را انتخاب می‌کنیم. انرژی ذخیره‌شده اولیه با ولتاژ اولیه دو سر خازن $v(0) = 0$، و جریان اولیه القاگر $i(0) = 10A$ مشخص می‌شوند که v و i در شکل ۹ـ۲ تعریف شده‌اند.



شکل ۹ـ۲ مدار RLC موازی به‌عنوان مثال عددی. این مدار فوق میراست.

می‌توان به راحتی مقادیر چند پارامتر را معین کرد:

$$\alpha = 3.5 \qquad \omega_0 = \sqrt{6} \qquad (\text{واحد همه } s^{-1} \text{ است})$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -6$$

اکنون می‌توانیم بلافاصله شکل کلی پاسخ طبیعی را بنویسیم:

$$v(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-6t} \qquad (۱۴)$$

تعیین مقادیر A_1 و A_2

تنها ارزیابی دو ثابت A_1 و A_2 باقی مانده است. اگر پاسخ $v(t)$ را در دو لحظه از زمان می‌دانستیم، این دو مقدار قابل جایگزینی در معادله (۱۴) بوده و به این ترتیب A_1 و A_2 به‌دست‌می‌آمد. با این وجود ما فقط یک مقدار $v(t)$ را می‌دانیم:

$$v(0) = 0$$

و بنابراین:

$$0 = A_1 + A_2 \qquad (۱۵)$$

می‌توانیم دومین معادله را برای A_1 و A_2 از مشتق $v(t)$ نسبت به زمان در معادله به‌دست‌آوریم و مقدار اولیه این مشتق را از شرط اولیه باقیمانده $i(0) = 10$ معین کنیم و آنگاه نتایج را با هم برابر نماییم. پس از دو طرف معادله (۱۴) مشتق می‌گیریم،

$$\frac{dv}{dt} = -A_1e^{-t} - 6A_2e^{-6t}$$

سپس مشتق را در $t = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

و به این ترتیب دومین معادله به‌دست‌می‌آید. گرچه ممکن‌است این رابطه مفید به‌نظربرسد ولی ما مقدار اولیه مشتق را نداریم و بنابراین هنوز برای دو مجهول، دو معادله نداریم، ... فکر می‌کنید داریم؟ عبارت $\frac{dv}{dt}$ همچون جریان خازن است، زیرا:

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

قانون جریان کیرشهف در هر لحظه از زمان صادق است و بر اصل بقاء الکترون مبتنی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

با جایگزینی عبارت جریان خازن و تقسیم بر C داریم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/s}$$

چون به علت ولتاژ صفر اولیه در دو سر مقاومت، جریان اولیه صفر است، بنابراین دومین معادله چنین خواهد بود:

$$420 = -A_1 - 6A_2 \qquad (۱۶)$$

از حل همزمان معادلات (۱۵) و (۱۶) دو دامنه $A_1 = 84$ و $A_2 = -84$ به‌دست‌می‌آیند. به این ترتیب حل عددی نهایی پاسخ طبیعی مدار برابر است با:

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \text{ V} \qquad (۱۷)$$

برای تداوم بحث در مدارهای RLC برای یافتن یک جواب کامل به دو شرط اولیه نیاز داریم. یکی از این شرایط یعنی ولتاژ یا جریان معمولاً به سادگی در $t = 0$ به‌دست‌می‌آید. تعیین شرط اولیهٔ دوم کمی دردسر دارد. ولی همیشه یک مقدار اولیهٔ ولتاژ و یک مقدار اولیهٔ جریان داریم که یکی از آن‌ها را باید به‌طور غیرمستقیم به مشتق اعمال کنیم.

مثال ۲ـ۹

عبارتی برای $v_C(t)$ برای $t > 0$ در مدار شکل ۳ـ۹ (الف) پیدا کنید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.

از ما خواسته شده است تا ولتاژ خازن را پس از پرتاب سوئیچ پیدا کنیم. این عمل منجر به حذف منابع متصل به القاگر و خازن می‌گردد؛ بنابراین انتظار داریم v_C در طول زمان میرا شود.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

پس از پرتاب سوئیچ، خازن با مقاومت 200 Ω و القاگر 5 mH (شکل ۳ـ۹ (ب)) موازی می‌شود. بنابراین $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100,000$ rad/s ، $\alpha = 1/2RC = 125,000\ s^{-1}$ ، $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -50,000\ s^{-1}$ و $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200,000\ s^{-1}$ خواهد شد.

- ارائه طرح.

چون $\alpha > \omega_0$ است، مدار فوق میرا است و لذا انتظار داریم ولتاژ خازن چنین باشد:

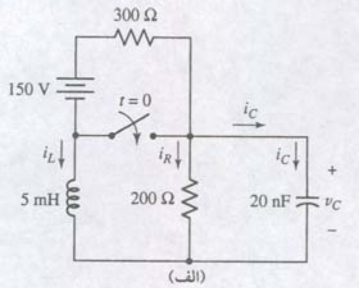
$$v_C(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

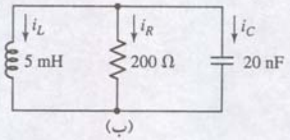
ما s_1 و s_2 را می‌دانیم. برای تعیین A_1 و A_2 لازم است دو مقدار اولیه داشته باشیم. برای این کار، ما مدار را در $t = 0^-$ (شکل ۴ـ۹ (الف)) تحلیل می‌نماییم تا $i_L(0^-)$ و $v_C(0^-)$ را پیدا کنیم. آنگاه مدار را در $t = 0^+$ تحلیل خواهیم کرد، با این فرض که هیچ مقداری عوض نشود.

- معادلات مناسب را بنویسید.

از شکل ۴ـ۹ (الف) که در آن القاگر با یک مدار اتصال کوتاه و خازن با یک مدار باز جایگزین شد، می‌بینیم که:

$$i_L(0^-) = -\frac{150}{200 + 300} = -300 \text{ mA}$$





شکل ۳ـ۹ (الف) مدار RLC تحلیل‌شده در $t = 0$ مثال ۲ـ۹. (ب) مدار در $t > 0$، منبع 150V و مقاومت 300Ω از مدار خارج شده‌اند.

و

$$v_C(0^-) = 150\frac{200}{200 + 300} = 60 \text{ V}$$

در شکل ۴ـ۹ (ب) ما مدار را در $t = 0^+$ رسم کرده‌ایم، که در آن جریان القاگر و ولتاژ خازن با منابع ایده‌آل به خاطر سادگی نشان داده شده است. چون هیچ کدام در مدت زمان صفر تغییر نمی‌کنند، داریم $v_C(0^+) = 60$ V.

- آیا اطلاعات دیگری لازم است.

ما معادله‌ای برای ولتاژ خازن داریم: $v_C(t) = A_1e^{-50,000t} + A_2e^{-200,000t}$. می‌دانیم که $v_C(0) = 60$ V است، اما هنوز معادله سومی لازم است. از معادله ولتاژ خازن خود مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv_C}{dt} = -50,000A_1e^{-50,000t} - 200,000A_2e^{-200,000t}$$

که می‌تواند به جریان خازن مرتبط شود، $i_C = C(dv_C/dt)$. با بازگشت به شکل ۴ـ۹ (ب)، KCL منجر می‌شود به:

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0.3 - \{v_C(0^+)/200\} = 0$$

- اقدام به حل.

اعمال اولین مقدار اولیه ما منتهی می‌شود به:

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 60$$

و اعمال مقدار اولیه دوم نتیجه می‌دهد:

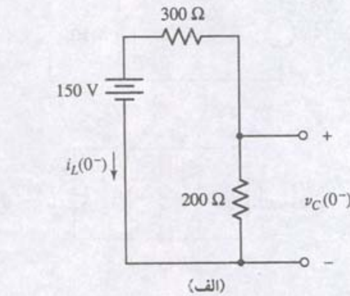
$$i_C(0) = -20 \times 10^{-9}(50,000A_1 + 200,000A_2) = 0$$

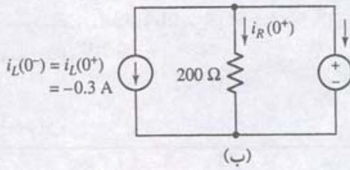
با حل آن‌ها داریم: $A_1 = 80$ V و $A_2 = -20$ V، بنابراین به ازای $t > 0$ داریم:

$$v_C(t) = 80e^{-50,000t} - 20e^{-200,000t} \text{ V}$$

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

حداقل حل خود را در $t = 0$ چک می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $v_C(0) = 60$ V است. با مشتق‌گیری و ضرب در 20×10^{-9} می‌توان نشان داد که $i_C(0) = 0$ است.



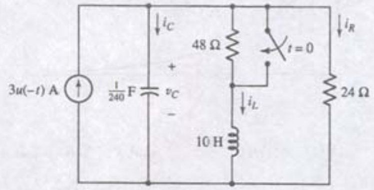


شکل ۴ـ۹ (الف) مدار معادل در $t = 0^-$ و (ب) مدار معادل در $t = 0^+$.

تمرین

۲ـ۹ پس از مدتی طولانی از باز بودن، کلیدی را در شکل ۵ـ۹ در $t = 0$ می‌بندیم. مطلوب است: (الف) $i_L(0^-)$، (ب) $v_C(0^-)$، (ج) $i_R(0^+)$، (د) $i_C(0^+)$ و (ه) $v_C(0.2)$.

جواب: 1A، 48V، 2A، -3A و -17.54V.



شکل ۵ـ۹

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرم پاسخ فوق میرا به هر کمیت جریان یا ولتاژ اعمال می‌گردد و ما آن را با مثال زیر می‌شکافیم.

مثال ۳ـ۹

مدار شکل ۶ـ۹ (الف) پس از $t = 0$ به یک مدار ساده RLC کاهش می‌یابد. عبارتی برای جریان مقاومت i_R معتبر در همه زمان‌ها پیدا کنید.

گر مدار بعد از $t > 0$ فوق میرا شود، ما انتظار داریم پاسخ به فرم زیر باشد:

$$i_R(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}, \qquad t > 0 \qquad (۱۸$$

رای $t > 0$ ما یک مدار موازی RLC با $R = 30$ kΩ، $L = 12$ mH و $C = 2$ pF داریم. بنابراین $\alpha = 8.333 \times 10^6\ s^{-1}$ و $\omega_0 = 6.455 \times 10^6$ rad/s خواهد بود. بنابراین ما انتظار داریم ک پاسخ فوق میرا با $s_1 = -3.063 \times 10^6\ s^{-1}$ و $s_2 = -13.60 \times 10^6\ s^{-1}$ داشته باشیم.

برای تعیین مقادیر عددی A_1 و A_2، ابتدا مدار را در $t = 0^-$ تحلیل می‌کنیم (شکل ۶-۹(ب)). می‌بینیم که: $i_L(0^-) = i_R(0^-) = 4/32 \times 10^3 = 125\ \mu A$ و $v_C(0^-) = 4 \times 30/32 = 3.75$ V.

در ترسیم مدار در $t = 0^+$ ما فقط $i_L(0^+) = 125\ \mu A$ و $v_C(0^+) = 3.75$ V را داریم (شکل ۶-۹(ج)). با این وجود، بنا به قانون اهم می‌توانیم اولین مقدار اولیه خود را محاسبه کنیم، $i_R(0^+) = 3.75/30 \times 10^3 = 125\ \mu A$. بنابراین:

$$i_R(0) = A_1 + A_2 = 125 \times 10^{-6} \qquad (۱۹)$$

و اما دومین مقدار اولیه را چگونه به دست آوریم؟ اگر ما معادله (۱۸) را در 30×10^3 ضرب کنیم، عبارتی برای $v_C(t)$ به دست می‌آید. با گرفتن مشتق و ضرب در 2 pF عبارت $i_C(t)$ حاصل می‌گردد:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = (2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

به وسیله KCL،

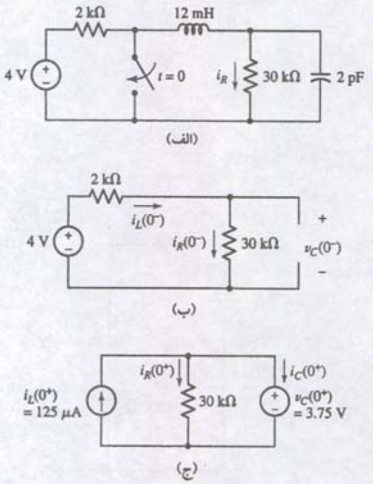
$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0$$

بنابراین:

$$-(2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(3.063 \times 10^6 A_1 + 13.60 \times 10^6 A_2) = 0 \qquad (۲۰)$$

با حل معادلات (۱۹) و (۲۰) داریم $A_1 = 161.3\ \mu A$ و $A_2 = -36.34\ \mu A$. پس:

$$i_R = \begin{cases} 125\ \mu A, & t < 0 \\ 161.3e^{-3.063\times10^6 t} - 36.34e^{-13.6\times10^6 t}\ \mu A, & t > 0 \end{cases}$$

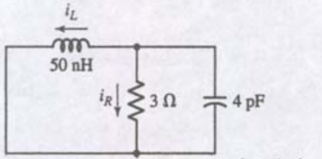


شکل ۶-۹ (الف) مداری که i_R برای آن خواسته شده است. (ب) مدار معادل برای $t = 0^-$. (ج) مدار معادل برای $t = 0^+$.

تمرین

۹-۳ جریان i_R در مقاومت شکل ۷-۹ را برای $t > 0$ معین کنید، اگر $i_L(0^-) = 6$ A و $v_C(0^+) = 0$ V باشد. آرایش مدار قبل از $t = 0$ نامشخص است.

جواب: $i_R(t) = 6.008(e^{-8.328\times10^{10}t} - e^{-6.003\times10^7 t})$ A, $t > 0$



شکل ۷-۹

نمایش گرافیکی پاسخ فوق میرا

بگذارید به معادله (۱۷) باز گردیم و ببینیم چه اطلاعات اضافی در مورد این مسئله می‌توان معین کرد. می‌توانیم معادله را چنین تفسیر کنیم که جمله اول آن دارای ثابت زمانی 1s و جمله دوم $\frac{1}{6}$ s است. هر کدام از آن‌ها با دامنه واحد شروع می‌شوند ولی دومی سریع افت می‌کند. پس $v(t)$ هرگز منفی نمی‌شود. با گذشت زمان، هر یک از آن‌ها به سمت صفر میل می‌کنند و پاسخ همان‌طور که باید، می‌میرد. بنابراین پاسخ در $t = 0$ و $t = \infty$ برابر صفر است و هرگز منفی هم نمی‌شود و چون هیچ‌وقت در میان این دو فاصله صفر نمی‌شود باید از خود حداکثری به نمایش بگذارد که تعیین آن کار چندان مشکلی نیست. از پاسخ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

برای تعیین زمان t_m که در آن ولتاژ حداکثر می‌گردد، مشتق را برابر صفر می‌گیریم:

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

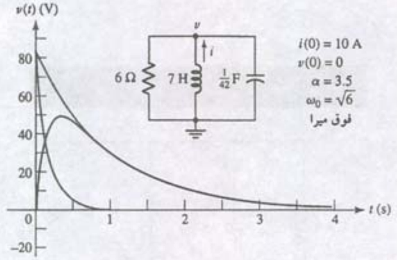
یک بار آن را دستکاری می‌کنیم:

$$e^{5t_m} = 6$$

و درنتیجه:

$$v(t_m) = 48.9 \text{ V} \quad و \quad t_m = 0.358 \text{ s}$$

از دو نمودار نمایی $84e^{-t}$ و $84e^{-6t}$ و سپس تعیین تفاضل آن‌ها می‌توان منحنی پاسخ را به دست آورد. مزیت این تکنیک در شکل ۸-۹ نشان داده شده است. در این شکل هر دو نمودار و تفاضل



شکل ۸-۹ پاسخ $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ در مدار شکل ۲-۹.

آن‌ها که همان پاسخ کامل $v(t)$ است، نشان داده شده است. منحنی‌ها پیش‌بینی قبلی ما را تأیید می‌کنند که در آن رفتار $v(t)$ در درازمدت به صورت $84e^{-t}$ یعنی جمله نمایی با دامنه کوچک‌تر s_1 و s_2 می‌باشد.

سوال دیگری که غالباً مطرح می‌شود این است که بخش گذرا چقدر تداوم دارد. در عمل گاهی بهتر است زمان گذرا هرچه سریع‌تر به سمت صفر میل کند. البته از نظر تئوری t_s برابر بینهایت است، زیرا $v(t)$ هرگز در زمان معین به صفر نشست نمی‌کند. با این وجود یک پاسخ ناچیز، پس از نشست $v(t)$ به کمتر از 1% مقدار ماکزیمم مطلق $|v_m|$، قابل چشم‌پوشی است. زمان رخداد این مقدار را زمان **نشست** می‌نامیم. چون در مثال فوق $|v_m| = v_m = 48.9$V است، زمان نشست برای پاسخ همان زمان رسیدن به 0.489V است. از جایگزینی این مقدار در معادله (۱۷) و چشم‌پوشی از دومین جمله نمایی، زمان نشست برابر 5.15s خواهد بود.

مثال ۴-۹

برای $t > 0$، جریان خازن یک مدار RLC موازی بی‌منبع با رابطه $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A داده شده است.

ما ابتدا دو جمله را طبق شکل ۹-۹ ترسیم کرده و سپس برای یافتن $i_C(t)$ آن‌ها را از هم کم می‌کنیم. بنابراین باید زمانی را یافت که در آن $|i_C|$ به 20 mA تقلیل یافته است یا

$$2e^{-2t_s} - 4e^{-t_s} = -0.02 \qquad (۲۱)$$

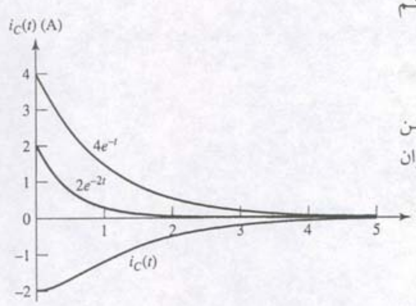
این معادله را می‌توان با روال تکرار روی یک ماشین حساب علمی حل کرد که در این صورت پاسخ $t_s = 5.296$ s را به دست می‌دهد. اما اگر چنین وسیله‌ای در اختیار نبود می‌توان معادله (۲۱) را برای $t \ge t_s$ به صورت زیر تقریب کرد:

$$-4e^{-t_s} = -0.02 \qquad (۲۲)$$

از حل آن‌ها داریم:

$$t_s = -\ln\left(\frac{0.02}{4}\right) = 5.298 \text{ s} \qquad (۲۳)$$

که به خوبی به حل دقیق نزدیک است (با دقت 0.1%).

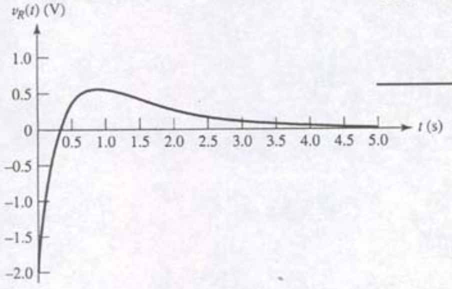


شکل ۹-۹ پاسخ جریان $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$A همراه با دو مولفه‌اش.

تمرین

۹-۴ (الف) $v_R(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$ V را در محدوده $0 < t < 5$ s رسم کنید. (ب) زمان نشست را محاسبه نمایید. (ج) حداکثر ماکزیمم و زمان رخداد آن را محاسبه نمایید.

جواب: (الف) شکل ۱۰-۹؛ (ب) 4.605 s و (ج) 544 mV، 896 ms.



شکل ۱۰-۹ رسم پاسخ تمرین ۴-۹ (الف).

۳-۹ میرای بحرانی

حالت فوق میرا با روابط زیر شناسایی می‌شود:

$$\alpha > \omega_0$$

یا

$$LC > 4R^2C^2$$

که منجر به دو مقدار حقیقی منفی s_1 و s_2 شده و پاسخ نیز جمع جبری دو مقدار نمایی منفی می‌باشد.

اکنون اجازه بدهید تا مقادیر α و ω_0 را طوری تنظیم کنیم که برابر شوند. این حالت بسیار خاصی، به نام میرای بحرانی است. اگر ما بخواهیم واقعاً مدار RLC را به صورت مدار بحرانی طراحی کنیم، تلاشی **بیهوده** انجام داده‌ایم زیرا برابری α و ω_0 **غیرممکن** است. نتیجه چنین تلاشی این است که نهایتاً به یک مدار فوق میرا یا زیرمیرا که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت دست یابیم.

"غیرممکن" کمی مبالغه‌آمیز است. علت به‌کاربردن این عبارت‌ها این‌است‌که در واقع یافتن عناصری که مقدار واقعی‌شان کمتر از 1 درصد با مقدار نامی‌شان تفاوت داشته باشد دشوار است. پس یافتن القاگری که L آن دقیقاً $4R^2C$ باشد فقط به لحاظ نظری امکان‌پذیر است. ولی حتی اگر یک جعبه پر از عناصر دارای مقادیر نامی یکسان را بگردیم، احتمال این‌که بتوانیم عنصری برگزینیم که دقیقاً مقدار موردنظر را داشته باشد بعید است.

در هر صورت به منظور تکمیل بررسی، مدار میرای بحرانی را در این‌جا مطالعه می‌کنیم، زیرا گذر جالبی را بین فوق میرا و زیر میرا به نمایش می‌گذارد.

میرای بحرانی تحت شرایط زیر اتفاق می‌افتد:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C \end{aligned}\right\} \quad \text{میرای بحرانی}$$

می‌توان میرای بحرانی را با تغییر مقدار هر یک از سه عنصر در مثال عددی آغاز بخش ۹ـ۱ تولید نمود. ما R را انتخاب کرده و مقدار آن را تا رسیدن به حالت میرای بحرانی افزایش می‌دهیم. ضمن این‌که ω_0 را بدون تغییر رها می‌نماییم. مقدار R لازم برابر است با، $7\sqrt{6}/2\Omega$، L همان 7H و C در $\frac{1}{42}$ F باقی می‌ماند. بنابراین داریم:

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6}\ s^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}\ s^{-1}$$

به خاطر می‌آوریم که مقادیر اولیه $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ A می‌باشند.

فرم پاسخ میرای بحرانی

در راستای یافتن پاسخی که از جمع دو جمله نمایی حاصل می‌شود به کار خود ادامه می‌دهیم:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3 e^{-\sqrt{6}t}$$

در این‌جا فکر می‌کنیم که به بیراهه رفته‌ایم. زیرا پاسخی که تنها یک ثابت دلخواه دارد، ولی دو مقدار اولیه $v(0) = 0$ و $i(0) = 10A$ موجود است و هر دو آن‌ها باید توسط یک ثابت تأیید شوند. اگر $A_3 = 0$ را انتخاب کنیم، آنگاه $v(0) = 0$ است که با ولتاژ اولیه خازن یکی است. معهذا اگرچه هیچ انرژی در $t = 0^+$ در خازن ذخیره نشده است ولی 350J انرژی ذخیره‌شده در القاگر داریم. این انرژی موجب تولید جریان گذرایی به خارج از القاگر می‌شود که در این صورت ولتاژ غیرصفری را در دو سر هر سه قطعه ایجاد خواهد کرد.

به نظر می‌رسد که این وضع به کلی با حل پیشنهادی ما در تضاد است. قوانین ریاضی و الکتریکی بی‌اشکالند پس اگر در رسیدن به مشکل دچار اشتباه هم نشده باشیم، باید با فرضیات غلطی شروع کرده باشیم. اولین فرض این بود که حل معادله دیفرانسیل نمایی است و در این‌جا به نظر می‌رسد که چنین نیست. وقتی $\alpha = \omega_0$ شود، معادله دیفرانسیل (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

حل این معادله کار مشکلی نیست، ولی در این‌جا راجع به آن بحثی نمی‌کنیم، زیرا معادله از نوع استاندارد است و در هر کتاب معادله دیفرانسیل می‌توان آن را یافت. حل برابر است با:

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \qquad (۲۴)$$

باید توجه داشت که حل هنوز هم از دو جمله نمایی تشکیل شده است که اولی همان تابع نمایی آشنا و دیگری تابعی نمایی ضربدر t است. ضمناً توجه‌داریم که حل حاوی دو ثابت اختیاری است.

یافتن مقادیر A_1 و A_2

اکنون اجازه بدهید تا مثال عددی خود را دنبال کنیم. بعد از جایگزینی مقدار معلوم α در معادله (۲۴) داریم:

$$v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

برای یافتن مقادیر A_1 و A_2 ابتدا مقدار اولیه را به $v(t)$ اعمال می‌کنیم، یعنی $v(0) = 0$. پس $A_2 = 0$ خواهد بود. این حالت ساده از صفربودن مقدار اولیه پاسخ $v(t)$ ناشی می‌شود. در حالت کلی چنین نیست و برای یافتن ضرایب باید دو معادله همزمان را حل کرد. دومین مقدار اولیه باید، همچون حالت فوق میرا به مشتق $\frac{dv}{dt}$ اعمال گردد. بنابراین با به‌خاطرسپردن $A_2 = 0$ از پاسخ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t\left(-\sqrt{6}\right)e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

که در $t = 0$ آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = A_1$$

آنگاه مشتق را برحسب جریان اولیه خازن بیان می‌کنیم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

که جهات مرجع برای i_C، i_R و i در شکل ۹ـ۲ تعریف شده‌اند. بنابراین:

$$A_1 = 420V$$

و بنابراین پاسخ چنین خواهد بود:

$$v(t) = 420te^{-2.45t}\ V \qquad (۲۵)$$

نمایش گرافیکی پاسخ میرای بحرانی

قبل از ترسیم این پاسخ اجازه بدهید تا با استدلال‌های کیفی شکل آن را حدس بزنیم. مقدار اولیه صفر بود و پاسخ معادله (۲۵) به دست آمد. چون $e^{-2.45t}$ فرم مبهمی دارد به راحتی می‌توان دریافت که در زمانی طولانی پاسخ به سمت صفر میل کند. ولی این مانع جزئی را می‌توان با اجرای قانون هوپیتال مرتفع کرد. پس:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420 \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2.45t}} = 420\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

مجدداً پاسخی داریم که از صفر شروع و به صفر ختم می‌گردد و در بقیه زمان مقدار مثبتی را داراست. دوباره مقدار حداکثر v_m در t_m رخ می‌دهد. برای این مثال،

$$v_m = 63.1\ V \quad و \quad t_m = 0.408\ s$$

این حداکثر، بزرگتر از مقدار مشابه در حالت فوق میرا است و دلیل آن اتلاف کوچک‌تر در مقاومت R است. زمان پاسخ حداکثر کمی دیرتر از فوق میرا است. زمان نشست نیز از حل زیر به‌دست‌می‌آید:

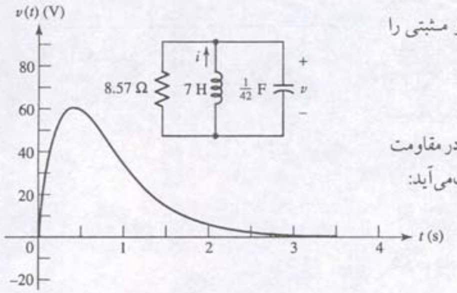
$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

که با روش سعی و خطا داریم:

$$t_s = 3.12\ s$$

که به مقدار قابل ملاحظه‌ای کوچک‌تر از t_s در حالت فوق میرا (5.15s) است. در واقع می‌توان نشان داد که برای مقادیر معین L و C و مقدار انتخابی R، زمان نشست حالت میرای بحرانی از زمان نشست حالت فوق میرا کمتر است. البته اگر مقاومت را با نیت کم‌کردن زمان نشست، کمی بیشتر کنیم، پاسخ زیر میرا خواهیم داشت که فرو جهشی به زیر محور صفر داشته و در زمان کوتاه‌تری نشست می‌کند.

منحنی پاسخ میرای بحرانی در شکل ۹ـ۱۱ ملاحظه می‌شود. می‌توان آن را با حالت فوق میرا، طبق شکل ۹ـ۱۶ مقایسه نمود.



شکل ۹ـ۱۱ پاسخ $v(t) = 420\ te^{-2.45t}$ مدار شکل ۹ـ۲ که در آن مقدار R تغییر کرده است تا پاسخ میرای بحرانی حاصل شود.

مثال ۹ـ۵

مقداری را برای R_1 چنان انتخاب کنید که مدار شکل ۹ـ۱۲ پاسخ میرای بحرانی را در $t > 0$ داشته باشد، همچنین R_2 را چنان برگزینید که $v(0) = 2$ V باشد.

توجه داریم که منبع جریان در $t = 0^-$، وصل است و القاگر را می‌توان به عنوان مدار اتصال کوتاه تصور کرد. بنابراین $v(0^-)$ که در دو سر R_2 ظاهر می‌گردد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v(0^-) = 5R_2$$

و برای $v(0) = 2$ V باید R_2 را به اندازه 400 mΩ اختیار کنیم.

پس از پرتاب سوییچ، منبع جریان قطع می‌شود (از لحظه $t = 0$ به بعد) و مقاومت R_2 هم اتصال کوتاه می‌گردد. اینک یک مدار RLC موازی داریم که از R_1، القاگر 4 H و خازن 1 nF تشکیل شده است.

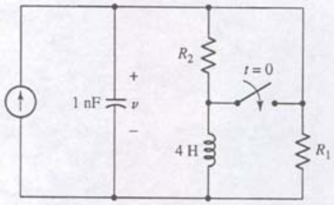
اکنون ممکن است برای $t > 0$ محاسبات زیر را انجام دهید:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10^{-9} R_1}$$

و

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-9}}} = 15{,}810 \text{ rad/s}$$

بنابراین برای ایجاد یک پاسخ میرای بحرانی در مدار برای $t > 0$، لازم است $R_1 = 31.63$ kΩ باشد (توجه: چون ما تا چهار رقم اعشار را گرد کرده‌ایم ممکن است این بحث پیش آید که این یک پاسخ میرای بحرانی نیست که در واقع وضعیتی سخت را ایجاد کرده است).

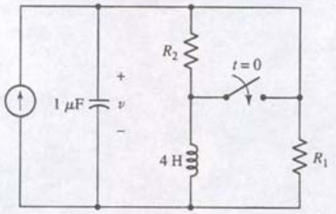


شکل ۹ـ۱۲ مداری که پس از پرتاب سوئیچ به یک RLC موازی تبدیل می‌گردد.

تمرین

۹ـ۵ (الف) R_1 را در شکل ۹ـ۱۳ طوری انتخاب کنید که پاسخ پس از $t = 0$ میرای بحرانی باشد. (ب) سپس R_2 را طوری انتخاب نمایید که $v(0) = 100$V باشد. (ج) $v(t)$ را در $t = 1$ms پیدا کنید.

جواب: 1kΩ، 250Ω و -212V.



شکل ۹ـ۱۳

۹ـ۴ مدار RLC موازی زیرمیرا

بیایید با افزایش R در بخش ۹ـ۳، روال را ادامه دهیم تا پاسخی به‌نام پاسخ زیرمیرا[1] حاصل گردد. بنابراین ضریب میرایی α کاهش می‌یابد و چون ω_0 ثابت است، لذا α^2 کوچک‌تر از ω_0^2 خواهد شد در نتیجه زیر رادیکال در عبارات مربوطه منفی خواهد شد. این شرایط موجب می‌شود تا پاسخ ویژگی کاملاً متفاوتی را داشته باشد ولی خوشبختانه لازم نیست که باز هم به سراغ معادله دیفرانسیل اولیه برویم. با استفاده از اعداد مختلط تابع نمایی را به تابع سینوسی میرا تبدیل می‌کنیم. این پاسخ کلاً از کمیات حقیقی تشکیل شده است و اعداد مختلط تنها در به‌دست‌آوردن آن‌ها نقش دارند.

فرم پاسخ زیرمیرا

با فرم نمایی زیر بحث را آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

که

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و سپس:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

که $j = \sqrt{-1}$ است.

مهندسین برق برای نشان‌دادن $\sqrt{-1}$ از j استفاده می‌کنند نه i، تا با نماد جریان اشتباه نشود.

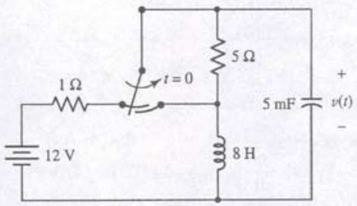
- مدارهای سری و موازی RLC بسته به مقدار نسبی R، L و C به سه دسته تقسیم می‌شوند:

  فوق میرا $(\alpha > \omega_0)$

  میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$

  زیرمیرا $(\alpha < \omega_0)$

- برای مدارهای RLC سری، $\alpha = R/2L$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ است.
- برای مدارهای موازی RLC، $\alpha = 1/2RC$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ است.
- فرم نمونه یک پاسخ فوق میرا مجموع دو تابع نمایی است که یکی از آن‌ها سریع‌تر از دیگری میرا می‌شود. مثل $A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$.
- فرم نمونه یک پاسخ میرای بحرانی تابعی نمایی، همچون $e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$ است.
- فرم نمونه یک پاسخ زیرمیرا پاسخی سینوسی میرا است: یعنی $e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$.
- در حین پاسخ گذرای یک مدار RLC، انرژی بین عناصر ذخیره‌کننده انرژی به میزانی که مقاومت مدار اجازه بدهد، انتقال می‌یابد. این مقاومت انرژی ذخیره‌شده اولیه را تلف می‌کند.
- پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ واداشته و پاسخ طبیعی. در این حالت قبل از یافتن ثابت‌ها باید حل کامل به دست آید.



شکل ۹ـ۳۷

۹ـ۹ خواندنی‌های کمکی

An excellent discussion of employing PSpice in the modeling of automotive suspension systems can be found in

R.W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows,* vol. I, 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1998.

Many detailed descriptions of analogous networks can be found in Chap. 3 of

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I.* New York: Wiley, 1954. (Out of print, but in many university libraries.)

مسائل

۹ـ۱ مدار موازی بدون منبع

۱. مداری از چهار عنصر موازی ساخته شده است: یک مقاومت 4 Ω، یک مقاومت 10 Ω، یک خازن 1 μF و یک القاگر 2 mH. (الف) α را محاسبه کنید. (ب) ω_0 را محاسبه نمایید. (ج) آیا مدار زیرمیرا، میرای بحرانی، یا فوق میرا است؟ توضیح دهید.

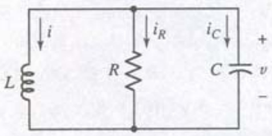
۲. یک مدار RLC موازی با القاکنایی 1 H و ظرفیت 1 pF موجود است. چه مقدار مقاومتی باید به طور موازی وصل شود تا موارد ذکرشده تضمین شود. (الف) پاسخ زیرمیرا؛ (ب) پاسخ میرای بحرانی.

۳. یک مدار RLC بدون منبع دارای $R = 1\ \Omega$، $C = 1$ nF و $L = 1$ pH است. (الف) α و ω_0 را محاسبه نمایید. (ب) s_1 و s_2 را محاسبه کنید. (ج) فرم پاسخ جریان القاگر برای $t > 0$ چگونه است؟

۴. یک خازن 22 aF به طور موازی با یک القاگر 1 fH وصل است. چه مقاومتی که با آن‌ها موازی شود منجر به یک (الف) پاسخ زیرمیرا می‌شود؛ (ب) پاسخ میرای بحرانی می‌گردد؛ (ج) پاسخ فوق میرا خواهد شد؟

۵. یک مدار بی‌منبع RLC موازی دارای القاگری است که برای آن $\omega_0 L = 10\Omega$ می‌باشد. اگر $s_1 = -6s^{-1}$ و $s_2 = -8s^{-1}$ باشد، C، R و L مطلوبست.

۶. جریان خازن در مدار شکل ۹ـ۳۸ برابر $i_C(t) = 40e^{-100t} - 30e^{-200t}$ است. اگر $C = 1$mF و $v(0) = -0.5$V باشد، مطلوبست (الف) $v(t)$، (ب) $i_R(t)$ و (ج) $i(t)$.



شکل ۹ـ۳۸

۷. یک مدار RLC موازی دارای فرکانس پاسخ طبیعی $\omega_0 = 70.71 \times 10^{12}$ rad/s است. مقدار القاکنایی $L = 2$ pH فرض

و در $t = 0$ داریم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = \sqrt{2}\,B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

که i_C در معادله ۲-۹ تعریف شد. بنابراین:

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

نمایش گرافیکی پاسخ زیرمیرا

همچون گذشته، دقت کنید که تابع پاسخ دارای یک مقدار اولیه صفر است زیرا ولتاژ اولیه را ما خود اعمال کرده‌ایم و نیز مقدار نهایی حاصل از جمله نمایی هم در زمان طولانی صفر می‌گردد. با افزایش t از صفر به مقدار مثبت کوچک، $v(t)$ به صورت $210\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ تغییر می‌کند زیرا بخش نمایی حدود واحد است. مدتی بعد در زمان t_m، جمله نمایی سریع‌تر از افزایش جمله $\sin\sqrt{2}t$ شروع به کاهش می‌کند. بنابراین $v(t)$ به حداکثر v_m رسیده و سپس شروع به کاهش می‌کند. دقت کنید که t_m زمان رسیدن جمله سینوسی $\sin\sqrt{2}t$ به حداکثر نیست، بلکه کمی قبل از آن است.

در $t = \pi/\sqrt{2}$، $v(t) = 0$ است. بنابراین در فاصله $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$ پاسخ منفی می‌شود و دوباره در $t = \sqrt{2}\pi$، صفر می‌گردد. بنابراین $v(t)$ تابعی **نوسانی** نسبت به زمان بوده و محور زمان را بی‌نهایت دفعه در $t = n\pi/\sqrt{2}$ قطع می‌کند، که n یک عدد صحیح مثبت است. در هر حال در مثال ما، پاسخ کمی زیرمیرا است و جمله نمایی موجب می‌شود تا تابع خیلی سریع میرا شود و نقاط قطع صفر در نمودار مشاهده نمی‌شوند.

طبیعت نوسانی پاسخ، با کاهش α، جالب‌تر است. اگر α صفر باشد، که متعلق به مقاومت بی‌نهایت بزرگی است، $v(t)$ یک موج سینوسی نامیرا خواهد بود. زمانی وجود ندارد که $v(t)$ که به زیر یک درصد مقدار حداکثرش افت کرده و در آن باقی بماند و بنابراین زمان نشست بی‌نهایت است. این حرکت را با حرکت دائمی اشتباه نگیرید. ما یک انرژی اولیه فرض کرده‌ایم بدون آن‌که در مدار مصرف شود. این انرژی از محل اولیه خود در القاگر به خازن منتقل شده و سپس دوباره به القاگر باز می‌گردد و این حرکت تا ابد ادامه دارد.

نقش مقاومت محدود

مقاومت معین R در مدار RLC نقش یک دلال را دارد. هر زمان که انرژی از L به C یا از C به L انتقال پیدا کند، دلال کمیسیون خود را برمی‌دارد. در درازمدت دلال همه انرژی را تصاحب می‌کند و تا ژول آخرش مصرف می‌نماید. دیگر ژولی برای L و C باقی نمی‌ماند و جریان و ولتاژ وجود نخواهد داشت. می‌توان مدارهای RLC موازی را طوری ساخت که مقدار R در آن‌ها بزرگ بوده و بنابراین پاسخ طبیعی سال‌ها باقی بماند، بدون آن‌که انرژی دیگری لازم باشد.

به مسئله عددی خاص خود بازمی‌گردیم. از مشتق‌گیری اولین ماکزیمم را برای $v(t)$ به‌دست‌می‌آوریم:

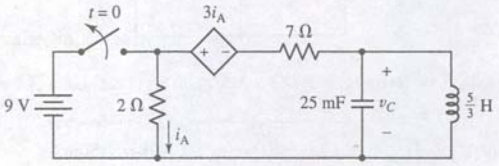
$$v_{m1} = 71.8\ \text{V} \quad , \quad t_{m1} = 0.435\text{s}\ \text{در}$$

حداقل بعدی در زمان زیر رخ می‌دهد:

$$v_{m2} = -0.845\ \text{V} \quad , \quad t_{m2} = 2.66\text{s}\ \text{در}$$

و به همین ترتیب منحنی پاسخ در شکل ۱۴-۹ ملاحظه می‌شود. منحنی‌های پاسخ دیگری برای مدارهایی که بیشتر زیرمیرا هستند در شکل ۱۵-۹ ملاحظه می‌گردد.

۲۲. کلید در شکل ۴۵-۹ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. (الف) $i_A(0^-)$ را به‌دست‌آورید. (ب) $i_A(0^+)$ را معین کنید. (ج) $v_C(0^+)$ را تعیین نمایید. (د) مقاومت معادل موازی با L و C را در $t > 0$ به‌دست‌آورید. (ه) $i_A(t)$ را مشخص کنید.



شکل ۴۵-۹

۲۳. دو سکه با لایه‌ای از یخ به دمای 80K به ضخامت 1mm از یکدیگر جدا شده‌اند. یک القاگر اَبَررسانا (بنابراین با مقاومت صفر) از اکسید مس با القاگری $4\mu H$ به علت بی‌احتیاطی در کنار میز آزمایشگاه افتاده و طوری آویزان شده که از دو سر آن با سکه‌ها در تماس است. یخ حاوی یون‌های ناخالصی است و موجب هدایت آن می‌گردد. برای این ساختار چه مقاومتی لازم است تا مجموعه به صورت یک مدار RLC فوق میرا رفتار کند.

۳-۹ میرای بحرانی

۲۴. یک مدار RLC موازی با القاگر 1 mH و خازن $12\mu F$ ساخته شده است. (الف) R را چنان انتخاب کنید که پاسخ میرای بحرانی باشد. (ب) اگر $v(0^-) = 12$ V و $i_L(0^-) = 0$ باشد، عبارتی معتبر برای $v_C(t)$ در $t > 0$ پیدا کنید.

۲۵. یک مدار RLC با استفاده از القاگر 10 mH و خازن 1 mF ساخته شده است. (الف) مقدار R را طوری انتخاب کنید که پاسخ مدار میرای بحرانی باشد. (ب) اگر $v(0^-) = 0$ V و $i_L(0^-) = 10$ A باشد عبارتی برای $i_L(t)$ در $t > 0$ پیدا کنید. (د) حل خود را رسم کرده و با شبیه‌سازی PSpice صحت آن را تحقیق کنید. آن را نام‌گذاری نمایید. آیا دو حل یکی هستند.

۲۶. بگویید چرا کمتر اتفاق می‌افتد که کسی در عمل با مدار میرای بحرانی مواجه شود.

۲۷. مقدار القاکنایی شکل ۴۱-۹ را تا زمانی‌که مدار به صورت میرای بحرانی است تغییر دهید. (الف) القاکنایی جدید چقدر است. (ب) i_L را در $t = 5$ms به‌دست‌آورید. (ج) زمان نشست را معین کنید.

۲۸. (الف) در شکل ۴۰-۹ چه مقاومتی باید به‌کار رود تا میرای بحرانی حاصل گردد؟ (ب) با این مقدار مقاومت، $v_C(t)$ را برای $t > 0$ معین کنید.

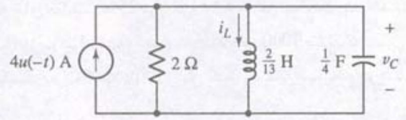
۲۹. در وضعیتی که برای مسئله ۲۳ مشاهده شد، مقاومت یخ چقدر باشد تا پاسخ مدار RLC، میرای بحرانی باشد.

۳۰. در مدار شکل ۳۹-۹، فرض کنید $v(0) = -400$V و $i(0) = 0.1$A است. اگر $L = 5$mH و $C = 10$nF و مدار میرای بحرانی باشد. (الف) R را پیدا کنید. (ب) $|i|_{max}$ و (ج) i_{max} را به‌دست‌آورید.

۳۱. در یک مدار RLC موازی پاسخ از نوعی میرای بحرانی با $\alpha = 1\text{ms}^{-1}$ و $R = 1\text{m}\Omega$ است. فرض کنید که مقدار القاگر از عبارت $L = \mu N^2 A/s$ محاسبه شود که در آن $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m، N = تعداد دور کامل سیم‌پیچ، A نیز سطح مقطع آن و s طول کل سیم‌پیچ است. سطح مقطع القاگر 1cm^2 است و در هر سانتیمتر 50 دور سیم وجود دارد. سیم‌پیچ از عنصر گلونیم ساخته شده که تا 100°F ابررسانا است. طول سیم‌پیچ چقدر است؟

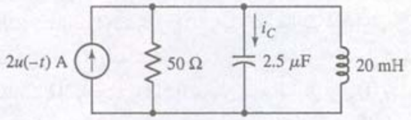
۴-۹ مدار RLC موازی زیرمیرا

۳۲. برای مدار شکل ۴۶-۹، (الف) $i_L(0^+)$، (ب) $v_C(0^+)$، (ج) $\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+}$، (د) $\frac{dv_C}{dt}\Big|_{t=0+}$، (ه) $v(t)$ را پیدا کنید. (و) منحنی $v_C(t)$ را در $-1\text{s} < t < 2\text{s}$ رسم نمایید.



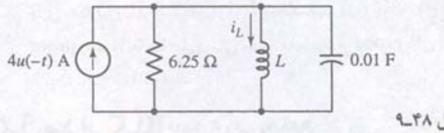
شکل ۴۶-۹

۳۳. $i_C(t)$ را برای $t > 0$ در شکل ۴۷-۹ پیدا کنید.



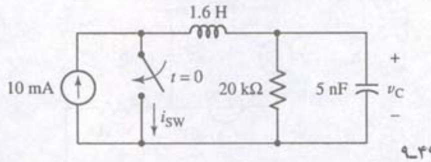
شکل ۴۷-۹

۳۴. فرض کنید در شکل ۴۸-۹ مقدار $\omega_d = 6$ rad/s باشد. (الف) L را بیابید. (ب) عبارتی برای $i_L(t)$ در همه زمان‌ها بیابید. (ج) $i_L(t)$ را در $-0.1 < t < 0.6$s به‌دست‌آورید.



شکل ۴۸-۹

۳۵. کلید در شکل ۴۹-۹ از مدت‌ها قبل باز بوده است. در $t = 0$ کلید را می‌بندیم. برای $t > 0$، (الف) $v_C(t)$ و (ب) $i_{sw}(t)$ را به‌دست‌آورید.



شکل ۴۹-۹

۳۶. (الف) در مدار شکل ۵۰-۹، $v(t)$ را در $t > 0$ بیابید. (ب) در فاصله $0 < t < 0.1$s، $v(t)$ را رسم نمایید.

اکنون رادیکال جدیدی داریم که مقداری است حقیقی و آن را ω_d یا **فرکانس تشدید طبیعی** می‌خوانیم:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

حال پاسخ را چنین می‌توان نوشت:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \qquad (۲۶)$$

و به فرم طویل‌تر ولی معادل:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\{(A_1+A_2)[\frac{e^{j\omega_d t}+e^{-j\omega_d t}}{2}] + j(A_1-A_2)[\frac{e^{j\omega_d t}-e^{-j\omega_d t}}{j2}]\}$$

با توجه به مطالب پیوست ۵ می‌بینیم که کروشه اول در معادله قبل برابر با $\cos\omega_d t$ و دومی $\sin\omega_d t$ است. بنابراین:

$$v(t) = e^{-\alpha t}[(A_1+A_2)\cos\omega_d t + j(A_1-A_2)\sin\omega_d t]$$

به ضرایب، سمبل جدیدی تخصیص می‌دهیم:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \qquad (۲۷)$$

که معادله (۲۶) و (۲۷) معادلند.

در این‌جا موضوع کمی غیرعادی است زیرا عبارتی که در آغاز مولفه‌های مختلط داشت، اکنون کاملاً حقیقی است. با این وجود باید به خاطر آورید که ما در آغاز اجازه دادیم که A_1 و A_2 و نیز s_1 و s_2 مختلط باشند. در هر شرایطی، اگر با حالت زیرمیرا سروکار داشته باشیم دیگر با اعداد مختلط کاری نداریم. چون α، ω_d و t کمیت‌های حقیقی‌اند، پس $v(t)$ هم باید حقیقی باشد (و می‌توان آن را روی اسیلوسکوپ، ولتمتر یا یک ورق کاغذ مشاهده کرد). معادله (۲۷) فرم تابعی مطلوب را برای پاسخ زیرمیرا دارد و اعتبارش را با جایگزینی در معادله دیفرانسیل اصلی می‌توان محک زد. این تمرین را به عهده شکاکان می‌گذاریم. دو ثابت حقیقی B_1 و B_2 را دوباره برای تأیید شرایط اولیه انتخاب می‌کنیم.

ما به مثال ساده مدار RLC موازی شکل ۲ـ۹ می‌رویم که در آن $R = 6\ \Omega$، $C = 1/42$ F و $L = 2$ H است. ولی اکنون مقاومت را به $10.5\ \Omega$ افزایش می‌دهیم، بنابراین:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}\ s^{-1} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC} = 2\ s^{-1}$$

و

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2}\ rad/s$$

که جواب به صورت زیر است و تنها دو ثابت مجهول دارد:

$$v(t) = e^{-2t}(B_1\cos\sqrt{2}t + B_2\sin\sqrt{2}t)$$

یافتن مقادیر B_1 و B_2

تعیین دو ثابت همانند قبل انجام می‌شود. اگر باز هم فرض کنیم $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ باشد آنگاه B_1 باید صفر شود. بنابراین:

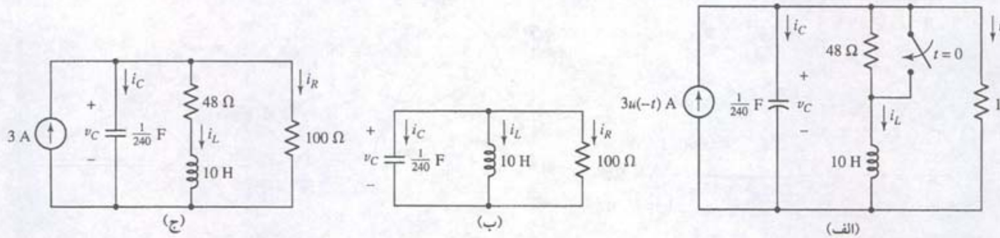
$$v(t) = B_2 e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

و مشتق آن برابر است با:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2}B_2 e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - 2B_2 e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

مثال ۶ـ۹

در مدار شکل ۱۷ـ۹ (الف) $i_L(t)$ را معین کرده و شکل موج را رسم کنید.



شکل ۱۷ـ۹ (الف) مدار RLC موازی که در آن جریان $i_L(t)$ موردنظر است، (ب) مدار در $t \ge 0$ و (ج) مدار برای تعیین مقادیر اولیه.

در $t = 0$ نه تنها جریان 3A، بلکه مقاومت 48Ω حذف شده است. مدار اصلاح‌شده در شکل ۱۷ـ۹ (ب) ترسیم شده است. بنابراین $\alpha = 1.2\ s^{-1}$ و $\omega_0 = 4.899$ rad/s است. چون $\alpha < \omega_0$ است، با مدار زیرمیرا سروکار داریم و بنابراین پاسخی به فرم زیر انتظار می‌رود:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \qquad (۲۸)$$

که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.750$ rad/s است. تنها مرحله باقیمانده استفاده از مقادیر اولیه در تعیین ثابت‌های B_1 و B_2 است.

شکل ۱۷ـ۹(ج) مدار را در $t = 0^-$ نشان می‌دهد. ما باید به جای القاگر یک مدار کوتاه و به جای خازن یک مدار باز قرار دهیم که نتیجه می‌دهد: $v_C(0^-) = 97.30$ V و $i_L(0^-) = 2.027$ A. چون هیچ کدام از این دو کمیت نمی‌توانند در زمان صفر تغییر کنند، بنابراین $v_C(0^+) = 97.30$ V و $i_L(0^+) = 2.027$ A.

از جایگزینی $i_L(0) = 2.027$ در معادله (۲۸) داریم $B_1 = 2.027$ A. برای تعیین ثابت دیگر باید از معادله (۲۸) مشتق بگیریم:

$$\frac{di_L}{dt} = e^{-\alpha t}(-B_1\omega_d\sin\omega_d t + B_2\omega_d\cos\omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \qquad (۲۹)$$

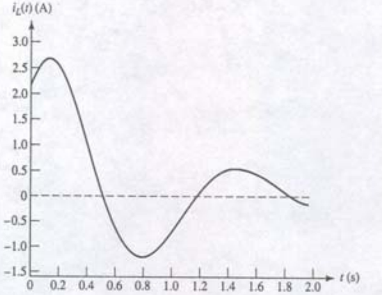
توجه دارید که $v_L(t) = L(di_L/dt)$ است. با مراجعه به شکل ۱۷ـ۹ (ب) می‌بینیم که $v_L(0^+) = v_C(0^+) = 97.3$ V. بنابراین با ضرب معادله (۲۹) در $L = 10$ H و $t = 0$ حل نهایی برابر است با:

$$v_L(0) = 10(B_2\omega_d) - 10\alpha B_1 = 97.3$$

با حل، $B_2 = 2.651$ A خواهد شد، بنابراین:

$$i_L = e^{-1.2t}(2.027\cos 4.75t + 2.561\sin 4.75t)\ A$$

که در شکل ۱۸ـ۹ ترسیم شده است.

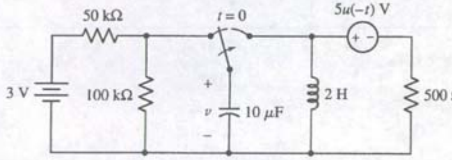


شکل ۱۸ـ۹ نمودار $i_L(t)$ با علائم آشکاری از پاسخ زیرمیرا.

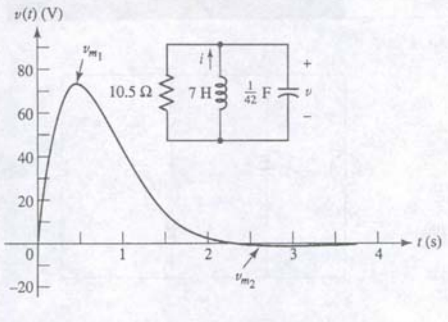
تمرین

۶ـ۹ کلید در شکل ۱۹ـ۹ مدتی طولانی در وضعیت سمت چپ بوده است. در $t = 0$ به راست برده می‌شود. مطلوبست (الف) $\frac{dv}{dt}$ در $t = 0^+$، (ب) مقدار v در $t = 1$ ms و (ج) t_0، یعنی اولین مقدار t بزرگ‌تر از صفر که در آن $v = 0$ باشد.

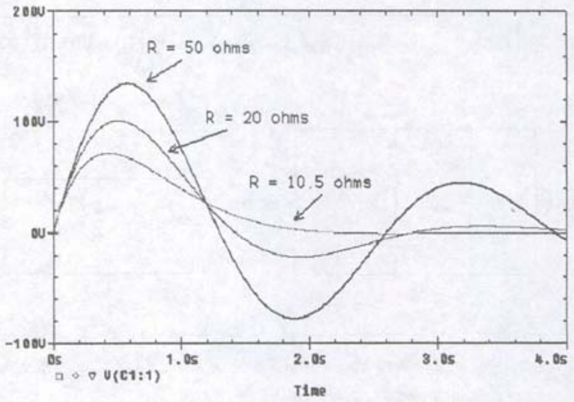
جواب: ‎-1400 V/s، 0.695 V و 1.609 ms.



شکل ۱۹ـ۹



شکل ۱۴ـ۹ پاسخ $v(t) = 210\sqrt{2}\, e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$ مدار شکل ۲ـ۹. با افزایش R، حالت زیرمیرا حاصل می‌شود.

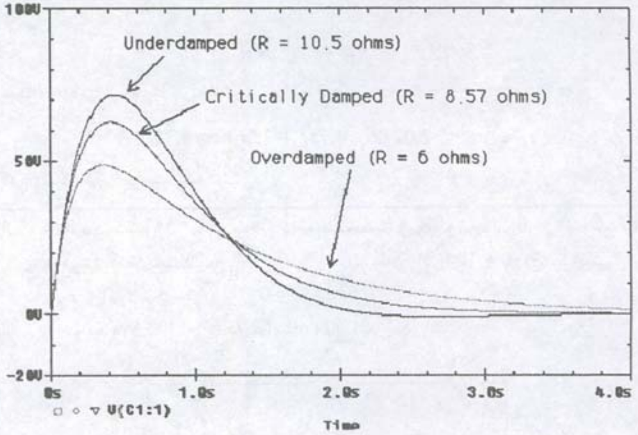


شکل ۱۵ـ۹ پاسخ زیرمیرای حاصل از شبیه‌سازی به‌ازای سه مقدار مقاومت متفاوت، هرچه R بزرگ‌تر باشد، رفتار نوسانی شدیدتر می‌شود.

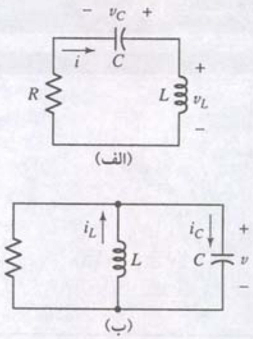
زمان نشست با روش سعی و خطا حاصل می‌گردد که برابر 2.92s است که کمی بزرگ‌تر از میرای بحرانی است. توجه کنید که t_s بزرگ‌تر از t_{m2} است زیرا v_{m2} بزرگ‌تر از یک درصد v_{m1} می‌باشد. این بررسی نشان می‌دهد که یک کاهش ناچیز در R، اندازه فروجهش را کم کرده و اجازه می‌دهد تا t_s کمتر از t_{m2} گردد.

پاسخ‌های فوق میرا، میرای بحرانی و زیرمیرا برای این شبکه با PSpice شبیه‌سازی شده و در شکل ۱۶ـ۹ نشان داده شده‌اند. مقایسه این سه منحنی نتایج زیر را به‌دست می‌دهد.

- وقتی میزان میرایی را با افزایش اندازه R تغییر دهیم، هر چه میرایی کمتر شود، ماکزیمم پاسخ بزرگ‌تر می‌گردد.
- وقتی وضعیت زیرمیرا حاکم باشد، پاسخ نوسانی می‌شود و کمترین زمان نشست مداری دارد که کمی زیرمیرا باشد.



شکل ۱۶ـ۹ پاسخ ولتاژ فوق میرا، میرای بحرانی، و زیر میرا برای مثال‌های بالا، که از تغییرات مقاومت موازی R به دست آمده است.



شکل ۲۱ـ۹ (الف) مدار RLC سری که دوگان مدار RLC موازی (ب) است. مقادیر عناصر دو مدار یکسان نیستند.

مدار RLC سری دوگان مدار RLC موازی است و همین کافی است تا تحلیل مدار کار ساده‌ای شود. شکل ۲۱ـ۹ (الف) یک مدار سری را نشان می‌دهد. معادله انتگرالی ـ دیفرانسیلی چنین است:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_C(t_0) = 0$$

که قابل مقایسه با معادله مشابه در مدار RLC موازی است که مجدداً در شکل ۲۱ـ۹ (ب) ترسیم شده است:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i_L(t_0) = 0$$

معادله دیفرانسیل درجه دوم حاصل از مشتق‌گیری زمانی دو معادله فوق هم دوگانند:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \qquad (۳۰)$$

$$C\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad (۳۱)$$

تمام بحث‌های ما در مورد RLC موازی قابل اعمال به مدار RLC سری است، به بیان دیگر مقادیر اولیه ولتاژ خازن و جریان القاگر معادل با مقادیر اولیه جریان القاگر و ولتاژ خازن است. به‌این‌ترتیب پاسخ ولتاژ تبدیل به پاسخ جریان می‌گردد. بنابراین لازم‌است چهار بخش قبل را با استفاده از زبان دوگانگی بازخوانی کنید و توصیف کامل مدار RLC سری را به‌دست‌آورید. با این وجود این کار ممکن‌است پس از چند پاراگراف اول شما را کسل کند و در واقع ضروری به‌نظر نرسد.

مروری خلاصه بر پاسخ مدار سری

مروری خلاصه بر پاسخ مدار سری را به آسانی می‌توان بیان کرد. برای مدار شکل ۲۱ـ۹ (الف) پاسخ فوق میرا عبارت‌است‌از:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

که

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و بنابراین

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرم پاسخ میرای بحرانی چنین است:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

و پاسخ زیرمیرا به فرم زیر می‌باشد:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

که

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

واضح است که در صورت کار با پارامترهای α، ω_0 و ω_d، شکل ریاضی پاسخ‌ها برای وضعیت‌های دوگان یکسان خواهد بود. هر افزایشی در α در هر یک از دو مدار سری یا موازی

تحلیل کامپیوتری

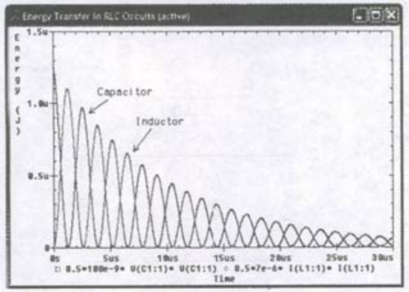
یک ویژگی جالب در probe امکان اجرای اعمال ریاضی روی ولتاژها و جریان‌های حاصل از شبیه‌سازی است. در این مثال، از این امکان استفاده می‌کنیم تا انتقال انرژی در یک خازن از مدار RLC، که مقدار معینی انرژی را ذخیره کرده‌است ($1.25\mu J$) به یک القاگر بدون انرژی نشان دهیم.

ما القاگر را $7\mu H$ و خازن را 100nF انتخاب کرده‌ایم و به این ترتیب بلافاصله می‌توان دید که $\omega_0 = 1.195 \times 10^6 s^{-1}$ است. برای بررسی حالات فوق میرا، میرای بحرانی و یا زیرمیرا، مقاومت موازی را طوری انتخاب کنیم که $\alpha > \omega_0$ (فوق میرا)، $\alpha = \omega_0$ (میرای بحرانی) و $\alpha < \omega_0$ (زیرمیرا) باشد. از بحث قبلی می‌دانیم که برای یک مدار RLC، مقدار $\alpha = (2RC)^{-1}$ است. به‌منظور نزدیکی هرچه بیشتر به حالت میرای بحرانی، $R = 4.1823\Omega$ برمی‌گزینیم. دقیقاً نمی‌توان $\alpha = \omega_0$ را ایجاد کرد. اگر مقاومت را اضافه کنیم، انرژی ذخیره‌شده در دو عنصر دیگر کندتر تلف می‌شود و لذا پاسخ زیرمیرا خواهد بود. ما یک بار $R = 100\Omega$ را اختیار می‌کنیم تا حالت فوق رخ دهد و بار دیگر $R = 1\Omega$ را درنظر می‌گیریم تا پاسخ فوق میرا گردد.

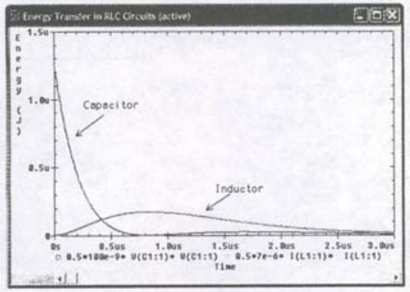
بنابراین سه نوع شبیه‌سازی جداگانه را باید برنامه‌ریزی کنیم، که بین آن‌ها فقط مقاومت R باید تغییر یابد. انرژی $1.25\mu J$ ذخیره شده اولیه در خازن مربوط به ولتاژ 5V است و به این ترتیب مقدار اولیه خازن را تنظیم می‌کنیم.

با اجرای probe، تحت منوی Trace، Add را انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم انرژی ذخیره‌شده در هر دو عنصر خازن و القاگر را به صورت تابعی از زمان ترسیم نماییم. برای خازن داریم $w = \frac{1}{2}Cv^2$، بنابراین روی پنجره Trace Expression کلیک کرده، سپس "0.5 * 100E-9" را تایپ کنید (بدون علامت نقل قول)، روی V(C1:1) کلیک کنید، به پنجرهٔ Trace Expression بازگردید و "*" را وارد نمایید، دوباره روی V(C1:1) کلیک نمایید و سپس OK را کلیک کنید. روال را برای یافتن انرژی ذخیره‌شده در القاگر تکرار می‌کنیم ولی به‌جای 100E-9 از 7E-6 استفاده نموده و روی I(L1:1) در عوض V(C1:1) کلیک نمایید.

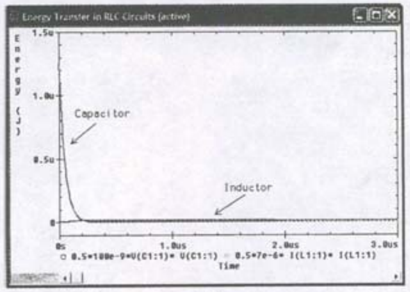
خروجی probe برای سه شبیه‌سازی جداگانه در شکل ۲۰ـ۹ دیده می‌شود. در شکل ۲۰ـ۹ (الف) می‌بینیم که انرژی مانده در مدار به‌طور پیوسته بین خازن و مقاومت پس و پیش می‌رود تا بالاخره کاملاً تلف شود. کاهش مقاومت به 4.1833Ω مدار میرای بحرانی را نتیجه می‌دهد و نمودار به شکل ۲۰ـ۹ (ب) خواهد بود. می‌بینیم که دیگر حالت نوسانی زیرمیرا وجود ندارد. در عوض انرژی انتقالی به القاگر دارای اوجی در $0.8\mu s$ است و سپس به صفر افت می‌کند. پاسخ فوق میرا در شکل ۲۰ـ۹ (ج) دیده می‌شود. ملاحظه می‌کنید که انرژی در پاسخ فوق میرا خیلی سریع‌تر به صفر افت می‌نماید و انرژی کمی به القاگر انتقال می‌یابد زیرا بخش عمده آن در مقاومت تلف شده است.



(الف)



(ب)

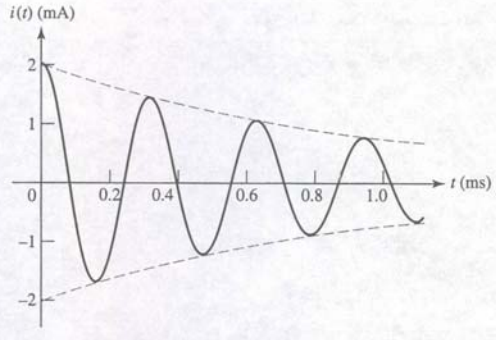


(ج)

شکل ۲۰ـ۹ انتقال انرژی در مدار RLC موازی با (الف) $R = 100\Omega$، (ب) $R = 4.1833\Omega$ و (ج) $R = 1\Omega$.

۹ـ۵ مدار RLC سری بدون منبع

اکنون مایلیم پاسخ طبیعی مدل مداری متشکل از یک القاگر ایده‌آل، خازن ایده‌آل و مقاومت ایده‌آل سری را معین نماییم. مقاومت ایده‌آل ممکن‌است یک مقاومت فیزیکی باشد که با یک مدار LC یا RLC سری است. این مقاومت ممکن‌است افت اهمی و یا افت هسته فرومغناطیسی القاگر و یا همه آن‌ها و دیگر عناصر جذب‌کننده انرژی باشد.



شکل ۲۳ـ۹ پاسخ جریان مدار RLC سری که در آن $\omega_0 = 20000 s^{-1}$، $\alpha = 1000 s^{-1}$، $i(0) = 2mA$ و $v_C(0) = 2V$ است. برای رسم منحنی بهتر است ابتدا پوش خط‌چین را ترسیم کنیم.

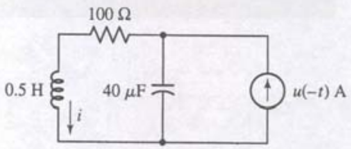
برای ترسیم یک پاسخ مناسب دوپوش نمایی $2e^{-1000t}$ و $-2e^{-1000t}$ را رسم می‌کنیم. این دوپوش در شکل ۲۳ـ۹ با خط‌چین نشان داده شده‌اند. سپس نقاط مربوط به ربع تناوب تابع سینوسی یعنی 0، $\frac{\pi}{2}$، π و غیره یا $t = 0.0785k$ ms، با $k = 0, 1, 2, \ldots$ را روی محور زمان علامت می‌زنیم و سپس منحنی نوسانی را به سرعت رسم می‌نماییم.

زمان نشست به سادگی با استفاده از بخش فوقانی پوش معین می‌گردد. یعنی $2e^{-1000t_s}$ را برابر با 1% مقدار ماکزیمم که 2mA است می‌گیریم. بنابراین $e^{-1000t_s} = 0.01$ و $t_s = 461\mu s$ خواهد شد که مقدار تقریبی است و معمولاً به‌عنوان زمان نشست به‌کاربرده می‌شود.

تمرین

۹ـ۷ با مراجعه به مدار شکل ۲۴ـ۹ α را پیدا کنید. (ب) ω_0 را بیابید. (ج) $i(0^+)$ را معین کنید. (د) $\frac{di}{dt}\big|_{t=0+}$ را به‌دست‌آورید. (هـ) $i(12ms)$ را معین نمایید.

جواب: $100s^{-1}$، 224 rad/s، 1 A، 0، -0.1204 A.

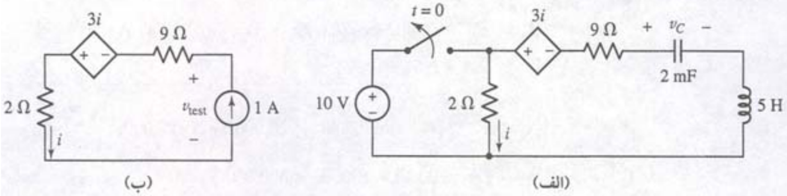


شکل ۲۴ـ۹

به عنوان مثال آخر، وضعیت‌هایی را درنظرمی‌گیریم که مدار شامل منبع وابسته است. اگر هیچ جریان یا ولتاژ کنترل‌کننده‌ای مربوط به این منبع وابسته، مورد نظر نباشد، ممکن‌است معادل تونن متصل به القاگر و خازن را پیدا کنیم. در غیر این صورت، احتمالاً مجبور به نوشتن معادله انتگرودیفرانسیل، مشتق نشان داده شده، و حل معادله مشتق خواهیم بود.

مثال ۸ـ۹

عبارتی برای $v_C(t)$ در مدار شکل ۲۵ـ۹ (الف) معتبر برای $t > 0$ به دست آورید.



شکل ۲۵ـ۹ (الف) یک مدار RLC حاوی منبع وابسته. (ب) مداری که R_{eq} از آن به دست می‌آید.

چون ما به $v_C(t)$ علاقمندیم، یافتن مقاومت تونن متصل به القاگر و خازن در $t = 0^+$ پذیرفتنی است. ما این کار را با اتصال منبع 1 A طبق شکل ۲۵ـ۹ (ب) که از آن رابطه زیر به دست می‌آید، انجام می‌دهیم:

$$v_{test} = 11i - 3i = 8i = 8(1) = 8 \text{ V}$$

بنابراین $R_{eq} = 8\ \Omega$ است و لذا $\alpha = R/2L = 0.8\ s^{-1}$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10$ rad/s، به این معنی که ما انتظار داریم پاسخ زیرمیرایی با $\omega_d = 9.968$ rad/s به فرم زیر به دست آید:

$$v_C(t) = e^{-0.8t}(B_1 \cos 9.968t + B_2 \sin 9.968t) \qquad (۳۲)$$

بسیاری از سردرگمی‌ها در تعیین و اعمال مقادیر اولیه به این علت است که مجموعه قوانین ثابتی برای دنبال‌کردن نداریم. در هر تحلیل به جایی می‌رسیم که هر مسئله طرز تفکر خاصی را می‌طلبد. این مطلب همواره منبع اصلی مشکلات است.

بخش ساده

پاسخ ساده یک سیستم مرتبه دوم متشکل از یک پاسخ واداشته زیر

$$v_f(t) = V_f$$

که برای محرک‌های dc مقداری ثابت است و یک پاسخ طبیعی به فرم

$$v_n(t) = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$$

به‌دست‌می‌آید. پس

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$$

فرض می‌کنیم که s_1، s_2 و V_f از روی مدار و توابع تحریک مفروض معین شده و فقط A و B باقی مانده است. آخرین معادله وابستگی درونی A، B، v و t را نشان می‌دهد و جایگزینی مقادیر معلوم v در $t = 0^+$ معادله دیگری بین A و B به‌دست‌می‌دهد. یعنی $v(0^+) = V_f + A + B$. تا این جای کار ساده است.

بخش دیگر

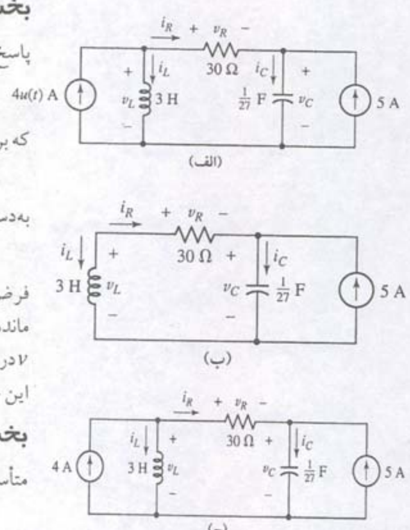
متأسفانه رابطه دیگری بین A و B لازم است که این معمولاً از مشتق به‌دست‌می‌آید:

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1Ae^{s_1t} + s_2Be^{s_2t}$$

که در آن مقدار $\frac{dv}{dt}$ در $t = 0^+$ معلوم است. بنابراین دو معادله موجود است که A و B را به هم ربط می‌دهند و برای محاسبه دو ثابت باید به‌طور همزمان حل شوند.

تنها مسئله باقیمانده تعیین v و $\frac{dv}{dt}$ در $t = 0^+$ است. بیایید فرض کنیم که v همان ولتاژ خازن، v_C، باشد. چون $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$ است، باید رابطه‌ای بین مقدار اولیه $\frac{dv}{dt}$ با یک مقدار اولیه جریان خازن وجود داشته باشد. اگر بتوانیم برای این جریان اولیه خازن مقداری را بیابیم، آنگاه به‌طورخودکار مقدار $\frac{dv}{dt}$ معین خواهد شد. دانشجویان معمولاً به راحتی $v(0^+)$ را می‌یابند ولی دریافتن مقدار اولیه $\frac{dv}{dt}$ مشکل دارند. اگر پاسخ موردنظر جریان القاگر i_L باشد، باید $\frac{di_L}{dt}$ را به مقدار اولیه ولتاژ القاگر ربط دهیم. برای متغیرهای دیگر، به‌جز ولتاژ خازن و جریان القاگر، باید مقدار اولیه و مشتق آن‌ها را برحسب مقادیر متناظر v_C و i_L بیان کنیم.

با تحلیل دقیق شکل ۲۸ـ۹ و یافتن مقادیر فوق روش را شرح خواهیم داد. برای سهولت تحلیل، دو مرتبه یک خازن بزرگ غیرواقعی را به‌کار می‌بریم.



شکل ۲۸ـ۹ (الف) یک مدار RLC سری که برای نشان‌دادن تعیین شرایط اولیه به‌کار رفته است. پاسخ مطلوب $v_C(t)$ فرض شده است، (ب) $t = 0^-$ و (ج) $t > 0$.

مثال ۹ـ۹

در شکل ۲۸ـ۹ (الف) سه عنصر غیرفعال وجود دارند که برای هرکدام ولتاژ و جریانی تعریف شده است. مقدار این شش کمیت را در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ بیابید.

هدف یافتن مقدار جریان و ولتاژ در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ است. با این کمیت‌ها مقادیر اولیه مشتق‌ها به سادگی یافت می‌شود. ابتدا روش منطقی گام‌به‌گام را برمی‌گزینیم.

۱. $t = 0^-$. تنها جریان سمت راست منبع مطابق شکل ۲۸ـ۹(ب) فعال است. فرض بر این است‌که مدار برای مدت‌ها در این حالت بوده است و همه ولتاژها و جریان‌ها ثابت باشند. بنابراین برای عبور یک جریان dc در القاگر ولتاژ دو سر آن باید صفر باشد:

$$v_L(0^-) = 0$$

همچنین وجود ولتاژ dc در دو سر خازن ($-v_R$) مستلزم جریان صفر در خازن است:

$$i_C(0^-) = 0$$

جدول ۱ـ۹ خلاصه معادلات مدارهای RLC بدون منبع.

نوع	شرایط	ناحیه	α	ω_0	نتیجه
سری	فوق میرا	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$ که $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$
موازی			$\frac{R}{2L}$		
سری	میرای بحرانی	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$
موازی			$\frac{R}{2L}$		
سری	زیرمیرا	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$ که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
موازی			$\frac{R}{2L}$		

با ω_0 ثابت به پاسخ فوق میرایی منجر می‌شود. تنها باید در محاسبه α مراقب باشیم که مقدار آن در مدار موازی $\frac{1}{2RC}$ و در مدار سری $\frac{R}{2L}$ است، بنابراین α با افزایش مقاومت سری و کاهش مقاومت موازی، زیاد می‌شود. به‌طورخلاصه معادلات کلیدی RLC سری و موازی در جدول ۱ـ۹ آورده شده است.

مثال ۷ـ۹

با فرض مدار RLC شکل ۲۲ـ۹ که در آن $L = 1H$، $R = 2k\Omega$، $C = \frac{1}{401}\mu F$، و $i(0) = 2$ mA و $v_C(0) = 2V$ است، $i(t)$ را ترسیم کنید.

می‌بینیم که $\alpha = R/2L = 1000s^{-1}$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 20{,}025$ rad/s است. این مقادیر نشان می‌دهند که پاسخ زیرمیرا است. بنابراین ω_d را محاسبه می‌کنیم که 20000 rad/s است. به‌جز ثابت‌های اختیاری پاسخ معلوم است:

$$i(t) = e^{-1000t}(B_1\cos 20{,}000t + B_2\sin 20{,}000t)$$

چون می‌دانیم که $i(0) = 2mA$ است، آن را در معادله $i(t)$ قرار می‌دهیم تا $B_1 = 0.002$ A به‌دست‌آید و بنابراین:

$$i(t) = e^{-1000t}(0.002\cos 20{,}000t + B_2\sin 20{,}000t)\ \text{A}$$

و تنها مقدار اولیه باقیمانده باید به مشتق اعمال شود. پس:

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000t}(-40\sin 20{,}000t + 20{,}000B_2\cos 20{,}000t - 2\cos 20000t - 1000B_2\sin 20{,}000t)$$

و

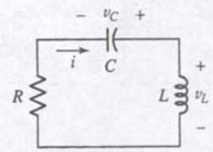
$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 20{,}000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} = \frac{2 - 2000(0.002)}{1} = -2\ \text{A/s}$$

پس:

$$B_2 = 0$$

بنابراین پاسخ مطلوب چنین است:

$$i(t) = 2e^{-1000t}\cos 20{,}000t\ \text{mA}$$



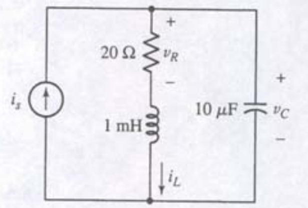
شکل ۲۲ـ۹ یک مدار RLC بدون منبع با ذخیره انرژی در هر دو عنصر خازن و القاگر در $t = 0$.

مسائلی از این قماش در فصل ۳ حل شدند و چیز جدیدی در این‌جا نداریم. ابتدا با پرداختن به جریان، از گره بالای سمت چپ آغاز می‌کنیم و می‌بینیم که $i_R(0^+) = 4 - 5 = -1$ A است. با توجه به گره سمت راست بالا داریم $i(0^+) = -1 + 5 = 4$A و البته $i_L(0^+) = 5$A می‌باشد. حال به سراغ ولتاژها می‌رویم. با استفاده از قانون جریان اهم می‌بینیم که $v_R(0^+) = 30(-1) = -30$V است. در القاگر، از KVL داریم $v_L(0^+) = -30+150 = 120$V. بالاخره با $v(0^+) = 150$V، همه مقادیر را در $t = 0^+$ در اختیار داریم.

تمرین

۹ـ۹ بگذارید در شکل ۹ـ۳۰، $i_s = 10u(-t) - 20u(t)$ A باشد. مطلوبست (الف) $i_L(0^-)$، (ب) $v_C(0^+)$، (ج) $v_R(0^+)$، (د) $i_L(\infty)$ و (ه) $i_L(0.1\text{ ms})$.

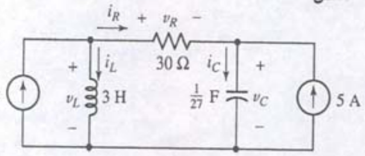
جواب: 10A، 200V، 200V، ‎-20A و 2.07A.



شکل ۹ـ۳۰

مثال ۹ـ۱۰

در مدار شکل ۹ـ۲۸ که در شکل ۹ـ۳۱ تکرار شده در $t = 0^+$ مقادیر اولیه را برای مشتق سه ولتاژ و سه جریان معین نمایید.



شکل ۹ـ۳۱ مدار شکل ۹ـ۲۸ برای مثال ۹ـ۱۰.

با دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی آغاز می‌کنیم. برای القاگر

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

و به خصوص که:

$$v_L(0^+) = L\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+}$$

بنابراین:

$$\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40 \text{ A/s}$$

به‌طور مشابه:

$$\frac{dv_C}{dt}\bigg|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108 \text{ V/s}$$

چهار مشتق دیگر را با این فرض که KVL و KCL برای مشتق نیز صادقند معین می‌کنیم. مثلاً در گره سمت چپ در شکل ۹ـ۳۱ داریم:

$$4 - i_L - i_R = 0 \qquad t > 0$$

و سپس:

$$0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0 \qquad t > 0$$

بنابراین:

$$\frac{di_R}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

به همین ترتیب سه مشتق باقیمانده به صورت زیرند:

$$\frac{dv_R}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -1200 \text{ V/s}$$

$$\frac{dv_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -1092 \text{ V/s}$$

و

$$\frac{di_C}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

قبل از این‌که موضوع تعیین مقادیر اولیه را رها کنیم، باید متذکر شویم که حداقل یک روش قوی دیگر هم وجود دارد که از آن گذشته‌ایم: می‌توانستیم معادلات کلی گرهی یا حلقوی را برای مدار اصلی بنویسیم. سپس می‌توانستیم مقادیر معلوم ولتاژ القاگر و جریان خازن را در $t = 0^-$ جایگزین کرده و چندین مقدار دیگر از پاسخ را در $t = 0^-$ معین نماییم و به این ترتیب بقیه به راحتی به‌دست‌آمدند. پس از آن تحلیلی مشابه در $t = 0^+$ می‌باید انجام می‌شد. این روش خیلی مهم است و در مدارهای پیچیده‌ای که روش‌های ساده‌گام‌به‌گام امکان‌پذیر نیست،

در بررسی مدار در $t = 0^-$، دقت کنید که به دلیل وجود خازن $i_L(0^-) = 0$ است. بنا به قانون اهم $i(0^-) = 5$ A، پس:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 - 3i = 10 - 15 = -5 \text{ V}$$

از قراردادن این رابطه در معادله (۳۲) داریم $B_1 = -5$ V. با مشتق‌گیری از معادله (۳۲) و ارزیابی در $t = 0$ داریم:

$$\frac{dv_C}{dt}\bigg|_{t=0} = -0.8B_1 + 9.968B_2 = 4 + 9.968B_2 \qquad (۳۳)$$

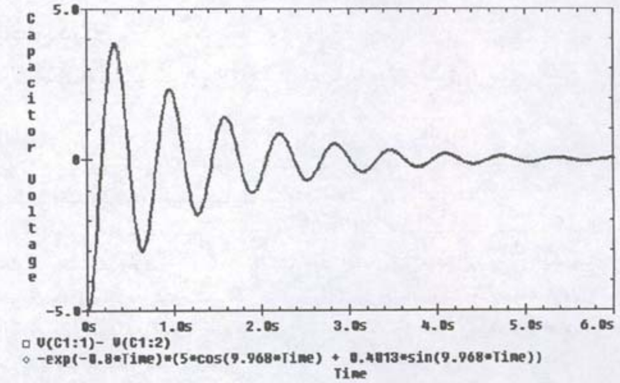
از شکل ۹ـ۲۵ (الف) داریم:

$$i = -C\frac{dv_C}{dt}$$

بنابراین با استفاده از $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$ در معادله (۳۳) داریم $B_2 = -0.4013$ V و لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$v_C(t) = -e^{-0.8t}(5\cos 9.968t + 0.4013\sin 9.968t) \text{ V}, \qquad t > 0$$

حل PSpice این مدار در شکل ۹ـ۲۶ دیده می‌شود که تحلیل ما را تأیید می‌کند.

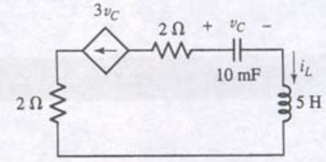


شکل ۹ـ۲۶ شبیه‌سازی PSpice مدار شکل ۹ـ۲۵ (الف). هر دو منحنی تحلیل و شبیه‌سازی بر هم منطبق شده‌اند.

تمرین

۹ـ۸ عبارتی برای $i_L(t)$ در مدار شکل ۹ـ۲۷ که در $t > 0$ معتبر باشد با شرط $v_C(0^-) = 10$ V و $i_L(0^-) = 0$ پیدا کنید. توجه کنید که هر چند إعمال تکنیک‌های تونن در این مثال مفید نیست، عمل منبع وابسته v_C و i_L را چنان به هم مربوط می‌کند که نتیجه یک معادله خطی دیفرانسیل است.

جواب: $i_L(t) = -30e^{-300t}$ A، $t > 0$



شکل ۹ـ۲۷ مدار برای تمرین ۹ـ۸.

۹ـ۶ پاسخ کامل مدار RLC

اکنون آن دسته از مدارهای RLC را ملاحظه می‌کنیم که به آن‌ها منابع dc وصل شده و پاسخ واداشته تولیدی لزوماً با گذشت زمان مستهلک نمی‌شود. روش کلی حل، همان روشی است که در مدارهای RL و RC دیدیم؛ یعنی پاسخ واداشته به‌طور کامل به‌دست‌آمد، پاسخ طبیعی به صورت مناسبی با تعدادی ثابت‌های اختیاری فراهم شد، و پاسخ کامل به شکل حاصل‌جمع پاسخ واداشته و طبیعی درآمد، و سپس مقادیر اولیه معین و به پاسخ کامل اعمال گشت تا مقادیر ثابت تعیین شوند. این آخرین مرحله‌ای است که اغلب برای دانشجویان مشکل‌ساز می‌باشد. درنتیجه، هرچند مقادیر اولیه اساساً فرقی برای منابع dc و مدارهای بی‌منبع ندارد ولی در مثال‌های زیر این مطلب را با تأکید بیشتر دنبال خواهیم کرد.

در گام بعدی قانون جریان کیرشهف را به سمت راست گره اعمال می‌نماییم تا:

$$i_R(0^-) = -5\ \text{A}$$

که منجر می‌شود به:

$$v_R(0^-) = -150\text{V}$$

اکنون قانون ولتاژ کیرشهف را حول حلقه سمت چپ به‌کار می‌بریم تا رابطه زیر حاصل شود:

$$v_C(0^-) = 150\text{V}$$

ضمن این‌که قانون جریان کیرشهف در القاگر جریان آن را مشخص می‌نماید.

$$i_L(0^-) = 5\text{A}$$

گرچه مشتقات در $t = 0^-$ برای ما اهمیتی ناچیز دارند ولی در هر صورت به علت نبود وضعیت گذرا همه آن‌ها صفرند.

۲. $t = 0^+$. در فاصله زمانی $t = 0^-$ و $t = 0^+$، منبع جریان سمت چپ فعال می‌شود و بسیاری از جریان‌ها و ولتاژها در $t = 0^-$ ناگهان عوض می‌شوند. مدار مربوطه در شکل ۲۸-۹ (ج) نشان داده شده است. با این وجود، ما توجه خود را روی **کمیت‌هایی متمرکز می‌کنیم که نتواند تغییر کند، از آن جمله می‌توان جریان القاگر و ولتاژ خازن را نام برد.** هر دو کمیت فوق در فاصله زمانی کلیدزنی ثابت می‌مانند، پس:

$$i_L(0^+) = 5\ \text{A} \quad \text{و} \quad v_C(0^+) = 150\ \text{V}$$

چون اکنون دو جریان در گره سمت چپ داریم، آنگاه:

$$i_R(0^+) = -1\ \text{A} \quad \text{و} \quad v_R(0^+) = -30\ \text{A}$$

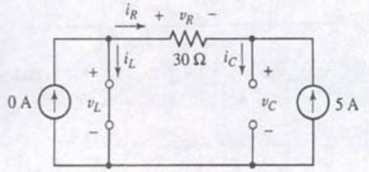
$$i_C(0^+) = 4\ \text{A} \quad \text{و} \quad v_L(0^+) = 120\ \text{V}$$

به این ترتیب شش مقدار در $t = 0^-$ و شش مقدار در $t = 0^+$ داریم. از میان این شش مقدار اخیر تنها ولتاژ دو سر خازن و جریان القاگر با مقادیر حاکم در $t = 0^-$ تفاوت ندارند.

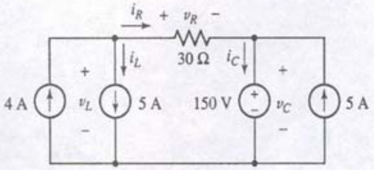
می‌توانستیم روشی مختصر و متفاوت برای ارزیابی این جریان‌ها و ولتاژها در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ را هم برگزینیم. قبل از عمل کلیدزنی تنها ولتاژها و جریان‌های ثابت در مدار برقرارند. بنابراین می‌توان القاگر را با اتصال کوتاه و خازن را با مدار باز جایگزین کرد. مدار شکل ۲۸-۹ (الف) بر این اساس دوباره در شکل ۲۹-۹ (الف) ترسیم شده است. در سمت راست تنها منبع جریان فعال است که مقدار آن هم 5A است و در مقاومت و القاگر جاری است. بنابراین $i_R(0^-) = -5\text{A}$، $v_R(0^-) = -150\text{V}$، $i_L(0^-) = 5\text{A}$، $v_C(0^-) = 0$، $i_C(0^-) = 0$ و $v_C(0^-) = 150\text{V}$ خواهند بود.

اکنون به ترسیم مدار معادل مسئله می‌پردازیم که در تعیین چند ولتاژ و جریان در $t = 0^+$ ما را یاری می‌نماید. هر **ولتاژ خازن و جریان القاگر در زمان کلیدزنی باید ثابت بماند.** برای تضمین این شرایط القاگر را با منبع جریان و خازن را با منبع ولتاژی جایگزین می‌کنیم. هر منبع در حین انفصال سعی در ثابت نگه‌داشتن پاسخ دارد. مدار معادل شکل ۲۹-۹ (ب) به این ترتیب به‌دست می‌آید. توجه کنید که **مدار شکل ۲۹-۹ (ب) تنها بین فاصله 0^- و 0^+ معتبر است.**

ولتاژها و جریان‌ها با تحلیل این مدار dc در $t = 0^+$ معین می‌شوند. حل چندان مشکل نیست ولی تعداد نسبتاً زیاد منابع در شبکه، ظاهری نامأنوس به آن داده است. با این وجود



(الف)



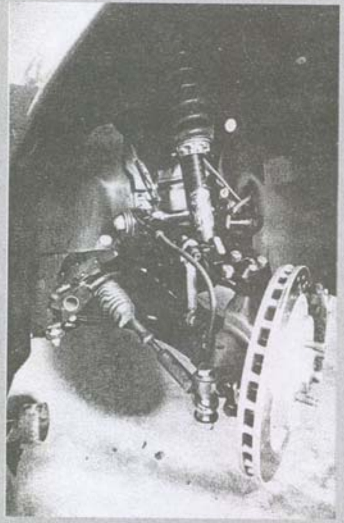
(ب)

شکل ۲۹-۹ (الف) مدار ساده‌ای که در $t = 0^-$ با مدار شکل ۲۸-۹ (الف) معادل است. (ب) مدار معادل دیگری برای مدار شکل ۲۸-۹ (الف) که در فاصله $t = 0^-$ تا $t = 0^+$ اعتبار دارد.

کاربرد عملی

مدل‌سازی سیستم تعلیق خودکار

در مقدمه گفتیم که مفاهیم مورد بحث در این فصل فراتر از تحلیل یک مدار الکتریکی است. در واقع فرم کلی معادلات دیفرانسیلی که ما با آن‌ها سروکار داریم به زمینه متفاوتی مرتبط است. کافی است که بدانیم چگونه هر پارامتر جدید را ترجمه کنیم. مثلاً سیستم تعلیق (کمک‌فنر) اتومبیلی را که در شکل ۳۲-۹ دیده می‌شود درنظربگیرید. پیستون به سیلندر وصل نشده است ولی به فنر و چرخ متصل می‌باشد. بنابراین قسمت‌های متحرک عبارتند از: فنر، پیستون و چرخ.



شکل ۳۲-۹ نمونه سیستم تعلیق خودکار.

ما ابتدا این سیستم فیزیکی را با درنظرگرفتن نیروهای درگیر مدل‌سازی می‌کنیم. با تعریف تابع پیستون $p(t)$ که به ما می‌گوید پیستون در کجا قرار گرفته است، می‌توانیم نیروی وارده به فنر F_S را بنویسیم:

$$F_S = K\ p(t)$$

که در آن K به عنوان ثابت فنر شناخته می‌شود و واحد lb/ft را دارد. نیروی F_W وارده بر چرخ برابر با جرم چرخ در شتاب آن است. یا:

$$F_W = m\frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

که در آن m برحسب $\text{lb.s}^2/\text{ft}$ اندازه‌گیری می‌شود. آخرین و نه تنها نیروی اصطکاک F_f که روی پیستون عمل می‌کند عبارت‌است از $F_f = \mu_f\frac{dp(t)}{dt}$ که μ_f ضریب اصطکاک و واحد آن lb.s/ft است. بر اساس فیزیک پایه می‌دانیم که جمع همه نیروهای وارده بر سیستم باید صفر باشد. بنابراین:

$$\frac{md^2p(t)}{dt^2} + \mu_f\frac{dp(t)}{dt} + Kp(t) = 0 \qquad (۳۴)$$

این معادله در طول فعالیت‌های آکادمیک باید یک بار ما را به زحمت بیاندازد ولی نه بیشتر.

با مقایسه معادله (۳۲) با معادلات (۳۰) و (۳۱) بلافاصله ملاحظه می‌شود که حداقل به فرم کلی‌اش یک همانندی وجود دارد. با انتخاب معادله (۳۰) که مدار RLC سری را توصیف می‌کند، ارتباطات زیر را مشاهده می‌کنیم:

L	القاکنایی	⟶	m	جرم
R	مقاومت	⟶	μ_f	ضریب اصطکاک
C^{-1}	عکس ظرفیت	⟶	K	ثابت فنر
$i(t)$	متغیر جریان	⟶	p(t)	متغیر مکان

درنتیجه اگر مایلیم به‌جای آمپر، از فوت صحبت کنیم. باید از $\text{lb.s}^2/\text{ft}$ در عوض H، از ft/lb به‌جای F و lb.s/ft به‌جای Ω استفاده کنیم، آنگاه کار مدل‌سازی مدار RLC را به ارزیابی سیستم ضربه‌گیر خودکار تبدیل نموده‌ایم. به چرخ نمونه 70 lb نظر بیاندازید. جرم از تقسیم وزن بر شتاب جاذبه زمین ($32.17\ \text{ft/s}^2$) به‌دست می‌آید. درنتیجه $m = 2.176\ \text{lb.s}^2/\text{ft}$ خواهد شد. وزن کل اتومبیل، 1985 lb است و جابه‌جایی استاتیک فنر 4 اینچ می‌باشد (بدون مسافر). ثابت فنر از تقسیم وزن روی هر ضربه‌گیر بر جابه‌جایی آن حاصل می‌شود، بنابراین:

$$K = (\frac{1}{4})(1985)(3\text{ft}^{-1}) = 1489\ \text{lb/ft}$$

خواهد بود. فرض بر این‌است‌که ضریب اصطکاک مجموعه پیستون/سیلندر 65 lb.s/ft باشد. بنابراین می‌توانیم سیستم ضربه‌گیر را با یک مدار RLC با $R = 65\Omega$، $L = 2.176\text{H}$ و $C = K^{-1} = 671.6\ \mu\text{F}$ مدل‌سازی نماییم. فرکانس تشدید ضربه‌گیر $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 26.16\ \text{rad/s}$ و ضریب میرایی $\alpha = \frac{R}{2L} = 14.94\ \text{s}^{-1}$ است. چون $\alpha < \omega_0$ است، ضربه‌گیر ما سیستمی زیرمیرا است. این بدان معنی است که اگر از روی چاله‌ای عبور کنیم، سیستم یک یا دو نوسان خواهد کرد. در مواردی که ضربه‌گیر یا درواقع کمک‌فنر سفت باشد (ضریب فنر بیشتر و یا در سیستم ما مقاومت بزرگ‌تر) برای پیمودن پیچ‌ها با سرعت زیاد مناسب‌تر است زیرا پاسخ فوق میرا به همراه دارد.

در هر حال اگر بیشتر رانندگی روی مسیر ناهموار باشد، مختصر پاسخ زیرمیرا ترجیح داده می‌شود.

باید از آن استفاده نمود. حال بگذارید تعیین پاسخ $v_C(t)$ را برای مدار اصلی شکل ۳۱ـ۹ به اتمام برسانیم. اگر هر دو منبع را بکُشیم، مدار به صورت RLC سری در آمده و به راحتی s_1 و s_2 به ترتیب برابر 1- و 9- به‌دست خواهند آمد. پاسخ واداشته را با وارسی و یا در صورت لزوم با رسم معادل dc می‌توان به دست آورد که مشابه شکل ۲۹ـ۹(الف) ولی یک منبع جریان 4A در آن اضافی است. پاسخ واداشته 150V است. بنابراین:

$$v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B \quad و \quad v_C(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

یا

$$A + B = 0$$

سپس

$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t}$$

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

بالاخره

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t})\ V \quad و \quad A = 13.5 \quad B = -13.5$$

مروری سریع بر روند حل

به طور خلاصه اگر بخواهیم رفتار گذرای یک مدار RLC را معین کنیم، اول باید ببینیم که مدار سری است یا موازی تا بتوانیم رابطه α صحیحی را برگزینیم. دو معادله عبارتند از:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (\text{RLC موازی})$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (\text{RLC سری})$$

تصمیم دوم پس از مقایسه α و ω_0 اتخاذ می‌شود که برای هر دو مدار داریم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

اگر $\alpha > \omega_0$ باشد مدار فوق میرا است و

$$f_n(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

که

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

اگر $\alpha = \omega_0$ باشد مدار میرای بحرانی است و

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}\,(A_1t + A_2)$$

و بالاخره اگر $\alpha < \omega_0$ باشد با پاسخ زیر میرا مواجهیم:

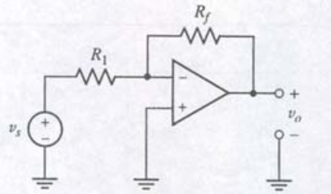
$$f_n(t) = e^{-\alpha t}\,(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

که در آن $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ است.

مرحله آخر در کار ما به منابع مستقل مربوط است. اگر پس از تغییر حالت کلید، منبعی در مدار نباشد، مدار بی‌منبع است و پاسخ طبیعی، کل پاسخ خواهد بود. در صورتی که پس از تغییر هنوز منابع مستقل در مدار موجود باشند، آنگاه مدار تحریک شده و باید پاسخ واداشته را به‌دست‌آوریم. بنابراین پاسخ کامل از جمع زیر حاصل می‌شود:

$$f(t) + f_f(t) + f_n(t)$$

این رابطه به هر دو کمیت جریان یا ولتاژ قابل اعمال است. گام نهایی تعیین ثابت‌ها با فرض مقادیر اولیه است.



شکل ۳۵ـ۹ تقویت‌کنندهٔ عملیاتی معکوس‌گر با بهرهٔ $v_o/v_s = -R_f/R_1$. op amp ایده‌آل است.

منفی اولین مشتق به‌عنوان ورودی به انتگرال‌گیر دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین خروجی آن $v(t)$ و مقدار اولیه آن $v(0) = 0$ است. برای یافتن مشتق دوم کافی است v را در 9- ضرب کرده آن را در نقطه A تصور نماییم. این عمل تقویت به میزان 9 برابر با تغییر علامت و به وسیله یک تقویت‌کننده معکوس‌گر انجام می‌شود.

شکل ۳۵ـ۹ چنین تقویت‌کننده‌ای را نشان می‌دهد. برای op amp ایده‌آل هر دو ولتاژ و جریان در ورودی صفر هستند. بنابراین جریان در یک جهت R_1 برابر v_s/R_1 و در R_f در جهت دیگر برابر v_o/R_f است. چون مجموع آن‌ها صفر است پس:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_f}{R_1}$$

برای طراحی بهره 9- کافی است مثلاً $R_f = 90k\Omega$ و $R_1 = 10k\Omega$ را در نظر بگیریم.

اگر در هر انتگرال R برابر با $1M\Omega$ و C برابر با $1\mu F$ باشد، داریم:

$$v_o = -\int_0^t v_s\, dt' + v_o(0)$$

اکنون خروجی تقویت‌کننده معکوس‌گر، ورودی مفروض A است و آرایش شکل ۳۶ـ۹ را می‌دهد. اگر کلید سمت چپ در $t = 0$ بسته باشد، ضمن آنکه کلیدهای مقادیر اولیه در همان زمان، خروجی انتگرال‌گیر دوم موج سینوسی نامیرای $v = 2 \sin 3t$ V می‌باشد.

توجه کنید که هر دو مدار LC در شکل ۳۴ـ۹ و op amp در شکل ۳۶ـ۹ دارای خروجی یکسانند، ولی مدار op amp فاقد القاگر است. ولی طوری عمل می‌کند که گویی حاوی القاگری است تا یک ولتاژ سینوسی مناسبی بین پایانه خروجی و زمین به‌وجود آید. این کار می‌تواند نوعی مزیت عملی و اقتصادی در طراحی مدار باشد زیرا القاگرها معمولاً حجیم بوده و از خازن‌ها گران‌ترند و اتلاف بیشتری نیز در آن‌ها داریم (بنابراین نمی‌توان آن‌ها را به خوبی مدل‌سازی کرد).

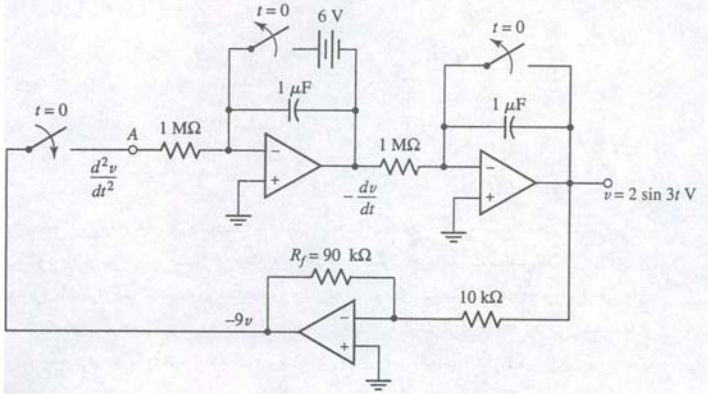
تمرین

۱۱ـ۹ در شکل ۳۶ـ۹ مقدار R_f و مقادیر اولیه چه باشند تا ولتاژ خروجی شکل ۳۶ـ۹ نمایش‌دهنده $v(t)$ در شکل ۳۷ـ۹ باشد.

جواب: 250kΩ، 400 V و 10 V.

۸ـ۹ خلاصه فصل و مرور

- هر مدار حاوی دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی غیر قابل ترکیب سری/موازی با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نشان داده می‌شود.



شکل ۳۶ـ۹ دو انتگرالگیر و یک تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر که برای حل معادلهٔ دیفرانسیل $d^2v/dt^2 = -9v$ به هم متصل شده‌اند.

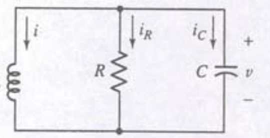
شده است. مطلوبست (الف) مقدار C، (ب) مقدار R را برای داشتن یک ضریب میرایی نمایی $5Gs^{-1}$، (ج) فرکانس نپری مدار، (د) s_1 و s_2 و (هـ) ضریب میرایی مدار.

۸. نشان دهید که اگر $L = 4R^2C$ باشد، معادله $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$ حلی برای معادله (۴) است. اگر $v(0) = 16V$ و $\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = 4$ باشد، A_1 و A_2 را به‌دست‌آورید.

۹. یک سیم مسی نمره 18 به‌طول 5m به عنوان مقاومت در تمرین ۱ـ۹ به‌کار رفته است. (الف) فرکانس تشدید مدار جدید را به‌دست‌آورید. (ب) فرکانس نپر مدار جدید چقدر است. (ج) درصد تغییرات در ضریب میرایی چیست؟

۹ـ۲ مدار RLC موازی فوق میرا

۱۰. در مدار شکل ۹ـ۳۹، فرض کنید $C = 12.5mF$ ، $R = 8\Omega$ ، $L = 5H$ و $v(0^+) = 40V$ باشد. مطلوبست (الف) $v(t)$ به‌شرطی‌که $i(0^+) = 8A$ باشد. (ب) $i(t)$ اگر $i_C(0^+) = 8A$ باشد.



شکل ۹ـ۳۹

۱۱. در شکل ۹ـ۳۹ فرض کنید $i(0) = 40A$ و $v(0) = 40V$ باشد. اگر $L = 12.5mH$ ، $R = 0.1\Omega$ و $C = 0.2F$ باشد. (الف) $v(t)$ را به‌دست‌آورید و (ب) i را در فاصله زمانی $0 < t < 0.3s$ رسم کنید.

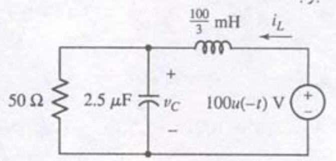
۱۲. مدار شکل ۹ـ۳۹ با استفاده از $R = 20\ m\Omega$ ، $C = 50\ mF$ و $L = 2\ mH$ ساخته شده است. مطلوب است عبارتی برای $i_R(t)$ معتبر در $t > 0$ به شرطی‌که $v(0^+) = 0$ و $i(0^-) = 2\ mA$ باشد. (ب) حل خود را در محدوده $0 < t < 500\ ms$ رسم کنید. (ج) مدار را با PSpice شبیه‌سازی نمایید. آن را به‌طور مناسبی در نقاط مختلف نام‌گذاری کنید. آیا نتیجه شبیه‌سازی با تحلیل یکی است؟

۱۳. در مدار شکل ۹ـ۳۹، فرض کنید $i(0) = 40\ A$ و $v(0) = 40\ V$ باشد. اگر $L = 12.5\ mH$ ، $R = 0.1\ \Omega$ و $C = 0.2\ F$ باشد: (الف) $v(t)$ را بیابید. (ب) i را برای $0 < t < 0.3\ s$ رسم نمایید.

۱۴. مقادیر $R = 15\ \mu\Omega$ ، $C = 50\ \mu F$ و $L = 2\ \mu H$ در مدار شکل ۹ـ۳۹ به کار رفته‌اند. (الف) عبارتی برای $i_C(t)$ معتبر در $t > 0$ بیابید به شرطی که $v(0^+) = 2$ و $i(0^-) = 0$ باشد. (ب) حل خود را در محدوده $0 < t < 5\ ns$ رسم نمایید. (ج) مدار را با PSpice رسم نمایید، آن را نام‌گذاری نمایید. آیا حل تحلیلی با شبیه‌سازی توافق دارد.

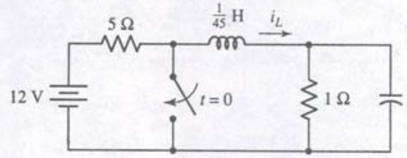
۱۵. برای مدار شکل ۹ـ۳۹، $R = 1\ \Omega$ ، $C = 4\ F$ و $L = 20\ H$ است. شرایط اولیه عبارتنداز $i(0) = 8\ A$ و $v(0) = 0\ V$. (الف) یک عبارت برای $v(t)$، در $t > 0$ پیدا کنید. (ب) مقدار پیک و زمان رخداد آن را معین نمایید. (ج) تحلیل خود را با نتیجه PSpice مقایسه نمایید. آن را نام‌گذاری کنید.

۱۶. عبارتی برای $i(t)$ در مدار شکل ۹ـ۴۰ بیابید به نحوی که در همه زمان‌های t معتبر باشد.



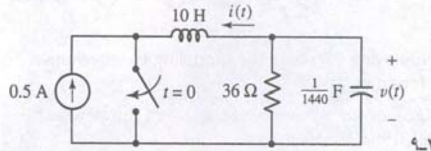
شکل ۹ـ۴۰

۱۷. در شکل ۹ـ۴۱، $i_L(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.



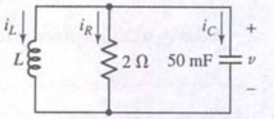
شکل ۹ـ۴۱

۱۸. مدار شکل ۹ـ۴۲ مدت‌ها در همین وضع قرار داشته است. پس از بسته‌شدن کلید در $t = 0$ (الف) مطلوبست $v(t)$ (ب) $i(t)$ و (ج) زمان نشست برای $v(t)$.



شکل ۹ـ۴۲

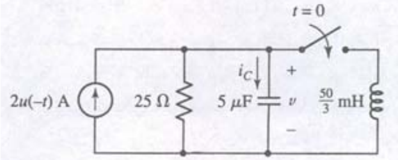
۱۹. برای مدار شکل ۹ـ۴۲، مقدار القاکنایی 1250mH است. اگر بدانیم که خازن از ابتدا 390J انرژی را ذخیره کرده است و القاگر هیچ انرژی اولیه نداشته است، مطلوبست $v(t)$.



شکل ۹ـ۴۳

۲۰. (الف) با مراجعه به شکل ۹ـ۴۳، چه مقداری از L پاسخ گذرای $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$ را تولید می‌کند. (ب) اگر $i_R(0^+) = 10A$ و $i_C(0^+) = 15A$ باشند، A و B را به‌دست‌آورید.

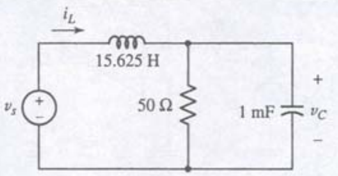
۲۱. کلید در مدار شکل ۹ـ۴۴ از مدت‌ها قبل باز است. (الف) $v_C(0^+)$، (ب) $i_C(0^+)$، (ج) $v_C(t)$ را به‌دست‌آورید. (د) $v_C(t)$ را رسم کنید. (هـ) t را وقتی $v_C(t) = 0$ است معین کنید.



شکل ۹ـ۴۴

تمرین

۹ـ۱۰ فرض کنید در شکل ۹ـ۳۳، $v_s = 10 + 20u(t)\ V$ باشد. مطلوبست (الف) $i_L(0)$، (ب) $v_C(0)$، (ج) $i_{L,f}$ و (د) $i_L(0.1s)$.
جواب: 0.2A، 10V، 0.6V و 0.319V.



شکل ۹ـ۳۳

۹ـ۷ مدار LC بدون اتلاف

اگر مقاومت مدار RLC موازی بی‌نهایت شود، و یا در مدار RLC مقدار آن صفر گردد، مدار ساده LC حلقوی حاصل می‌شود که در آن پاسخی نوسانی تا ابد باقی خواهند ماند. بگذارید نگاهی مختصر به چنین مداری بنماییم و سپس پاسخی مشابه را بدون نیاز به القاگر ملاحظه کنیم.

مدار بی‌منبع شکل ۹ـ۳۴ را درنظربگیرید که در آن مقادیر بزرگ $L = 4H$ و $C = \frac{1}{36}F$ برای سادگی محاسبات انتخاب شده‌اند. فرض می‌کنیم $i(0) = -\frac{1}{6}\ A$ و $v(0) = 0$ باشد. در این صورت $\alpha = 0$ و $\omega_0^2 = 9s^{-1}$ و بنابراین $\omega_d = 3\ rad/s$ خواهند بود. در غیاب میرای نمایی، ولتاژ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$v = A\cos 3t + B\sin 3t$$

چون $v(0) = 0$ است، پس $A = 0$ می‌باشد. همچنین:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

از طرفی $i(0) = \frac{1}{6}\ A$ بوده و بنابراین $\frac{dv}{dt} = 6\ V/s$ در $t = 0$ می‌باشد. در این صورت $B = 2V$ است و بنابراین داریم:

$$v = 2\sin 3t\ V$$

که پاسخی سینوسی و نامیرا است. به بیان دیگر پاسخ ولتاژ مدار میرا نیست.

اکنون ببینیم چگونه می‌توان این مدار را بدون استفاده از یک LC به‌دست‌آورد. می‌خواهیم معادلات دیفرانسیلی بنویسیم که v در آن صدق کند و سپس آن را با op amp پیاده کنیم تا حل معادله را تولید کند. گرچه ما در این‌جا مثال خاصی را حل می‌کنیم ولی مثال کلی است و می‌توان آن را برای هر معادله دیفرانسیل همگن خطی به کاربرد.

برای مدار LC شکل ۹ـ۳۴، v را به‌عنوان متغیر تصور کرده و مجموع جریان‌های خازنی و القاگر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\frac{dv}{dt} = 0$$

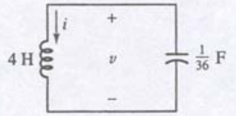
داریم:

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

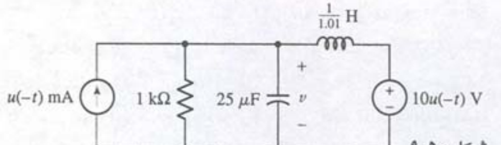
یا

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

برای حل این معادله از تقویت‌کننده عملیاتی به‌عنوان انتگرال‌گیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌شود بالاترین مرتبه مشتق در معادله $\frac{d^2v}{dt^2}$ باشد. اکنون طبق بحث بخش ۵ـ۷ از op amp به‌عنوان انتگرال‌گیر استفاده می‌نماییم. ورودی به آن در نقطه‌ای مانند A، $\frac{d^2v}{dt^2}$ و خروجی $\frac{-dv}{dt}$ است، که تغییر علامت در آن به علت استفاده از آرایش معکوس‌گری op amp می‌باشد. مقدار اولیه $\frac{dv}{dt}$ برابر 6 V/s فرض می‌شود و بنابراین ولتاژ 6- را باید در انتگرال‌گیر ایجاد کرد. حال

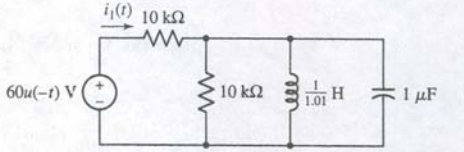


شکل ۹ـ۳۴ این مداری بدون اتلاف است و پاسخ نامیرای $v = 2\sin 3tV$ را ایجاد می‌کند به‌شرطی‌که $v(0) = 0$ و $i(0) = -\frac{1}{6}\ A$ باشد.



شکل ۹-۵۰

۳۷. در شکل ۹-۵۱، $i_1(t)$ را در $t > 0$ به‌دست‌آورید.



شکل ۹-۵۱

۳۸. به جای مقاومت 25Ω در شکل ۹-۴۴ حداقل مقاومت چه باشد تا پاسخ $v(t)$ زیرمیرا باشد. مقاومت خود را در 1000 ضرب کنید و پاسخ را بکشید. به کمک PSpice زمان نشت را معین نمایید و برچسب‌های مناسب را روی نمودار خود نصب کنید.

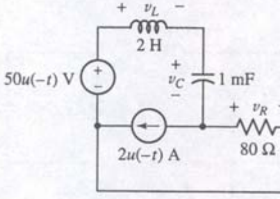
۳۹. مقدار R را برای مدار شکل ۹-۱۴ معین کنید ($C = \frac{1}{42}$F، L = 7H)، به نحوی که زمان نشت t_s در آن حداقل شود، $v(0) = 0$ و $i(0) = 10A$. مقدار t_s چقدر است؟

۴۰. (الف) مقاومت 2Ω شکل ۹-۴۶ را با یک مقاومت 5Ω تعویض کنید. عبارتی برای $i_L(t)$ به‌دست‌آورید و آن را برای t = 2.5s حل کنید. (ب) مقاومت 2Ω را این بار با 0.5Ω تعویض کنید. عبارتی برای $i_L(t)$ بیابید و آن را برای t = 250ms حل نمایید. (ج) مدارهای بخش (الف) و (ب) را شبیه‌سازی کنید و جریان القاگر را در هر یک از آن‌ها روی همان نمودار رسم نمایید. برای هر کدام برچسب‌های لازم را فراهم کنید.

۴۱. (الف) با PSpice مدار شکل ۹-۴۶ را مدل‌سازی کنید. به‌جای منبع جریان $4u(-t)$، مدار بی‌منبع مناسبی را با مقادیر اولیه برای القاگر و خازن به‌کاربرید. برچسب‌ها را روی آن بچسبانید. (ب) جریان $i_L(t)$ را با probe رسم کنید و با حل دستی مقایسه نمایید. از probe برای تعیین زمان نشست استفاده کنید.

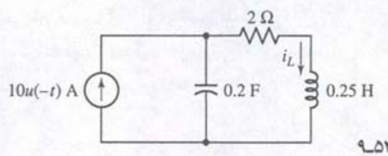
۹-۵ مدار RLC سری بی‌منبع

۴۲. v_C، v_R و v_L را در شکل ۹-۵۲ برای t = 40ms بیابید.



شکل ۹-۵۲

۴۳. $i_L(t)$ را برای $t > 0$ در مدار شکل ۹-۵۳ رسم کنید.

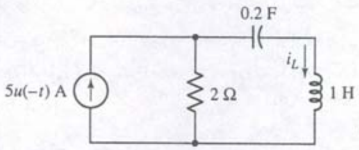


شکل ۹-۵۳

۴۴. در مدار شکل ۹-۲۱ (الف)، بگذارید R = 300Ω و C = 1μF و مدار در حالت میرای بحرانی باشد. اگر $v_C(0) = -10V$ و $i(0) = -150mA$ باشد. (الف) $v_C(t)$ را بیابید. (ب) $|v_C|_{max}$ و (ج) $v_{C,max}$ را بیابید.

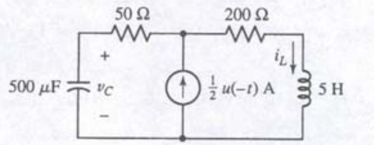
۴۵. دوگان مسئله ۱۶ را در مورد مدار شکل ۹-۴۰ به‌دست‌آورید. آن را حل کنید.

۴۶. (الف) $i_L(t)$ را در شکل ۹-۵۴ برای $t > 0$ به‌دست‌آورید. (ب) $|i_L|_{max}$ و $i_{L,max}$ را معین کنید.



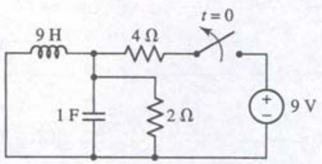
شکل ۹-۵۴

۴۷. برای مدار شکل ۹-۵۵ و در $t > 0$، (الف) $i_L(t)$ و (ب) $v_C(t)$ را معین کنید.



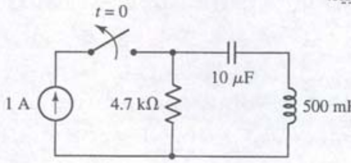
شکل ۹-۵۵

۴۸. انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۹-۵۶ را در t = 2s به‌دست‌آورید. صحت آن را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۹-۵۶

۴۹. کلید در شکل ۹-۵۷ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. مقدار اوج ولتاژ دو سر القاگر 500 - mH را به‌دست‌آورید و صحت آن را با PSpice تحقیق نمایید.

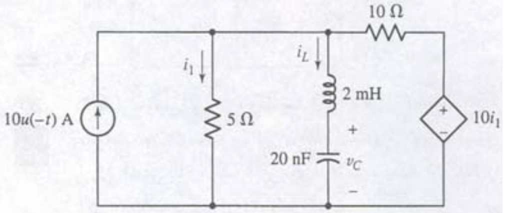


شکل ۹-۵۷

۵۰. یک خازن یک بار به یک باطری 12V برای مدت معین وصل شده و سپس روی یک خودروی برف‌روب قرار گرفته است. در حین یک زلزله خفیف یک تلفن قدیمی به زمین افتاده به نحوی که یک طرف آن با یک پایانه خازن اتصال پیدا کرده است. سیم تلفن 14mΩ مقاومت و 5μH القاکنایی دارد و خازن در آغاز 144mJ انرژی را ذخیره کرده است. (الف) ولتاژ خازن قبل از زلزله چیست؟ (ب) ولتاژ خازن 1s بعد از اتصال سیم تلفن به خازن را معین کنید. (ج) یک خرس قطبی خیس به دنبال غذا وارد شده و ناگهان پنجه خود را روی سمت وصل‌نشده تلفن و پای دیگرش را روی سمت باز خازن قرار می‌دهد. بدن خرس برای مدت 18μs به لرزش می‌افتد. مدتی که طول می‌کشد خرس خود را از این وضع رها کند 100ms است. مقاومت پوشش خیس خرس چقدر است؟

۵۱. مقاومتی را به‌جای 2Ω در شکل ۹-۵۶ جایگزین کنید که مدار میرای بحرانی باشد. انرژی ذخیره‌شده در مدت t = 100ms در القاگر چقدر است؟

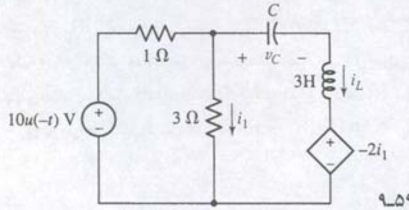
۵۲. عبارتی برای i_L مطابق شکل ۹-۵۸ برای $t > 0$ پیدا کنید.



شکل ۹-۵۸

۵۳. عبارتی برای v_C مطابق شکل ۹-۵۸ برای $t > 0$ پیدا کنید.

۵۴. با مراجعه به شکل ۹-۵۹ یک عبارت برای i_L معتبر برای همه زمان‌ها به دست آورید، اگر $C = 1$ F باشد.



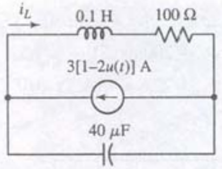
شکل ۹-۵۹

۵۵. با مراجعه به شکل ۹-۵۹ یک عبارت برای v_C معتبر برای همه زمان‌ها به دست آورید، اگر $C = 1$ mF باشد.

۹-۶ پاسخ کامل مدار RLC

۵۶. (الف) $i_L(t)$ را برای همه زمان‌ها در شکل ۹-۶۰ به‌دست‌آورید. (ب) در چه لحظه‌ای پس از $t = 0$، $i_L(t) = 0$ است؟

۵۷. منبع مدار شکل ۹-۵۳ به 10u(t)A تغییر یافته است. $i_L(t)$ را پیدا کنید.

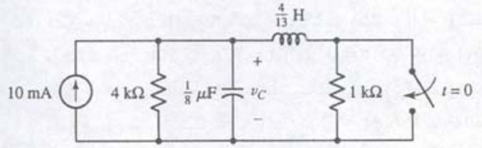


شکل ۹-۶۰

۵۸. منبع مدار شکل ۹-۵۵ را با $i_s = 0.5[1 - u(t)]$A عوض کنید و $i_L(t)$ را معین نمایید.

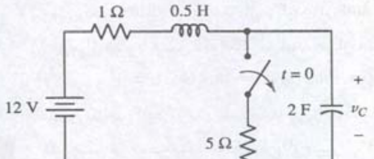
۵۹. منبع شکل ۹-۴۷ را با $i_s = 2[1 + u(t)]$A تعویض کنید و $i_C(t)$ را در $t > 0$ به‌دست‌آورید.

۶۰. (الف) $v_C(t)$ در مدار شکل ۹-۶۱ برای $t > 0$ معین کنید. (ب) $v_C(t)$ را در برابر t رسم کنید. $-0.1 < t < 2$ms می‌باشد.



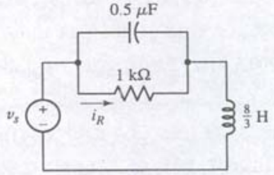
شکل ۹-۶۱

۶۱. کلید در شکل ۹-۶۲ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. در $t = 0$ باز می‌شود. $v_C(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.



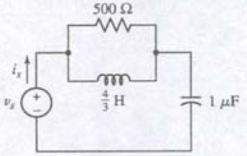
شکل ۹-۶۲

۶۲. در شکل ۹-۶۳، $i_R(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید به‌شرطی‌که $v_s(t)$ برابر (الف) 10u(-t)V و (ب) 10u(t)V باشد.



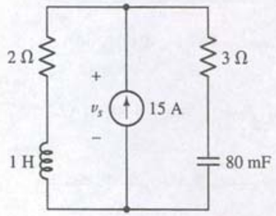
شکل ۹-۶۳

۶۳. در شکل ۹-۶۴، $i_s(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید به‌شرطی‌که $v_s(t)$ برابر (الف) 10u(-t)V و (ب) 10u(t)V باشد.



شکل ۹-۶۴

۶۴. مقاومت 2Ω را در مدار شکل ۹.۶۵ با یک القاگر 3Ω جایگزین نمایید. انرژی ذخیره‌شده در خازن را در $t = 200ms$ معین کنید به‌شرطی‌که منبع جریان در $t = 0$ از 15A به 22A تغییر کند. صحت جواب را با PSpice معین نمایید.



شکل ۹.۶۵

۶۵. منبع جریان در شکل ۹.۶۵ ناگهان از 15A به 22A در $t = 0$ تغییر می‌نماید. ولتاژ v_s را در (الف) $t = 0^-$، (ب) $t = 0^+$، (ج) $t = \infty$ و (د) $t = 3.4s$ معین کنید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید.

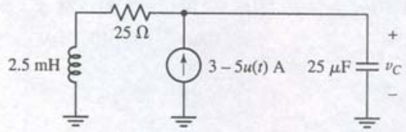
۶۶. منبع جریان در مدار شکل ۹.۶۵ ناگهان در $t = 0$ از 15A به 0A افت می‌کند، سپس در $t = 1s$ به 3A افزایش می‌یابد. ولتاژ $v_C(t)$ را ترسیم کنید. حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.

۶۷. یک القاگر 5mH، یک خازن $25\mu F$ و یک مقاومت 20Ω با یک منبع ولتاژ $v_x(t)$ سری‌اند. قبل از $t = 0$ منبع ولتاژ صفر است. در $t = 0$ به 75V می‌پرد. در $t = 1ms$ به صفر باز می‌گردد. در $t = 2ms$ دوباره به 75V بازمی‌گردد و با همین الگو تکرار می‌شود. جریان منبع را در (الف) $t = 0^-$، (ب) $t = 0^+$، (ج) $t = 1ms$ و (د) $t = 2ms$ به‌دست‌آورید.

۶۸. مداری طراحی کنید که یک پالس سینوسی را با ولتاژ اوج 5V تولید کند. ضمن این‌که سه پیک اضافه دیگر با اوج بیش از 1V داشته باشد. صحت آن را با PSpice تحقیق کنید.

۶۹. یک باطری 12V در جایی روی زمین قرار دارد. پایانه مثبت باطری به انتهای یک خازن 314.2pF سری با القاگر $869.1\mu H$ وصل است. یک زلزله مقداری آب نمک را روی یک انتهای القاگر/خازن (پارچه خیس) ریخته آن را به باطری وصل می‌کند تا یک مدار RLC سری تشکیل گردد. نوسان از گیرنده‌ای با فرکانس 290.5 kHz (1.825 Mrad/s) اخذ می‌شود. مقاومت پارچه خیس چقدر است؟

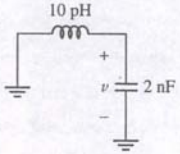
۷۰. ولتاژ $v_C(t)$ در دو سر خازن شکل ۹.۶۶ در $t = 1ms$ چقدر است؟ صحت پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید.



شکل ۹.۶۶

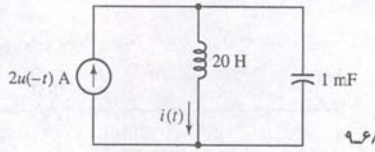
۹.۷ مدار LC بدون اتلاف

۷۱. یک مدار op amp برای مدل‌سازی پاسخ ولتاژ مدار LC شکل ۹.۶۷ طراحی کنید. صحت کار خود را با شبیه‌سازی مدار شکل ۹.۶۷ و استفاده از تقویت‌کننده LF 411 تحقیق کنید. فرض شود که $v(0) = 0$ و $i(0) = 1\ mA$ است.



شکل ۹.۶۷

۷۲. با مراجعه به شکل ۹.۶۸ یک مدار op amp طراحی کنید که خروجی‌اش در $t > 0$ برابر $i(t)$ باشد.



شکل ۹.۶۸

۷۳. یک مدار RC بی‌منبع با یک مقاومت $1k\Omega$ و خازن 3.3mF ساخته شده است. ولتاژ اولیه دو سر خازن 1.2V است. (الف) معادله مشتق را برای v یعنی ولتاژ دو سر خازن برای $t > 0$ بنویسید. (ب) مداری با op amp با خروجی $v(t)$ طراحی کنید.

۷۴. خازن را در مدار شکل ۹.۶۷ با القاگر 20H موازی با خازن $5\mu F$ جایگزین کنید. مداری با op amp طراحی کنید که خروجی‌اش در $t > 0$ برابر $i(t)$ باشد. صحت طراحی خود را با شبیه‌سازی خازن ـ مقاومت و نیز با مدار op amp تحقیق کنید. از تقویت‌کننده عملیاتی LM111 در شبیه‌سازی PSpice استفاده کنید.

۷۵. یک مدار RL بی‌منبع حاوی مقاومت 20Ω و القاگر 5H است. اگر مقدار اولیه جریان القاگر 2A باشد. (الف) معادله دیفرانسیل i را برای $t > 0$ بنویسید. (ب) یک op amp انتگرال‌گیر برای تهیه $i(t)$ به عنوان خروجی طراحی کنید. فرض کنید $R_1 = 1M\Omega$ و $C_f = 1\mu F$ باشد.

فصل دهم

تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

مقدمه

پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی از دو بخش تشکیل شده است، یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ واداشته. پاسخ طبیعی، پاسخی گذرا با عمری کوتاه از مداری است که در آن شرایط ناگهان تغییر کند. پاسخ واداشته پاسخی ماندگار، با عمری طولانی برای منابع مستقل موجود است. تا این‌جا، تنها پاسخ مربوط به منابع dc را مطالعه کردیم. تابع تحریک رایج دیگر، موج سینوسی است. این تابع ولتاژ موجود در پریز برق خانه‌ها و نیز ولتاژ خطوط انتقال نیرو متصل به یک منطقه مسکونی یا صنعتی را توصیف می‌نماید.

در این فصل، فرض می‌کنیم که پاسخ گذرا کم اهمیت است و تنها پاسخ حالت ماندگار مداری مثل تلویزیون، توستر نان یا شبکه توزیع برق مورد توجه باشد. ما این‌گونه مدارها را با تکنیکی قوی که معادلات انتگرالی ـ مشتقی را به معادلات جبری تبدیل می‌کند، تحلیل خواهیم کرد.

مفاهیم کلیدی

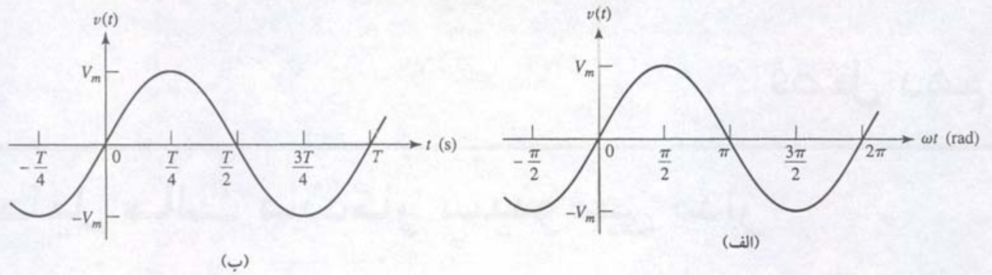
- مشخصات توابع سینوسی
- نمایش فیزوری سینوسی‌ها
- تبدیل بین حوزه‌های زمان و فرکانس
- امپدانس و ادمیتانس
- راکتانس و سوسپتانس
- ترکیبات سری و موازی در حوزه فرکانس
- تعیین پاسخ واداشته با استفاده از فیزورها
- کاربرد روش‌های تحلیل مدار در حوزه فرکانس

۱۰.۱ ویژگی‌های توابع سینوسی

ولتاژ متغیر سینوسی زیر

$$v(t) = V_m \sin\omega t$$

که در شکل ۱۰.۱ (الف) هم نشان داده شده را ملاحظه کنید. دامنه موج سینوسی V_m و آرگومان آن ωt است. فرکانس زاویه‌ای، ω می‌باشد. در شکل ۱۰.۱ (الف)، $V_m \sin\omega t$ به صورت تابعی از آرگومان ωt رسم شده است و از آن تبعیت پریودیک یا تکراری موج سینوسی را کاملاً می‌توان مشاهده کرد. تابع هر 2π رادیان یک بار تکرار می‌گردد و پریود آن، بنابراین 2π رادیان است. در شکل ۱۰.۱ (ب)، $V_m \sin\omega t$ به صورت تابعی از t رسم شده است و لذا پریود آن اکنون T می‌باشد. یک موج سینوسی با پریود T باید در هر ثانیه $\frac{1}{T}$ تناوب را طی می‌کند، بنابراین فرکانس f برحسب Hz برابر $\frac{1}{T}$ است. پس $f = \frac{1}{T}$.



شکل ۱ـ۱۰ موج سینوسی $v(t) = V_m \sin\omega t$. (الف) برحسب ωt و (ب) برحسب t.

و چون

$$\omega T = 2\pi$$

است، رابطه مرسوم بین فرکانس و فرکانس زاویه‌ای را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

پسفازی و پیشفازی

فرم کلی توابع سینوسی بدین شکل است:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

که در آن زاویه فاز θ به آرگومان اضافه شده است. معادله ۱ در شکل ۲ـ۱۰ به صورت تابعی از ωt ترسیم شده و زاویه فاز به صورت مقدار جابه‌جایی موج اصلی برحسب رادیان به چپ، یا به عبارتی زودهنگام ظاهر شده است. چون نقاط متناظر روی موج سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$، به اندازه θ رادیان یا ω / θ ثانیه زودتر رخ می‌دهند، گوییم $V_m \sin(\omega t + \theta)$ به اندازهٔ θ رادیان از $V_m \sin \omega t$ پیشفاز است. به همین دلیل می‌توان گفت که $\sin \omega t$ به اندازه θ از $\sin(\omega t + \theta)$ پس افتاده است و یا از $\sin(\omega t + \theta)$ به اندازهٔ $-\theta$ پیش یا از $\sin(\omega t - \theta)$ به اندازه θ پیش است.

در هر یک از حالات، **پسفاز** یا **پیشفاز**، گوییم که امواج سینوسی **اختلاف فاز** دارند. اگر زاویه فاز یکی باشند، گوییم امواج سینوسی **همفازند**.

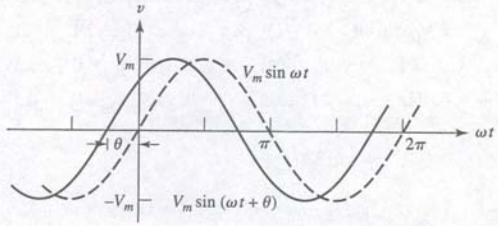
در مهندسی برق، زاویه فاز معمولاً به درجه داده می‌شود، نه برحسب رادیان. برای پرهیز از تداخل، همواره از سمبل درجه استفاده خواهیم کرد. ضمن این کار همیشه برای تبدیل رادیان به درجه ما فقط زاویه را در $180/\pi$ ضرب می‌کنیم. بنابراین به جای نوشتن

$$v = 100 \sin(2\pi\, 1000t - \frac{\pi}{6})$$

خواهیم نوشت:

$$v = 100 \sin(2\pi\, 1000t - 30^\circ)$$

برای تبدیل رادیان به درجه باید آن را در $180/\pi$ ضرب کرد.



شکل ۲ـ۱۰ موج سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$ نسبت به $V_m \sin \omega t$، θ رادیان پیشفاز است.

هنگام محاسبه عبارات فوق در زمان‌های معینی مثل $t = 10^{-4}$s، مقدار $2\pi\, 1000t$ تبدیل به 0.2π رادیان می‌گردد و لذا قبل از جمع با 30° باید آن را به صورت 36° نوشت. سعی کنید سیب خود را با پرتقال جمع نکنید.

> اگر بخواهیم دو موج سینوسی را مقایسه کنیم، باید:
> ۱. هر دو به صورت سینوسی یا کسینوسی باشد.
> ۲. هر دو با دامنه مثبت نوشته شوند.
> ۳. فرکانس‌های برابری داشته باشند.

$$-\sin \omega t = \sin(\omega t \pm 180^\circ)$$
$$-\cos \omega t = \cos(\omega t \pm 180^\circ)$$
$$\mp \sin \omega t = \cos(\omega t \pm 90^\circ)$$
$$\pm \cos \omega t = \sin(\omega t \pm 90^\circ)$$

تبدیل سینوس به کسینوس

اساساً سینوس و کسینوس یکی هستند، ولی اختلاف فازی 90° دارند. بنابراین $\sin\omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$. مضاربی از 360° را می‌توان به آرگومان هر تابع سینوسی یا کسینوسی اضافه یا کم کرد، بدون آن که مقدارش تغییر یابد. بنابراین می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m1} \cos(5t + 10^\circ) \\ &= V_{m1} \sin(5t + 90^\circ + 10^\circ) \\ &= V_{m1} \sin(5t + 100^\circ) \end{aligned}$$

نسبت به

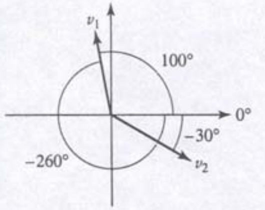
$$v_2 = V_{m2} \sin(5t - 30^\circ)$$

به اندازهٔ 130° پیشفاز است. همچنین می‌توان گفت v_1 از v_2 به اندازهٔ 230° پسفاز می‌باشد. زیرا v_1 را می‌توان چنین نوشت:

$$v_1 = V_{m1} \sin(5t - 260^\circ)$$

البته فرض بر این است که V_{m1} و V_{m2} هر دو کمیات مثبتی هستند. نمایش گرافیکی در شکل ۳ـ۱۰ مشاهده می‌شود. توجه کنید که فرکانس هر دو تابع سینوسی (در این جا 5 rad/s) باید یکسان باشند. در غیر این صورت مقایسه مفهومی ندارد. معمولاً عمل مقایسه فاز بین دو موج سینوسی برحسب یک زاویه کوچکتر یا 180° بیان می‌شود.

مفهوم پسفاز یا پیشفاز بین دو موج سینوسی کاربرد گسترده‌ای دارد و به هر دو آن‌ها به روش ریاضی و گرافیکی قابل تشخیص‌اند.



شکل ۳ـ۱۰ نمایش گرافیکی از دو تابع سینوسی v_1 و v_2. اندازهٔ هر تابع سینوسی با طول پیکان، و فاز آن با زاویهٔ بین پیکان و بخش مثبت محور x متناظر است. در این‌جا v_1 نسبت به v_2 به اندازهٔ $100^\circ + 30^\circ = 130^\circ$ پیشفاز دارد، همچنین می‌توان گفت که v_2 به اندازهٔ 230° نسبت به v_1 پیشفاز است. ولی غالباً تفاوت زاویه‌ها را به صورتی بیان می‌کنند که اندازه‌ای کمتر از 180° داشته باشد.

تمرین

۱ـ۱۰ پسفاز i_1 را نسبت به v_1 پیدا کنید. به شرطی که $v_1 = 120 \cos(120\pi t - 40^\circ)$ V باشد و i_1 برابر (الف) $2.5 \cos(120\pi t + 20^\circ)$A، (ب) $1.4 \sin(120\pi t - 70^\circ)$A، (ج) $-0.8 \cos(120\pi t - 110^\circ)$A.

۲ـ۱۰ C، B، A و ϕ را بیابید:

$$\begin{aligned} &40\cos(100t - 40^\circ) - 20\sin(100t + 170^\circ) \\ &= A\cos100t + B\sin100t = C\cos(100t + \phi) \end{aligned}$$

جواب ۱ـ۱۰: -60°، 120° و -110° **جواب ۲ـ۱۰:** 27.2، 45.4، 52.9 و -59.1°.

۲ـ۱۰ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

حالا که با مشخصات ریاضی توابع سینوسی آشنا شدیم، آماده‌ایم تا یک تابع تحریک سینوسی را به یک مدار ساده اعمال کرده، پاسخ واداشته را به دست آوریم. ابتدا معادله دیفرانسیلی که در مدار مفروض صادق باشد را می‌نویسیم. حل کامل این معادله از دو بخش مکمل (پاسخ

طبیعی) و انتگرال خاص (پاسخ واداشته) تشکیل شده است. روشی را که در این فصل پیشنهاد خواهیم کرد فاقد پاسخ گذرای کوتاه مدت یا طبیعی است و فقط به پاسخ طولانی‌مدت یا ماندگار توجه شده است.

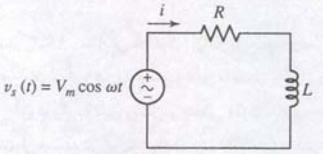
پاسخ ماندگار

جمله پاسخ ماندگار مترادف با پاسخ واداشته است و مدارهایی که ما آماده تحلیل آن هستیم را معمولاً حالت ماندگار سینوسی می‌نامند. متأسفانه ماندگار به معنی "بدون تغییر با زمان" در ذهن دانشجویان نقش بسته است. البته این تغییر برای توابع محرک dc صحیح است ولی پاسخ حالت ماندگار سینوسی قطعاً با زمان تغییر می‌کند. ماندگار درواقع به وضعیتی اشاره دارد که پس از پایان پاسخ گذرا یا طبیعی برقرار می‌گردد.

پاسخ واداشته فرم ریاضی تابع تحریک را به‌علاوه همه مشتقات و اولین انتگرال آن را دارد. با این آگاهی، یکی از روش‌های یافتن پاسخ واداشته این‌است‌که فرض کنیم حل متشکل از جمع این توابع است و در آن هر تابع دامنه مجهولی دارد که با جایگزینی مستقیم در معادله دیفرانسیل باید تعیین شوند. به‌زودی خواهیم دید که این کار طولانی است و لذا تصمیم داریم روش ساده‌تری را دنبال کنیم.

مدار RL شکل ۴-۱۰ را ملاحظه نمایید. منبع ولتاژ سینوسی $v_s = V_m \cos \omega t$ مدت‌ها قبل به مدار متصل شده و پاسخ طبیعی کلاً از بین رفته است. ما در جستجوی پاسخ واداشته‌ای (یا ماندگار) هستیم که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$



شکل ۴-۱۰ یک مدار RL سری که یافتن پاسخ واداشته‌اش موردنظر است.

که از اعمال KVL حول حلقه ساده مدار به دست آمده است. در هر لحظه که مشتق برابر صفر باشد، جریان باید فرم $i \propto \cos \omega t$ را داشته باشد. به‌طور مشابه در هر لحظه که جریان صفر باشد، مشتق باید متناسب با $\cos \omega t$ گردد. بنابراین جریان فرم $\sin \omega t$ دارد. پس می‌توان انتظار داشت که پاسخ واداشته فرم زیر را داشته باشد.

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

که I_1 و I_2 ثابت‌های حقیقی بوده و به V_m، R، L و ω بستگی دارند. هیچ ثابت یا تابع نمایی نمی‌تواند به میان آید. با جایگزینی پاسخ مفروض در معادله دیفرانسیل برای حل داریم:

$$L(-I_1\omega \sin \omega t + I_2\omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

اگر از جملات کسینوس و سینوس فاکتور بگیریم، داریم:

$$(-LI_1\omega + RI_2) \sin \omega t + (LI_2\omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

این معادله باید برای همه زمان‌های t صحیح باشد و این به شرطی است که ضرایب هر یک از جملات سینوس صفر باشد. بنابراین:

$$\omega L\, I_2 + RI_1 - V_m = 0 \quad \text{و} \quad -\omega L\, I_1 + RI_2 = 0$$

از حل همزمان I_1 و I_2 داریم:

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \qquad I_2 = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2}$$

و بنابراین پاسخ واداشته به این ترتیب به دست می‌آید:

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \sin \omega t \qquad (۲)$$

فرم فشرده‌تر و کاربردی‌تر جواب

رابطه فوق کمی ثقیل است و تصویر واضح‌تری از آن را می‌توان با یک جمله سینوسی یا کسینوسی با زاویه فاز نشان داد. ما فرم کسینوسی را برای بیان پاسخ برمی‌گزینیم.

$$i(t) = A \cos (\omega t - \theta) \qquad (۳)$$

برای یافتن مقادیر A و θ دو روش وجود دارد. می‌توانیم معادله (۳) را مستقیماً در معادله دیفرانسیل بگذاریم یا این‌که دو حل (۲) و (۳) را با یکدیگر برابر کنیم. با انتخاب راه دوم و بسط تابع $\cos (\omega t - \theta)$:

$$A \cos\theta \cos\omega t + A \sin\theta \sin\omega t = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \cos\omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \sin\omega t$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ داریم:

$$A \sin \theta = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \quad \text{و} \quad A \cos \theta = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2}$$

برای یافتن A و θ دو رابطه فوق را بر هم تقسیم می‌نماییم.

$$\frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \tan \theta = \frac{\omega L}{R}$$

همچنین دو رابطه را به توان 2 رسانده و با هم جمع می‌کنیم:

$$A^2\cos^2\theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 = \frac{R^2V_m^2}{(R^2 + \omega^2L^2)^2} + \frac{\omega^2L^2V_m^2}{(R^2 + \omega^2L^2)^2} = \frac{V_m^2}{R^2 + \omega^2L^2}$$

بنابراین

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

و

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}$$

پس فرم دیگر پاسخ واداشته چنین است:

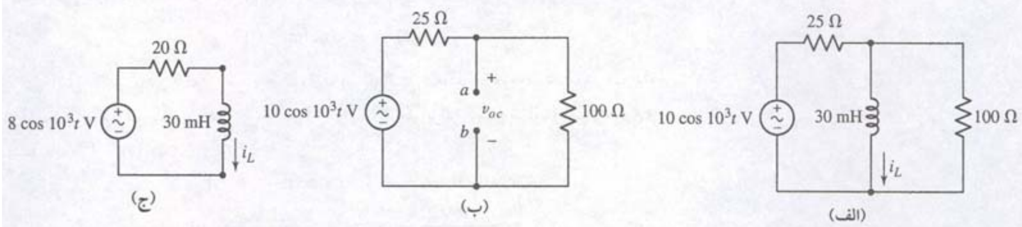
$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \qquad (۴)$$

می‌بینیم که دامنهٔ پاسخ متناسب با دامنه تابع تحریک است، در غیر این صورت مفهوم خطی بودن صحیح نخواهد بود. دامنه پاسخ نیز با افزایش R، L و ω کاهش می‌یابد ولی این کاهش خطی نیست. به نظر می‌رسد جریان به اندازهٔ $\tan^{-1}(\omega L / R)$ که زاویه‌ای بین صفر و 90° است از ولتاژ اعمال شده عقب می‌افتد. وقتی $\omega = 0$ یا $L = 0$ باشد، جریان با ولتاژ هم‌فاز است. با شرط اول جریان از نوع dc و در شرط دوم مدار از نوع مقاومتی است و نتیجه با تجربه قبلی منطبق است. اگر $R = 0$ باشد، جریان به اندازهٔ 90° از ولتاژ عقب می‌افتد. بنابراین اگر در یک القاگر قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد، جریان دقیقاً 90° از ولتاژ عقب است. به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که جریان درون خازن به اندازه 90° از ولتاژ دو سرش پیش است.

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ به نسبت ωL به R وابسته است. ما ωL را رآکتانس القایی می‌خوانیم و برحسب اهم اندازه‌گیری می‌شود و معیار مقابله القاگر را در برابر جریان سینوسی نشان می‌دهد. اکنون اجازه بدهید تا ببینیم چگونه نتایج این تحلیل کلی را به مدار خاصی که فقط یک حلقه سری نیست، می‌توان اعمال کرد. دقت کنید که ما اکنون پاسخ گذرا را نادیده می‌گیریم. فرض بر این‌است‌که ما فقط بر پاسخ حالت ماندگار تکیه می‌کنیم به طوری که همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از بین رفته‌اند.

مثال ۱ـ۱۰

جریان i_L را در مدار شکل ۵ـ۱۰(الف) بیابید.



شکل ۵ـ۱۰ (الف) مدار مثال ۱ـ۱۰ که در آن جریان i_L خواسته شده است. (ب) می‌خواهیم معادل تونن دیده‌شده از پایانه‌های a و b را بیابیم. (ج) مدار ساده‌شده.

گرچه این مدار دارای منبع سینوسی همراه با یک القاگر است، ولی دو مقاومت دیگر هم داشته و یک حلقه تنها نیست.

برای اعمال نتایج قبل، لازم است معادل تونن را با نظاره از پایانه‌های a و b در شکل ۵ـ۱۰(ب) جستجو کنیم. ولتاژ مدار باز v_{oc} برابر است با:

$$v_{oc} = (10 \cos 10^3 t)\,\frac{100}{100 + 25} = 8 \cos 10^3 t \text{ V}$$

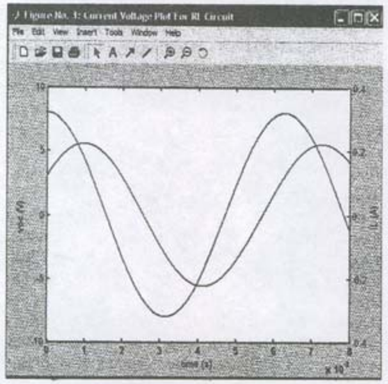
چون منبع وابسته‌ای موجود نیست، R_{th} را با کشتن منابع مستقل و محاسبه مقاومت شبکه غیرفعال به صورت $R_{th} = (25\ \ 100) / (25 + 100) = 20\ \Omega$ به دست می‌آوریم.

حالا یک مدار RL سری با $L = 30$ mH، $R_{th} = 20\ \Omega$ و یک منبع ولتاژ $8 \cos 10^3 t$ V را در شکل ۵ـ۱۰(ب) داریم. بنابراین با اعمال معادله (۴):

$$i_L = \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}} \cos\left(10^3 t - \tan^{-1}\frac{30}{20}\right)$$
$$= 222 \cos(10^3 t - 56.3°)\ \text{mA}$$

امواج ولتاژ و جریان در شکل ۶ـ۱۰ ترسیم شده‌اند.

دقت کنید که اختلاف $90°$ بین ولتاژ و جریان نمودار وجود ندارد به این دلیل که ما نمودار القاگر را رسم نکرده و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.



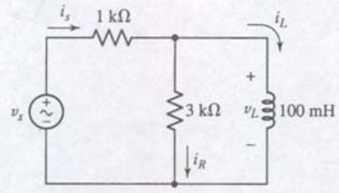
شکل ۶ـ۱۰ موج‌های ولتاژ و جریان که با دستورات متلب زیر ترسیم شده است.

```
EDU» t = linspace(0,8e-3,1000);
EDU» v = 8*cos(1000*t);
EDU» i = 0.222*cos(1000*t – 56.3*pi/180);
EDU» plotyy(t,v,t,i);
EDU» xlabel('time (s)');
```

تمرین

۳ـ۱۰ بگذارید در مدار شکل ۷ـ۱۰، $v_s = 40 \cos 8000\, t$ V باشد، از قضیه تونن استفاده کنید. و مقدار (الف) i_L، (ب) v_L، (ج) i_R و (د) i_s را به دست آورید.

جواب: 18.71 mA؛ 15.97 V؛ 5.32 mA؛ 24.0 mA.



شکل ۷ـ۱۰

۳ـ۱۰ تابع تحریک مختلط

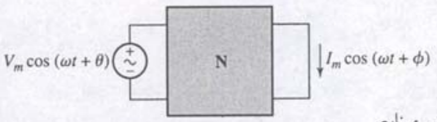
روشی که به وسیله آن پاسخ حالت ماندگار را برای مدار RL یافتیم چندان ساده نبود. می‌توان برای پیچیدگی ناشی از وجود یک القاگر در مدار هم فکر کرد. اگر هر دو عنصر غیرفعال مقاومت باشد، تحلیل حتی با تابع تحریک سینوسی بسیار ساده است. دلیل سادگی رابطه ولتاژ – جریان حاصل به وسیله قانون اهم است. رابطه ولتاژ – جریان القاگر چندان ساده نیست و درعوض در حل یک معادله جبری با یک معادله دیفرانسیل همگن طرف هستیم. درواقع تحلیل هر مداری با روشی که در مثال ارائه شد، چندان عملی نیست و بنابراین به دنبال یافتن تحلیلی ساده‌تریم. نتیجه این تلاش رابطه‌ای جبری میان جریان سینوسی و ولتاژ سینوسی برای القاگرها و خازن‌ها و نیز مقاومت‌ها است و بنابراین قادر خواهیم بود برای هر مدار با هر

سطح پیچیدگی معادلات جبری لازم را بنویسیم. ثابت‌ها و متغیرها در معادلات اعداد مختلط خواهند بود ولی تحلیل هر مدار در حالت ماندگار سینوسی مشابه تحلیل مدار مقاومتی است.

اکنون آماده‌ایم تا یک تابع تحریک مختلط (یعنی تابعی که هر دو بخش **حقیقی و موهومی** دارد) را به یک شبکه الکتریکی اعمال کنیم. ممکن است این کار عجیب به نظر آید، ولی خواهیم دید که استفاده از کمیت‌های مختلط در تحلیل ماندگار سینوسی به روش‌هایی منتهی می‌گردد که بسیار ساده‌تر از کمیت‌های حقیقی است. انتظار داریم که یک تابع محرک مختلط، پاسخی مختلط تولید کند. بخش حقیقی تابع تحریک پاسخ حقیقی و بخش موهومی آن نیز پاسخ موهومی را تولید می‌نماید. انشاءالله که این صحبت منطقی به نظر می‌رسد. تصور این‌که در مداری منبع ولتاژ حقیقی، پاسخی موهومی تولید کند مشکل است و این نکته در مورد عکس آن هم صادق است.

در شکل ۸ـ۱۰ یک منبع سینوسی

$$V_m \cos(\omega t + \theta) \tag{۵}$$



شکل ۸ـ۱۰ تابع تحریک سینوسی $V_m \cos(\omega t + \theta)$ پاسخ ماندگار سینوسی $I_m \cos(\omega t + \phi)$ را تولید می‌کند.

به یک شبکه کلی منتقل شده است که در آن فقط عناصر غیرفعال موجود است (یعنی منابع مستقل در آن وجود ندارد) تا بدین‌ترتیب در به‌کارگیری اصل تجمیع از برخورد با مشکل خودداری شود. هدف یافتن پاسخ جریان در دیگر شاخه‌های شبکه است و پارامترهای موجود در معادله (۵) نیز همگی کمیت‌های حقیقی‌اند.

نشان دادیم که می‌توان پاسخ را با تابع کسینوسی زیر نشان داد:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) \tag{۶}$$

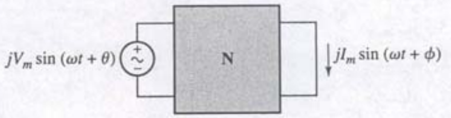
یک تابع تحریک سینوسی همیشه پاسخ واداشته سینوسی با همان فرکانس در مداری خطی، تولید می‌کند.

اکنون بگذارید زمان مرجع خود را با جابه‌جایی فاز تابع تحریک به اندازهٔ $90°$ تغییر دهیم و یا زمان $t = 0$ را عوض کنیم. بنابراین تابع تحریک زیر را داریم:

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90°) = V_m \sin(\omega t + \theta) \tag{۷}$$

وقتی این تابع را به همان شبکه اعمال کنیم، پاسخ چنین خواهد شد:

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90°) = I_m \sin(\omega t + \phi) \tag{۸}$$



شکل ۹ـ۱۰ با اعمال تابع تحریک موهومی سینوسی $jV_m \sin(\omega t + \theta)$ به مدار شکل ۸ـ۱۰ پاسخ موهومی سینوسی $jI_m \sin(\omega t + \phi)$ ایجاد می‌گردد.

پس از عالم واقعی خارج شده و یک تابع تحریک موهومی را که قابل تولید در آزمایشگاه نیست و فقط مفهوم ریاضی دارد، به مدار اعمال می‌کنیم.

منبع موهومی، پاسخ موهومی تولید می‌کند

منبع موهومی را بسیار ساده می‌توان ساخت، فقط کافی است که معادله (۷) را در J که همان عملگر موهومی $\sqrt{-1}$ است، ضرب کنیم. بنابراین داریم:

$$JVm \sin(\omega t + \theta) \tag{۹}$$

خوب، پاسخ چیست؟ اگر منبع را دوبرابر کنیم، بنا به اصل خطی بودن، انتظار داریم پاسخ هم دوبرابر شود. ضرب تابع تحریک با ثابت k ضرب پاسخ در همان ثابت را نتیجه می‌دهد. این که ثابت ما $\sqrt{-1}$ است، نتیجه فوق را منفی نمی‌کند. بنابراین پاسخ منبع معادلهٔ (۹) برابر است با

$$jI_m \sin(\omega t + \theta) \tag{۱۰}$$

منبع موهومی و پاسخ آن در شکل ۹ـ۱۰ دیده می‌شود.

مهندسین برق برای نشان‌دادن $\sqrt{-1}$ معمولاً به‌جای i از j استفاده می‌کنند تا با جریان اشتباه نشود.

اعمال یک تابع تحریک مختلط

ما منبعی حقیقی را به مدار اعمال کردیم و پاسخ حقیقی به دست آمد؛ همچنین منبعی موهومی را اعمال نمودیم، پاسخی موهومی حاصل شد. چون با مداری خطی سروکار داریم، برای یافتن پاسخ مدار به تابع تحریک مختلط که مجموع توابع تحریک حقیقی و موهومی است، می‌توان قضیه تجمیع را به کار برد. بنابراین جمع توابع تحریک معادلات (۵) و (۹) برابر است با:

$$V_m \cos(\omega t+\theta) + jV_m \sin(\omega t+\theta) \qquad (۱۱)$$

و باید پاسخی تولید کند که از جمع معادلات ۶ و ۱۰ به دست می‌آید.

$$I_m \cos(\omega t+\phi) + jI_m \sin(\omega t+\phi) \qquad (۱۲)$$

می‌توان منبع و پاسخ مختلط را به فرم ساده‌تری که از رابطه اولر حاصل می‌شود، نشان داد. پس منبع معادله (۱۱) چنین می‌شود:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} \qquad (۱۳)$$

و پاسخ آن از معادله (۱۲) به دست می‌آید:

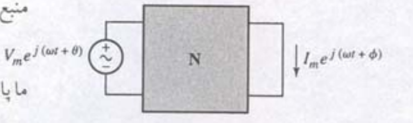
$$I_m e^{j(\omega t+\phi)} \qquad (۱۴)$$

منبع و پاسخ مختلط در شکل ۱۰-۱۰ نشان داده شده است.

در پیوست ۵ اعداد مختلط و مفاهیم مربوطه، حساب اعداد مختلط و رابطه اولر و نیز روابط بین فرم نمایی و قطبی مورد بحث قرار گرفته است.

یک منبع حقیقی، موهومی یا مختلط به ترتیب پاسخی حقیقی، موهومی یا مختلط را تولید می‌نماید. علاوه برآن توسط رابطه اولر و قضیه تجمیع، یک تابع تحریک مختلط را می‌توان مجموع تابع تحریک حقیقی و تابع تحریک موهومی دانست. بخش حقیقی پاسخ از منبع حقیقی و پاسخ موهومی از بخش موهومی منبع مختلط حاصل می‌گردد.

هدف ما این‌استکه به جای اعمال یک تابع تحریک حقیقی برای یافتن پاسخ حقیقی از تابع تحریک مختلطی استفاده کنیم که بخش حقیقی آن همان منبع حقیقی مفروض باشد و نیز انتظار داریم پاسخ مختلطی به دست آوریم که بخش حقیقی آن پاسخ حقیقی مطلوب ما باشد. مزیت این روال این است که معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی توصیفگر پاسخ حالت ماندگار یک مدار، تبدیل به معادلات ساده جبری می‌گردد.



شکل ۱۰-۱۰ پاسخ مدار شکل ۸-۱۰ به ورودی مختلط $V_m e^{j(\omega t+\theta)}$ برابر است با تابع مختلط $I_m e^{j(\omega t+\phi)}$.

روش جبری دیگر برای معادلات دیفرانسیل

بگذارید این کار را روی مدار ساده RL سری در شکل ۱۱-۱۰ پیاده کنیم. منبع حقیقی $V_m \cos\omega t$ اعمال می‌شود، پاسخ $i(t)$ مطلوب است. چون:

$$\cos\omega t = \text{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

منبع مختلط لازم چنین است:

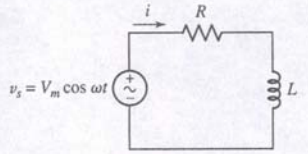
$$V_m e^{j\omega t}$$

ما پاسخ مختلط را برحسب دامنه مجهول I_m و زاویه فاز نامعلوم ϕ بیان می‌کنیم.

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

با نوشتن یک معادله دیفرانسیل برای این مدار خاص داریم:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$



شکل ۱۱-۱۰ یک مدار ساده در حالت ماندگار سینوسی که قرار است با اعمال تابع تحریک مختلط تحلیل شود.

در معادله فوق عبارات مختلط تابع v_s و پاسخ i را جایگزین می‌کنیم:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t+\phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

با اجرای مشتق فوق داریم:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

و به این ترتیب معادله‌ای جبری حاصل می‌گردد. برای تعیین مقدار I_m و ω، طرفین را بر $e^{j\omega t}$ تقسیم می‌کنیم:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega L I_m e^{j\phi} = V_m$$

در سمت چپ فاکتورگیری می‌کنیم:

$$I_m e^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

و یا

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

برای شناسایی I_m و ϕ، سمت راست را به صورت قطبی یا نمایی درمی‌آوریم.

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \qquad (۱۵)$$

بنابراین

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$$

و

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

به فرم قطبی می‌توان چنین نوشت:

$$I_m \angle \phi$$

یا

$$V_m/\sqrt{R^2+\omega^2 L^2} \angle -\tan^{-1}\omega L/R$$

پاسخ مختلط با معادله (۱۵) داده شد. چون I_m و ϕ به‌راحتی قابل شناسایی است. می‌توان بلافاصله عبارتی برای $i(t)$ نوشت. با این وجود اگر ترجیح دهیم راهی مناسب‌تر برگزینیم، می‌توان پاسخ $i(t)$ را با اعمال فاکتور $e^{j\omega t}$ در هر دو طرف معادله (۱۵) و انتخاب بخش حقیقی به دست آورد. از هر یک از دو راه داریم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t+\phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

که با معادله (۴) برای مدار موردنظر برابر است.

مثال ۲-۱۰

ولتاژ مختلط دو سر ترکیب مقاومت 500 Ω سری با القاگر 95 mH را بیابید، به شرطی که جریان مختلط $8e^{j3000t}$ در دو عنصر سری جاری گردد.

ولتاژ مختلط مجهول دامنه V_m و فاز ϕ را خواهد داشت، که هر دو آن‌ها باید معین شوند. با این وجود، ولتاژ باید همان فرکانس جریان (3000 rad/s) را داشته باشد. بنابراین، این ولتاژ را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$V_m\, e^{j(3000t\, +\, \phi)}$$

از برابری آن با جمع ولتاژهای مقاومت و القاگر داریم:

$$V_m\, e^{j(3000t\, +\, \phi)} = (500)\ 0.008\ e^{j3000t} + (0.095)\ \frac{d(0.008e^{j3000t})}{dt}$$

و با گرفتن مشتق درمی‌یابیم که

$$V_m\, e^{j(3000t\, +\, \phi)} = 4e^{j3000t} + j2.28e^{j3000t}$$

با حذف جمله e^{j3000t} خواهیم داشت:

$$V_m\, e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

با تبدیل سمت راست به فرم قطبی، یعنی

$$4 + j2.28 = 4.60\ e^{j29.7^\circ}$$

و از آن نتیجه می‌شود $V_m = 4.60\ V$ و $\phi = 29.7^\circ$ و به این ترتیب ولتاژ مطلوب برابر است با

$$4.60e^{j(3000t\, +\, 29.7^\circ)}\ V$$

اگر پاسخ حقیقی موردنظر باشد، کافی است تنها بخش حقیقی پاسخ مختلط را انتخاب کنیم.

$$\text{Re}\ \{4.60\ e^{j(3000t\, +\, 29.7^\circ)}\} = 4.60\ \cos\ (3000t + 29.7^\circ)\ \ V$$

بنابراین می‌توان پاسخ واداشته یک مدار الکتریکی حاوی یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی را بدون حل معادله دیفرانسیل به دست آورد.

تمرین

اگر در حل این مسئله مشکل دارید، به پیوست ۵ مراجعه نمایید.

۱۰ـ۴ موارد زیر را به فرم مختصات مربعی درآورید:

(الف) $[(2\ \angle 30^\circ)(5\ \angle -110^\circ)](1 + j2)$; و (ب) $(5\ \angle -200^\circ + 4\ \angle 20^\circ)$.

موارد زیر را به مختصات قطبی تبدیل کنید.

(ج) $(2-j7)\ /\ (3 - j)$ و (د) $8 - j4 + [(5\ \angle 80^\circ)\ /\ (2\ \angle 20^\circ)]$.

۱۰ـ۵ اگر استفاده از قرارداد علامت عناصر غیرفعال مجاز باشد، مطلوب است (الف) ولتاژ مختلطی که از اعمال جریان مختلط $4e^{j800t}$ به مدار سری متشکل از خازن $1\ mF$ و مقاومت $2\ \Omega$ حاصل می‌شود. (ب) جریان مختلطی که از اعمال ولتاژ مختلط $100e^{j2000t}$ به مدار موازی متشکل از یک القاگر $10\ mH$ و مقاومت $50\ \Omega$ حاصل می‌شود.

جواب ۴ـ۱۰: $21.4 - j6.38$ ؛ $-0.940 + j3.08$ ؛ $2.30\ \angle -55.6^\circ$ ؛ $9.43\ \angle -11.22^\circ$.

جواب ۵ـ۱۰: $9.43\ e^{j(800t\, -\, 32.0^\circ)}\ V$ ؛ $5.39\ e^{j(2000t\, -\, 68.2^\circ)}\ A$.

۱۰ـ٤ فیزور

یک ولتاژ یا جریان سینوسی با فرکانس مفروضی را می‌توان با دو پارامتر، یکی دامنه و دیگری زاویه فاز نمایش داد. نمایش مختلط ولتاژ و جریان نیز با این دو پارامتر تحقق می‌یابد. مثلاً با فرض فرم سینوسی پاسخ جریان:

$$I_m\ \cos\ (\omega t + \phi)$$

نمایش آن به فرم مختلط عبارت بود از:

$$I_m\ e^{j(\omega t\, +\, \phi)}$$

به محض تعیین I_m و ϕ جریان دقیقاً تعریف می‌شود. در هر مداری که در حالت ماندگار با فرکانس ثابت ω کار کند، هر جریان یا ولتاژ با دامنه و زاویه فازش مشخص می‌گردد. درواقع نمایش مختلط هر ولتاژ یا جریان حاوی فاکتور $e^{j\omega t}$ است. چون این فاکتور در هر کمیتی یکسان است، بنابراین هیچ اطلاعات مفیدی را در بر ندارد. البته می‌توان فرکانس را با وارسی یکی از این فاکتورها مشخص کرد ولی راحت‌تر است که مقدار فرکانس را در کنار نمودار بنویسیم و از حمل اطلاعات بی‌مصرف در سراسر حل مسئله خودداری کنیم. بنابراین می‌توان منبع ولتاژ و پاسخ جریان مثال قبل را با نمایش آن‌ها به فرم زیر ساده کرد.

$$V_m e^{j0^\circ} \quad \text{یا} \quad V_m$$

و

$$I_m\ e^{j\phi}$$

این کمیات مختلف معمولاً به صورت قطبی در عوض نمایی نوشته می‌شوند تا صرفه‌جویی زمان و تلاش‌ها صورت پذیرد. بنابراین ولتاژ منبع

$$v(t) = V_m\ \cos\ \omega t$$

اکنون آن را به صورت مختلط می‌نویسیم:

$$V_m\ \angle 0^\circ$$

و جریان پاسخ نیز به صورت زیر درمی‌آید:

$$i(t) = I_m\ \cos\ (\omega t + \phi)$$

یا

$$I_m\ \angle \phi$$

توجه کنید که تمام مدارهای موردنظر ما پاسخشان به یک تحریک سینوسی، یک سینوسی با همان فرکانس است. بنابراین مقدار ω همیشه معلوم است.

این نمایش مختلط خلاصه را **فیزور** می‌گویند. بیایید مراحل تبدیل یک منبع ولتاژ یا جریان حقیقی را به فیزور قدم به قدم دنبال کنیم، آنگاه خواهیم توانست فیزور را بامعنی‌تر تعریف کرده و برای نمایش آن نماد معرفی نماییم.

یک جریان سینوسی حقیقی مثل

$$i(t) = I_m\ \cos\ (\omega t + \phi)$$

را می‌توان با استفاده از رابطه اولر به صورت بخش حقیقی یک کمیت مختلط نشان داد.

$$i(t) = \text{Re}\{I_m\ e^{j(\omega t\, +\, \phi)}\}$$

سپس با حذف $\text{Re}\{\ \}$ جریان را به صورت کمیتی مختلط نشان می‌دهیم، یعنی یک قسمت موهومی به آن اضافه می‌نماییم، بدون این‌که قسمت حقیقی را تغییر دهیم. با حذف $e^{j\omega t}$، نماد ساده به شکل

$$I = I_m\ e^{j\phi}$$

حاصل می‌گردد که با نوشتن آن به صورت قطبی خواهیم داشت:

$$I = I_m\ \angle \phi$$

این نمایش خلاصه مختلط، **نمایش فیزوری** نام دارد. چون فیزورها کمیات مختلط هستند، با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند. علت استفاده از حروف بزرگ برای نشان دادن فیزوری کمیات فیزیکی این است که فیزور تابعی از زمان نیست، بلکه تنها دامنه و فاز یک تابع متغیر با زمان را نشان می‌دهد. ما این تفاوت دیدگاه را به این صورت بیان می‌کنیم که $i(t)$ نمایش در حوزه زمان یک جریان و $\mathbf{I}$ نمایش حوزه فرکانس آن است. توجه کنید که در بیان ولتاژ و جریان در حوزه فرکانس، خود فرکانس صراحتاً بیان نمی‌شود. با این وجود فرکانس آن‌قدر اهمیت دارد که با حذفش بر بدیهی بودنش تأکید شده است.

مثال ۳ـ۱۰

ولتاژ حوزه زمان $v(t) = 100 \cos (400t - 30°)$ را به حوزه فرکانس تبدیل کنید.

عبارت حوزه زمان از قبل به فرم موج کسینوسی با زاویه فاز داده شده است. بنابراین با حذف $\omega = 400$ rad/s داریم:

$$\mathbf{V} = 100\angle -30° \text{ v}$$

دقت کنید که در نوشتن عبارت فوق چند گام را چشم‌پوشی کرده‌ایم. گاهی این کار موجب اشتباه دانشجویان می‌گردد و ممکن است فراموش کنند که نمایش فیزوری با ولتاژ $v(t)$ در حوزه زمان یکی نیست. درعوض این نمایش فرم ساده‌اش تابع مختلطی است که از جمع مؤلفه موهومی به تابع حقیقی $v(t)$ حاصل شده است.

تمرین

۶ـ۱۰ هر یک از توابع زمانی زیر را به فرم فیزوری درآورید.
(الف) $-5\sin (580t - 110°)$، (ب) $3 \cos 600t - 5\sin (600t + 110°)$ و (ج) $8 \cos (4t - 30°) + 4\sin(4t - 100°)$. (راهنمایی: هر یک را به یک تابع کسینوسی دامنه مثبت تبدیل کنید).
جواب: $5 \angle -20°$، $2.41 \angle -134.8°$ و $4.46 \angle -47.9°$.

فرآیند بازگشت از حوزه فرکانس به حوزه زمان دقیقاً عکس روال قبل است. بنابراین با فرض ولتاژ فیزوری

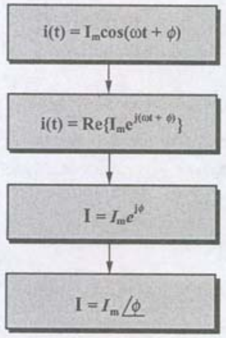
$$\mathbf{V} = 115\angle -45° \text{ v}$$

و این که $\omega = 500$ rad/s است، معادل حوزه زمان را مستقیماً می‌نویسیم:

$$v(t) = 115 \cos (500t - 45°) \text{ V}$$

اگر تابع به صورت سینوسی موردنظر باشد، می‌توان $v(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$v(t) = 115 \sin (500t + 45°) \text{ V}$$



تبدیل $i(t)$ به $\mathbf{I}$، تبدیل فیزوری از حوزهٔ زمان به حوزه فرکانس نام دارد.

تمرین

۷ـ۱۰ فرض کنید $\omega = 2000$ rad/s و $t = 1$ ms باشد. مقدار لحظه‌ای هر یک از جریان‌های فیزوری زیر را پیدا کنید:
(الف) $j10$ A، (ب) $20 + j10$ A و (ج) $20 + j(10 \angle 20°)$ A.
جواب: -9.09 A، -17.42 A و -15.44 A.

۵ـ۱۰ روابط فیزوری برای R، L و C

توان واقعی تکنیک فیزوری بر این حقیقت استوار است که می‌توان برای القاگرها و خازن‌ها، درست مثل مقاومت‌ها، روابطی جبری بین ولتاژ و جریان تعریف کرد. اکنون که می‌توانیم تبدیل به و یا از حوزه فرکانس را انجام دهیم، می‌توانیم در راستای ساده‌کردن تحلیل حالت ماندگار پیش رفته و رابطه‌ای بین ولتاژ فیزوری و جریان فیزوری هر سه عنصر ایجاد نماییم.

مقاومت

مقاومت ساده‌ترین حالت است. در حوزه زمان طبق شکل ۱۲ـ۱۰(الف) معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(t) = Ri(t)$$

حال اجازه دهید تا ولتاژ مختلط را اعمال کنیم:

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos (\omega t + \theta) + jV_m \sin (\omega t + \theta) \quad (۱۶)$$

و پاسخ جریان مختلط را هم مطابق زیر فرض نمایید:

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos (\omega t + \phi) + jI_m \sin (\omega t + \phi) \quad (۱۷)$$

بنابراین

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = RI_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

با تقسیم طرفین بر $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

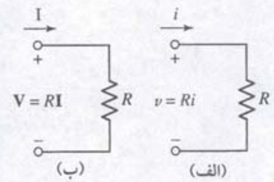
یا به فرم قطبی داریم:

$$V_m\angle\theta = RI_m\angle\phi$$

عبارات $V_m \angle \theta$ و $I_m \angle \phi$ چیزی جز فرم‌های فیزوری $\mathbf{V}$ و $\mathbf{I}$ نیستند. بنابراین:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (۱۸)$$

توجه دارید که قانون اهم در هر دو حوزه زمان و فرکانس معتبر است. به بیان دیگر ولتاژ دو سر یک مقاومت همواره از حاصل‌ضرب مقاومت در جریان جاری شده در آن به دست می‌آید. پس رابطه ولتاژ - جریان در فرم فیزوری برای مقاومت همان فرم رابطه بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان را دارا است. معادله فیزوری تعریف شده در شکل ۱۲ـ۱۰ (ب) ملاحظه می‌شود. زوایای θ و ϕ با یکدیگر برابرند و بنابراین جریان و ولتاژ همیشه هم‌فازند.



شکل ۱۲ـ۱۰ مقاومت و ولتاژ و جریان آن (الف) در حوزهٔ زمان $v = Ri$ و (ب) در حوزهٔ فرکانس $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$.

قانون اهم در هر دو حوزهٔ زمان و فرکانس صحیح است. به بیان دیگر ولتاژ روی یک مقاومت همیشه حاصل‌ضرب مقدار مقاومت در جریان مقاومت است.

به‌عنوان مثالی از استفاده هر دو رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس، بیایید فرض کنیم که در دو سر مقاومت 4 Ω، ولتاژ $8 \cos (100t - 50°)$ برقرار باشد. با حل در حوزه زمان، جریان باید فرم زیر را داشته باشد:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2 \cos (100t - 50°) \text{ A}$$

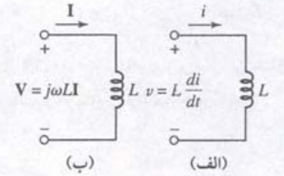
فرم فیزوری ولتاژ $\mathbf{V}$ $8\angle -50°$ است و بنابراین:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 2\angle -50° \text{ A}$$

اگر این پاسخ را به حوزه زمان بازگردانیم، مسلماً عبارت یکسانی برای جریان به دست خواهد آمد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که وقتی یک مدار مقاومتی را تحلیل می‌کنیم، استفاده از حوزه زمانی موجب صرفه‌جویی در زمان یا تلاش نمی‌گردد.

القاگر

اکنون بیایید القاگر را بررسی کنیم. شبکه حوزه زمان در شکل ۱۳ـ۱۰(الف) نشان داده شده است و تعریف عبارت حوزه زمان به صورت زیر است:



شکل ۱۳ـ۱۰ القاگر و ولتاژ و جریان آن (الف) در حوزهٔ زمان $v = L\,di/dt$ و (ب) در حوزهٔ فرکانس $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$.

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad (۱۹)$$

پس از جایگزینی معادله ولتاژ مختلط (۱۶) و معادله جریان مختلط (۱۷) در معادله (۱۹) داریم.

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt} I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

و با تقسیم طرفین بر $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j\theta} = jLI_m e^{j\phi}$$

آن‌گاه فیزور مطلوب چنین است:

$$V = j\omega LI \quad (۲۰)$$

معادلهٔ دیفرانسیل حوزه زمان (۱۹) تبدیل به معادلهٔ جبری (۲۰) در حوزه فرکانس شده است. رابطهٔ فیزوری در شکل ۱۳ـ۱۰(ب) ملاحظه می‌گردد. توجه کنید که زاویه جمله $j\omega L$ دقیقاً $+90°$ است و بنابراین در القاگر I باید نسبت به V به اندازهٔ $90°$ عقب باشد.

مثال ۴ـ۱۰

ولتاژ $8\angle -50°$ V را در فرکانس $\omega = 100$ rad/s به یک القاگر اعمال کرده و فیزور جریان و جریان در حوزه زمان را معین کنید.

از عبارتی که اخیراً برای القاگر به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم.

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{8\angle -50°}{j100(4)} = -j0.02\angle -50° = (1\angle -90°)(0.02\angle -50°)$$

یا

$$I = 0.02\angle -140° \quad A$$

اگر جریان را در حوزه زمان نشان دهیم، داریم:

$$i(t) = 0.02\cos(100t - 140°)\ A = 20\cos(100t - 140°)\ mA$$

خازن

قطعه نهایی مورد بررسی خازن است. رابطه جریان ـولتاژ در حوزه زمان چنین است.

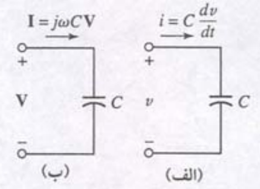
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

عبارت معادل در حوزه فرکانس با انتخاب کمیت‌های مختلط از معادلات (۱۵) و (۱۶) و مشتق‌گیری، حذف $e^{j\omega t}$ و شناسایی V و I به دست می‌آید. با اجرای مراحل فوق داریم:

$$I = j\omega CV \quad (۲۱)$$

بنابراین I در یک خازن به اندازهٔ $90°$ از V پیشفاز است. البته این بدان معنی نیست که یک پاسخ جریان به اندازه یک چهارم پریود از ولتاژی که عامل تولید آن است، پیش است! ما پاسخ حالت ماندگار را مطالعه می‌کنیم و در آن ملاحظه می‌شود که مقدار ماکزیمم جریان که به وسیله افزایش ولتاژ ایجاد می‌شود، $90°$ زودتر از ماکزیمم ولتاژ اتفاق می‌افتد.

نمایش حوزه زمان و حوزه فرکانس در شکل ۱۴ـ۱۰(الف) و (ب) مقایسه شده‌اند. تا این‌جا روابط V-I را برای هر سه عنصر غیرفعال به دست آوردیم. این نتایج در جدول ۱ـ۱۰ خلاصه شده و در ستون‌های مجاور روابط حوزه زمان v-i و حوزه فرکانس V-I نیز نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۴ـ۱۰ رابطهٔ ولتاژ و جریان خازن در (الف) حوزهٔ زمان و (ب) حوزهٔ فرکانس.

جدول ۱ـ۱۰ مقایسهٔ روابط ولتاژ ـجریان حوزهٔ زمان و حوزهٔ فرکانس.

حوزه فرکانس		حوزه زمان	
I, R, + V −	$V = RI$	$v = Ri$	i, R, + v −
I, $j\omega L$, + V −	$V = j\omega LI$	$v = L\frac{di}{dt}$	i, L, + v −
I, $1/j\omega C$, + V −	$V = \frac{1}{j\omega C}I$	$v = \frac{1}{C}\int i\,dt$	i, C, + v −

همه عبارات فیزوری جبری‌اند. هر یک خطی نیز هستند و معادلات مربوط به القاگر و خازن شباهت زیادی به قانون اهم دارند. درحقیقت ما آن‌ها را چون قانون اهم به کار خواهیم برد.

قوانین کیرشهف برای فیزورها

قانون ولتاژ کیرشهف در حوزه زمان به صورت زیر است:

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$$

اکنون به سراغ اتحاد اولر می‌رویم تا هر جمله ولتاژ v_i را با ولتاژ مختلطی که بخش حقیقی یکسانی دارد جایگزین و $e^{j\omega}$ را حذف کنیم تا رابطه زیر به دست آید:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$$

به این ترتیب می‌بینیم قانون ولتاژ کیرشهف برای ولتاژهای فیزوری درست مثل حوزه زمان معتبر است. می‌توان نشان داد که قانون جریان کیرشهف هم با بحثی مشابه، با فیزورها برقراراست. حال نگاهی مختصر به مدار RL سری، یعنی مواردی که چندین بار آن را مطالعه کردیم، می‌اندازیم. مدار در شکل ۱۵ـ۱۰ نشان داده شده و جریان فیزور و چند ولتاژ فیزوری روی آن نشان داده شده است. در این‌جا پاسخ جریان حوزه زمان را با یافتن فیزور جریان پیدا می‌کنیم.
از قانون کیرشهف داریم:

$$V_R + V_L = V_S$$

به کمک روابط V - I که اخیراً به دست آمد، داریم:

$$RI + j\omega LI = V_s$$

آن‌گاه جریان فیزور برحسب ولتاژ منبع V_s پیدا می‌شود:

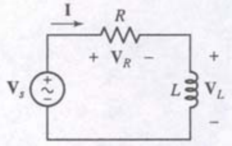
$$I = \frac{V_s}{R + j\omega L}$$

بگذارید منبع ولتاژی با دامنه V_m و زاویه فاز $0°$ برگزینیم. پس:

$$I = \frac{V_m\angle 0°}{R + j\omega L}$$

می‌توان با نوشتن فرم قطبی رابطه فوق، آن را به حوزه زمان انتقال داد:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\angle(-\tan^{-1}(\omega L/R))$$



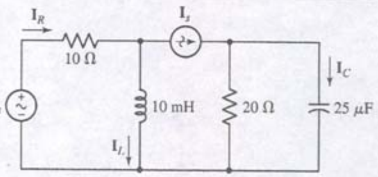
شکل ۱۵ـ۱۰ مدار RL سری که ولتاژ فیزوری به آن اعمال شده است.

و سپس با انجام مراحل آشنای قبل با روشی ساده همان نتیجه‌ای را به دست می‌آوریم که قبلاً در این فصل دیدیم.

تمرین

۱۰ـ۸ در مدار شکل ۱۶ـ۱۰، اگر $\omega = 1200$ rad/s، $I_C = 1.2\ \angle 28°$ A و $I_L = 3\ \angle 53°$ A باشد، (الف) I_s، (ب) V_s و (ج) $i_R(t)$ را پیدا کنید.

جواب: $2.33\ \angle -31.0°$ A، $34.9\ \angle 75.4°$ V و $3.99\cos(1200t + 17.42)$ A.



شکل ۱۶ـ۱۰

۱۰ـ۶ امپدانس

رابطه جریان – ولتاژ برای سه عنصر غیرفعال در حوزه فرکانس با رعایت قرارداد علامت عناصر غیرفعال عبارتند از:

$$V = RI \qquad V = j\omega LI \qquad V = \frac{I}{j\omega C}$$

اگر این روابط را به صورت کسرهای فیزوری ولتاژ به جریان بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{I} = R \qquad \frac{V}{I} = j\omega L \qquad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_R = R$$
$$Z_L = j\omega L$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

می‌بینیم که این نسبت‌ها کمیت‌های ساده‌ای از مقدار هر عنصر و در حالت القاگر و خازن، تابعی از فرکانس هستند. با این نسبت‌ها همچون مقاومت برخورد می‌کنیم با این تفاوت که آن‌ها کمیات مختلط‌اند و در عملیات جبری باید مختلط بودن آن‌ها را درنظر گرفت.

بیایید نسبت فیزور ولتاژ به فیزور جریان را **امپدانس** بنامیم و آن را با Z نشان دهیم. امپدانس کمیتی مختلط است که بُعد اهم دارد. امپدانس فیزور نیست و نمی‌توان آن را با ضرب در $e^{j\omega t}$ به فضای زمان منتقل کرد و بخش حقیقی آن را برداشت. درعوض، چنین تصور می‌کنیم که یک القاگر در حوزه زمان با القاکنایی L و در حوزه فرکانس با امپدانس $j\omega L$ نشان داده می‌شود. یک خازن در حوزه زمان ظرفیت C و در حوزه فرکانس امپدانس $1/j\omega C$ را دارا است. امپدانس مفهومی متعلق به حوزه فرکانس است نه به حوزه زمان.

ترکیب سری امپدانس‌ها

اعتبار و صحت دو قانون کیرشهف در حوزه فرکانس دالّ بر این‌است‌که امپدانس‌ها نیز با قواعدی همچون مقاومت می‌توانند به صورت سری یا موازی ترکیب شوند. مثلاً در $\omega = 10 \times 10^3$ rad/s، یک القاگر 5 mH سری با خازن 100 μF با یک امپدانس که مجموع امپدانس‌های هر کدام از آن‌ها است می‌تواند جایگزین شود. امپدانس القاگر برابر است با:

$$Z_L = j\omega L = j50\ \Omega$$

امپدانس خازن برابر است با

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1\ \Omega$$

توجه کنید که $\frac{1}{j} = -j$.

بنابراین امپدانس ترکیب سری برابر است با:

$$Z_{eq} = Z_L + Z_C = j50 - j1 = j49\ \Omega$$

امپدانس القاگرها و خازن‌ها تابعی از فرکانس است و این امپدانس معادل فقط در فرکانس $\omega = 10000$ rad/s معتبر است. اگر ما فرکانس را به مثلاً $\omega = 5000$ rad/s تغییر دهیم $Z_{eq} = j23\ \Omega$ خواهد شد.

ترکیب موازی امپدانس‌ها

ترکیب موازی القاگر 5 mH و خازن 100 μF در $\omega = 10000$ rad/s درست به همان طریق مقاومت‌های موازی صورت می‌گیرد:

$$Z_{eq} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\ \Omega$$

در $\omega = 5000$ rad/s معادل موازی برابر $-j2.17\ \Omega$ است.

عدد یا کمیت مختلط که امپدانس را نشان می‌دهد به فرم قطبی یا مختصات قائم قابل نمایش است. مثلاً امپدانس $50 - j86.6\ \Omega$ گوییم دارای مقاومت $50\ \Omega$ و رآکتانس (واکنش) $-86.6\ \Omega$ است. مؤلفه مقاومتی بخش حقیقی امپدانس و مؤلفه راکتیو بخش موهومی امپدانس است که اغلب با X نشان داده می‌شود. هر دو دارای واحد اهم هستند. در فرم مختصات قائم $\mathbf{Z} = R + jX$ و در فرم قطبی $\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\ \angle\theta$. بنابراین مقاومت دارای رآکتانس صفر است، درحالی‌که خازن‌ها و القاگرهای ایده‌آل مقاومت صفر دارند. این را مستقیماً می‌توان از فرم قطبی امپدانس نتیجه گرفت. دوباره $\mathbf{Z} = 50 - j86.6\ \Omega$ را ملاحظه کنید که می‌توان آن را به صورت $100\ \angle -60°\ \Omega$ هم نوشت. چون زاویه فاز صفر نیست، می‌دانیم که امپدانس یک مقاومت خالص در فرکانس ω نیست. چون $+90°$ هم نیست، القایی خالص هم نیست و به همین ترتیب چون خاصیت خازنی خالص هم ندارد، زاویه فاز $-90°$ نیست. آیا یک ترکیب سری یا موازی خازن و القاگر می‌تواند وجود داشته باشد و دارای رآکتانس صفر باشد؟ قطعاً. یک مدار ساده را درنظر بگیرید که در آن $\omega = 1$ rad/s، $L = 1$ H و $C = 1$ F همه با $R = 1\ \Omega$ سری باشند. امپدانس معادل این شبکه برابر $\mathbf{Z} = 1 + j(1)(1) - j/(1)(1) = 1\ \Omega$ می‌باشد و مثل این‌است‌که در مدار فقط یک مقاومت 1 اهم وجود دارد.

مثال ۵ـ۱۰

امپدانس معادل شکل ۱۷ـ۱۰(الف) را با فرض فرکانس کاری 5 rad/s به دست آورید.

حل را با تبدیل مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها به امپدانس‌های متناظرشان طبق شکل ۱۷ـ۱۰(ب) آغاز می‌کنیم.

با بررسی شبکه حاصل، مشاهده می‌شود که امپدانس $6\ \Omega$ موازی با $-j0.4\ \Omega$ است. از ترکیب آن‌ها معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(6)(-j0.4)}{6 - j0.4} = 0.02655 - j0.3982\ \Omega$$

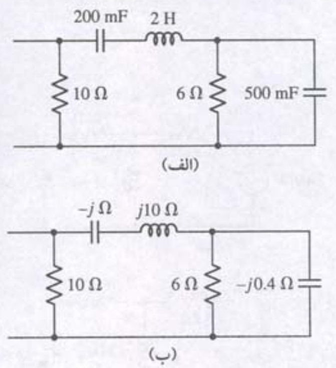
که با هر دو امپدانس $-j\ \Omega$ و $j10\ \Omega$ سری است. به این ترتیب داریم:

$$0.0265 - j0.3982 - j + j10 = 0.02655 + j8.602\ \Omega$$

این امپدانس جدید موازی با $10\ \Omega$ است و بنابراین امپدانس معادل شبکه چنین خواهد بود.

$$10\ ||(0.02655 + j8.602) = \frac{10(0.02655 + j8.602)}{10 + 0.02655 + j8.602}$$
$$= 4.255 + j4.929\ \Omega$$

به همین ترتیب می‌توان امپدانس را در فرم قطبی به صورت $6.511\ \angle 49.20°\ \Omega$ هم نشان داد.

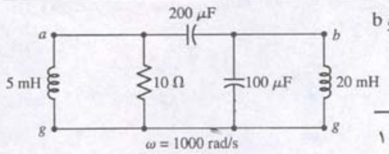


شکل ۱۷ـ۱۰ (الف) شبکه‌ای که باید در آن امپدانس معادل گذاشت. (ب) به‌جای عناصر امپدانس آن‌ها در $\omega = 5$rad/s گذاشته شده است.

تمرین

۱۰ـ۹ با مراجعه به شکل ۱۸ـ۱۰، امپدانس ورودی Z_{in} بین پایه‌های (الف) a و g (ب) b و g (ج) a و b را حساب کنید.

جواب: $2.81 + j4.49\ \Omega$؛ $1.798 - j1.124\ \Omega$؛ $0.1124 - j3.82\ \Omega$.



شکل ۱۸ـ۱۰

باید توجه داشت که مؤلفه مقاومتی امپدانس لزوماً برابر مقاومت موجود در شبکه نیست. مثلاً یک مقاومت 10 Ω سری با یک القاگر 5 H در $\omega = 4$ rad/s دارای امپدانس معادل $Z = 10 + j20\ \Omega$ و یا در مختصات قطبی $22.4\ \angle 63.4°\ \Omega$ است. اما در این حالت، مؤلفه مقاومتی امپدانس با مقاومت برابر است زیرا شبکه یک شبکه سری ساده می‌باشد. با این وجود اگر این دو عنصر موازی با هم قرار گیرند، امپدانس معادل $10(j20)\ /\ (10+j20)$ یا $8 + j4\ \Omega$ است. مؤلفه مقاومتی امپدانس اکنون 8 Ω است.

مثال ۶-۱۰

جریان $i(t)$ را در شکل ۱۹-۱۰ (الف) پیدا کنید.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

می‌خواهیم جریان حالت ماندگار سینوسی جاری در مقاومت 1.5 kΩ ناشی از منبع ولتاژ 3000 rad/s را به دست آوریم.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

کار را با ترسیم مدار در حوزه فرکانس آغاز می‌کنیم. منبع به حوزه فرکانس انتقال یافته و با $40\ \angle -90°$ V نشان داده شده است. پاسخ حوزه فرکانس با **I** نمایش داده شده و امپدانس‌های القاگر و خازن در 3000 rad/s محاسبه شده‌اند و به‌ترتیب برابرند با jkΩ و -j2kΩ. مدار متناظر حوزه فرکانسی نیز در شکل ۱۹-۱۰(ب) دیده می‌شود.

- ارائه طرح.

ما شکل ۱۹-۱۰ (ب) را تحلیل خواهیم کرد تا **I** به دست آید؛ ترکیب امپدانس‌ها و استفاده از قانون اهم یک راه ممکن است. سپس این واقعیت را به کار می‌بریم که می‌دانیم $\omega = 300$ rad/s است و لذا از آن برای تبدیل **I** به عبارتی در حوزه زمان استفاده خواهیم کرد.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \\ &= 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\,\frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2} \\ &= 2 + j1.5 = 2.5\angle 36.87°\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

بنابراین جریان فیزوری به صورت زیر است:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{eq}}$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

با جایگزینی مقادیر معلوم، می‌بینیم که

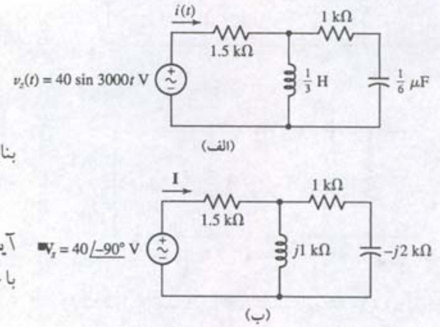
$$\mathbf{I} = \frac{40\angle -90°}{2.5\angle 36.87°}\ \text{mA}$$

همراه با $\omega = 3000$ rad/s برای یافتن حل $i(t)$ کافی است.

- اقدام به حل.

این مقدار مختلط به راحتی قابل تبدیل به یک عدد مختلط در فرم قطبی است:

$$\mathbf{I} = \frac{40}{2.5}\angle -90° - 36.87°\ \text{mA} \quad = 16.00\angle -126.9°\ \text{mA}$$



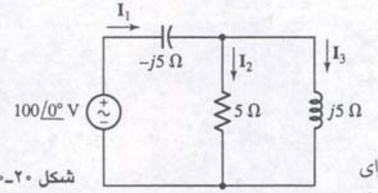
شکل ۱۹-۱۰ (الف) یک مدار RLC که پاسخ واداشته سینوسی آن مجهول است. (ب) معادل حوزهٔ فرکانس همان مدار در $\omega = 3000$ rad/s.

با انتقال جریان به حوزه زمان، پاسخ مطلوب به دست می‌آید:

$$i(t) = 16 \cos (3000t - 126.9°)\ \text{mA}$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

امپدانس مؤثر متصل به منبع دارای زاویه $+36.87°$ است. و به این معنی است که دارای خاصیت القایی می‌باشد و بنابراین جریان نسبت به ولتاژ تأخیر دارد. چون منبع ولتاژ دارای زاویه فاز $-90°$ است، پس پاسخ معتبر است.



شکل ۲۰-۱۰

تمرین

۱۰-۱۰ در مدار حوزه فرکانس شکل ۲۰-۱۰، (الف) I_1، (ب) I_2 و (ج) I_3 را پیدا کنید.

جواب: $20\ \angle 0°$ A، $20\ \angle 90°$ A و $28.3\ \angle 45°$ A

قبل از شروع به نوشتن تعداد قابل توجهی معادله در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس، باید از نوشتن معادلاتی که بخشی از آن در حوزه زمان و بخشی دیگر در حوزه فرکانس است، اجتناب کنیم. سرنخی که نشان دهد اشتباهی از این نوع صورت گرفته است، وجود هر دو نوع عدد مختلط و t در معادله است، مگر این‌که عامل $e^{j\omega t}$ هم در آن باشد، چون عامل $e^{j\omega t}$ در کاربرد اهمیت ندارد می‌توان گفت دانشجویانی که معادله‌ای حاوی j و t و یا ∠ و t را می‌نویسند، هیولایی خلق می‌کنند که بدون آن اوضاع برای خودشان و دیگران بهتر خواهد بود. مثلاً در چند معادله قبل دیدیم:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{eq}} = \frac{40\angle -90°}{2.5\angle 36.9°} = 16\angle -126.9°\ \ \text{mA}$$

لطفاً چیزی به شکل زیر خلق نکنید:

$$i(t) \neq \frac{40 \sin 3000t}{2.5\angle 36.9°} \quad \text{یا} \quad i(t) \neq \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

۷-۱۰ ادمیتانس

گاهی درمی‌یابیم که عکس امپدانس کمیتی مناسب‌تر است. با این طرز تفکر، **ادمیتانس** Y یک عنصر مدار به صورت نسبت فیزور جریان به فیزور ولتاژ تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

و بنابراین

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

بخش حقیقی ادمیتانس، **هدایت یا رسانایی** G و بخش موهومی آن **سوسپتانس** B نامیده می‌شود.

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \tag{۲۲}$$

معادله (۲۲) باید به‌دقت موشکافی شود. این رابطه نمی‌گوید که بخش حقیقی ادمیتانس با عکس قسمت حقیقی امپدانس برابر است و یا این که بخش موهومی ادمیتانس همان معکوس بخش موهومی امپدانس است!

ادمیتانس، رسانایی (کانداکتانس)، سوسپتانس همگی به زیمنس اندازه‌گیری می‌شوند. یک امپدانس

$$\mathbf{Z} = 1 - j2\ \Omega$$

که می‌توان آن را از یک مقاومت 1 Ω سری با خازن 0.1 μF در فرکانس $\omega = 5$ Mrad/s تصور کرد، ادمیتانسی برابر زیر دارد:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2}\,\frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4\ \text{S}$$

ادمیتانس معادل شبکه‌ای متشکل از چند شاخه موازی برابر است با حاصل جمع ادمیتانس‌های هر شاخه. پس مقدار عدد ادمیتانس فوق را می‌توان از جمع رسانایی با هدایت 0.2 S که موازی با سوسپتانس مثبت 0.4 S است، به دست آورد. رسانایی می‌تواند یک مقاومت 5 Ω و سوسپتانس یک خازن 0.08 μF در فرکانس $\omega = 5$ Mrad/s باشد، زیرا ادمیتانس یک خازن $j\omega C$ است.

بگذارید برای امتحان تحلیل، امپدانس شبکه اخیر یعنی مقاومت 5 Ω موازی با خازن 0.08 μF را در $\omega = 5$ Mrad/s بیابیم. امپدانس معادل برابر است با:

$$Z = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2\ \Omega$$

که مثل قبل است. این دو شبکه تنها دو نمونه از بینهایت شبکه مختلفی هستند که در این فرکانس چنین امپدانس و ادمیتانسی دارند. با این وجود، این دو شبکه تنها شبکه دو عنصری دارای این خاصیت هستند و لذا می‌توان آن‌ها را ساده‌ترین شبکه‌ای دانست که دارای امپدانس $1 - j2\ \Omega$ و ادمیتانس $0.2 + j0.4$ S در فرکانس $\omega = 5 \times 10^6$ rad/s می‌باشند.

کلمه **ایمیتانس**، به ترکیبی از امپدانس و ادمیتانس گفته می‌شود. گاهی هم برای بیان نام کلی امپدانس یا ادمیتانس از آن استفاده می‌گردد. برای مثال اگر ولتاژ فیزوری دو سر یک ایمیتانس معلوم باشد، می‌توان جریان عبوری از آن ایمیتانس را حساب کرد.

تمرین

۱۰ـ۱۱ ادمیتانس (در مختصات قائم)، (الف) یک امپدانس $Z = 1000 + j400\ \Omega$ (ب) یک شبکه متشکل از ترکیب موازی یک مقاومت 800 Ω، القاگر 1 mH و خازن 2 nF را به شرطی که $\omega = 1$ Mrad/s باشد، (ج) شبکه‌ای متشکل از ترکیبات سری مقاومت 800 Ω، یک القاگر 1 mH و یک خازن 2 nF را اگر $\omega = 1$ Mrad/s باشد، به دست آورید.

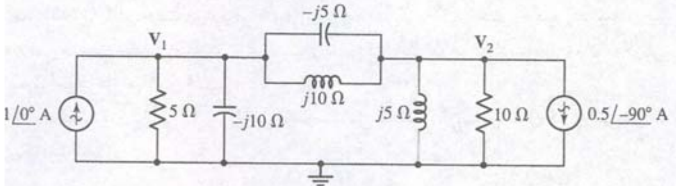
جواب: 0.862 - j0.345 mS؛ 1.25 + j1 mS؛ 0.899 - j0.562 mS.

۱۰ـ۸ تحلیل گرهی و مش

قبلاً با تکنیک گرهی و مش به اهداف بسیاری نایل شدیم و منطقی است که بپرسیم آیا روال مشابهی برای جملات فیزوری و امپدانس‌ها در حالت ماندگار سینوسی معتبر است. دیدیم که قوانین کیرشهف برای فیزورها معتبر بود، همچنین قانونی شبیه به اهم برای عناصر غیرفعال به صورت $V = ZI$ داشتیم. به بیان دیگر قوانینی که تحلیل گرهی بر آن‌ها متکی است برای فیزورها معتبرند، اگر پیش‌تر برویم، می‌توان گفت برای حالت ماندگار سینوسی می‌توان از تکنیک گرهی استفاده کرد. با بحثی مشابه روش‌های تحلیل مش یا همان تک‌حلقه و گرهی هم معتبرند.

مثال ۷ـ۱۰

ولتاژ گره $v_1(t)$ و $v_2(t)$ حوزه زمان را در شکل ۲۱ـ۱۰ بیابید.



شکل ۲۱ـ۱۰ یک مدار در حوزهٔ فرکانس با دو ولتاژ گره‌ای V_1 و V_2.

دو منبع جریان به صورت فیزور داده شده و ولتاژهای فیزوری گرهی V_1 و V_2 مشخص شده‌اند. در سمت چپ گره KCL را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{j10} = 1\angle 0^\circ = 1 + j0$$

و برای گره سمت راست

$$\frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} = -(0.5\angle -90^\circ) = j0.5$$

با ترکیب جملات داریم:

$$(0.2 + j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1$$

و

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5$$

این معادلات به راحتی، حتی با یک ماشین حساب حل می‌شوند و از آن نتیجه می‌شود $V_1 = 1 - j2$ V و $V_2 = -2 + j4$ V.

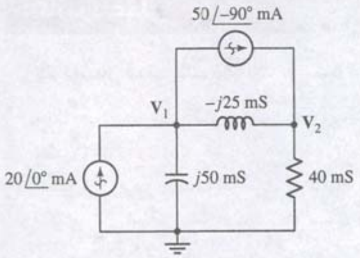
حل حوزه زمان با نوشتن V_1 و V_2 در مختصات قطبی حاصل می‌شود.

$$V_1 = 2.24\angle -63.4^\circ \qquad V_2 = 4.47\angle 116.6^\circ$$

و با انتقال به حوزه زمان داریم:

$$v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ)\ \text{V} \quad \text{و} \quad v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 16.6^\circ)\ \text{V}$$

توجه کنید که در محاسبه مقادیر امپدانس روی نمودار مدار باید ω معلوم باشد. همچنین هر دو منبع باید فرکانس مساوی داشته باشند.



شکل ۲۲ـ۱۰

تمرین

۱۰ـ۱۲ باکمک تحلیل گرهی روی مدار شکل ۲۲ـ۱۰، V_1 و V_2 را بیابید.

جواب: $1.593\angle -50.0^\circ$ V و $1.062\angle 23.3^\circ$ V.

اکنون بیایید به مثالی از تحلیل حلقه بپردازیم، ضمن این‌که به خاطر داریم که همه منابع در فرکانس برابر کار می‌کنند. در غیر این صورت تعریف هر رآکتانسی در مدار ناممکن خواهد بود. در بخش بعد خواهیم دید تنها راه برخورد با این موارد استفاده از مدار تجمیع است.

مثال ۸ـ۱۰

عباراتی برای جریان‌های حوزه زمان i_1 و i_2 در شکل ۲۳ـ۱۰ (الف) بیابید.

در منبع سمت چپ داریم $\omega = 10^3$ rad/s و بنابراین مدار حوزه فرکانس شکل ۲۳ـ۱۰(الف) را ترسیم می‌کنیم. جریان مش‌ها را هم I_1 و I_2 نام می‌گذاریم. حول مش 1:

$$3I_1 + j4(I_1 - I_2) = 10\angle 0^\circ$$

یا

$$(3 + j4)I_1 - j4I_2 = 10$$

در حلقه 2

$$j4(I_2 - I_1) - j2I_2 + 2I_1 = 0$$

یا

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$

و با حل آن‌ها

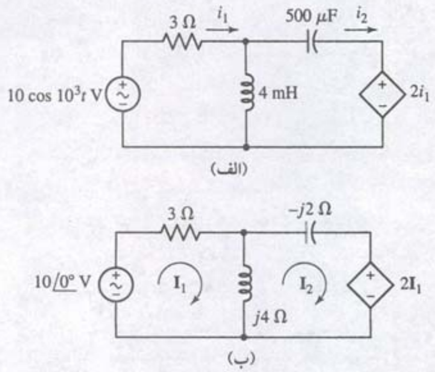
$$I_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\angle 29.7^\circ\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\angle 56.3^\circ\ \text{A}$$

بنابراین

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7^\circ)\ \text{A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3^\circ)\ \text{A}$$



شکل ۲۳ـ۱۰ (الف) یک مدار حوزهٔ زمان با یک منبع وابسته. (ب) مدار حوزهٔ فرکانس متناظر با مدار شکل ۲۳ـ۱۰ (الف).

کاربرد عملی

فرکانس قطع یک تقویت‌کننده ترانزیستوری

مدارهای تقویت کننده ترانزیستوری، بخش مهم وسایل الکترونیک مدرن را تشکیل می‌دهند. یکی از کاربردهای رایج، تلفن‌های همراه (شکل ۲۵ـ۱۰) است، که در آن سیگنال‌های صوتی روی امواج حامل فرکانس بالا سوار می‌شوند متأسفانه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی هستند که موجب محدود شدن فرکانس کاری آن‌ها می‌شود و هنگام انتخاب آن‌ها برای کاربردهای خاص، باید مدّنظر باشد.

شکل ۲۵ـ۱۰ آمپلی‌فایرهای ترانزیستور در دستگاه‌های زیادی به کار می‌روند، از جمله تلفن‌های همراه. مدل‌های خطی برای تحلیل کارایی آن‌ها به عنوان تابعی از فرکانس به کار می‌روند.

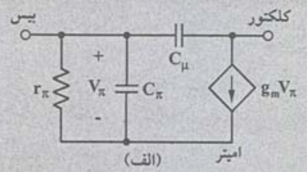
شکل ۲۶ـ۱۰ (الف) آنچه را که مدل هیبرید π فرکانس بالا نام دارد، برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی نشان می‌دهد. در عمل هر چند ترانزیستورها قطعاتی غیرخطی‌اند، ولی این مدار خطی ساده کار نسبتاً دقیقی از مدل‌سازی رفتار قطعه ارائه می‌کند. دو خازن C_π و C_μ برای نمایش ظرفیت داخلی ترانزیستور مورد استفاده به کار رفته‌اند. در صورت نیاز می‌توان خازن‌ها و مقاومت‌های دیگری را برای دقیق‌تر شدن مدل به آن اضافه کرد. شکل ۲۶ـ۱۰ (ب) مدل ترانزیستوری را که در یک تقویت کننده با نام امیتر مشترک وارد شده است نشان می‌دهد.

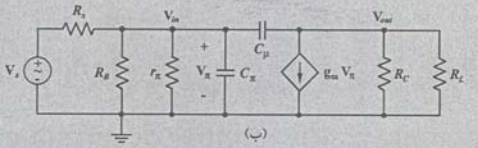
با فرض این که سیگنال حالت ماندگار سینوسی، با معادل تونن V_s و R_s نشان داده شده باشد، مایلیم نسبت V_{out} به V_{in} را بدانیم. وجود ظرفیت‌های درونی متعلق به ترانزیستور موجب کاهش تقویت در ازای افزایش فرکانس در V_s می‌گردد و نهایتاً عملکرد صحیح مدار را در فرکانس‌هایی محدود خواهد کرد. معادله گره را در خروجی می‌نویسیم.

$$g_{in} V_\pi = \frac{V_{out} - V_{in}}{(1/f\omega C_\mu)} + \frac{V_{out}}{(R_C \,||\, R_L)}$$

با حل V_{out} برحسب V_{in} و با توجه به $V_\pi = V_{in}$ عبارتی برای بهره تقویت کننده به دست می‌آید.

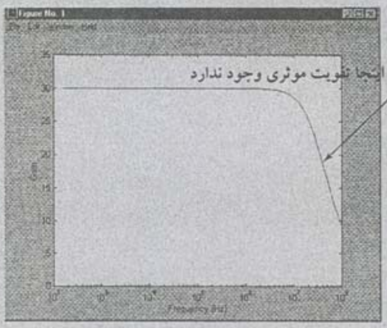
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-g_m (R_C \,||\, R_L)(1/j\omega C_\mu) + (R_C \,||\, R_L)}{(R_C \,||\, R_L) + (1/j\omega C_\mu)}$$
$$= \frac{-g_m (R_C \,||\, R_L) + j\omega (R_C \,||\, R_L) C_\mu}{1 + j\omega (R_C \,||\, R_L) + C_\mu}$$





شکل ۲۶ـ۱۰ (الف) مدل هیبرید π فرکانس بالا برای ترانزیستور. (ب) مدار تقویت‌کنندهٔ امیتر مشترک با مدل هیبرید π .

با فرض مقادیر نمونه‌ای چون $g_m = 30ms$ ، $R_C = R_L = 2k\Omega$ و خازن $C_\mu = 5\ PF$ می‌توان اندازه بهره را به صورت تابعی از فرکانس ($\omega = 2\pi f$) رسم کرد. نمودار نیمه لگاریتمی در شکل ۲۷ـ۱۰ (الف) و برنامه متلب به کار رفته در تولید شکل، در شکل ۲۷ـ۱۰ (ب) ملاحظه می‌شود. جالب است ولی تعجب‌آور نیست که ببینیم بهره تقویت کننده به فرکانس وابسته است. درواقع می‌توان تصور کرد که استفاده از چنین مداری می‌تواند فرکانس‌هایی را که ما توجهی به آن‌ها نداریم، حذف کند. با این وجود، حداقل می‌بینیم که بهره برای فرکانس‌های نسبتاً پایین از فرکانس منبع ورودی مستقل است. هنگامی که مشخصه تقویت کننده را بیان می‌کنیم مرسوم است تا به فرکانسی که در آن بهره به $1/\sqrt{2}$ برابر حداکثرش کاهش می‌یابد، اشاره نماییم. در شکل ۲۷ـ۱۰ (الف) می‌بینیم که حداکثر میزان بهره برابر 30 است که در فرکانس 30 MHz به $30/\sqrt{2} = 21$ تقلیل یافته است. معمولاً به این فرکانس، فرکانس **قطع یا گوشه** تقویت کننده می‌گویند. اگر کار در فرکانس‌های بالاتر موردنظر باشد، یا ظرفیت درونی باید کاهش یابد (ترانزیستورهای متفاوتی باید به کار رود) و یا مدار به طریقی دیگر باید طراحی شود. در این جا باید توجه کرد که تعریف بهره وابسته به V_{in} ، تصویر کاملی از رفتار وابستگی به فرکانس را برای تقویت کننده ارائه نمی‌کند. این مطالب با ملاحظه ظرفیت C_π کاملاً واضح است: با $\omega \to \infty$ ، $Z_{C\pi} \to 0$ پس $V_{in} \to 0$. این اثر خودش را در معادله‌ای که به دست آوردیم نشان نمی‌دهد. روش دقیق‌تر یافتن معادله‌ای برای V_{out} برحسب V_s است که در آن هر دو خازن در عبارت ظاهر می‌گردد. البته کمی عملیات جبری بیشتر لازم است.



(الف)

```
EDU» frequency = logspace(3,9,100);
EDU» numerator = -30e-3*1000 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU» denominator = 1 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU» for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU» semilogx('requency/2/pi,gain);
EDU» xlabel('Frequency (Hz)');
EDU» ylabel('Gain');
EDU» axis([100 1e8 0 35]);
```

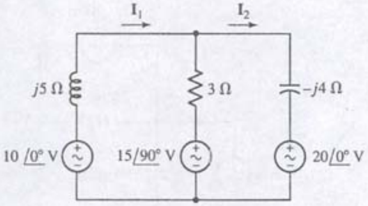
(ب)

شکل ۲۷ـ۱۰ (الف) بهرهٔ تقویت‌کنندهٔ برحسب فرکانس، و (ب) برنامه متلب به‌کاررفته برای ایجاد نمودار.

تمرین

۱۳ـ۱۰ با تحلیل مش روی مدار شکل ۲۴ـ۱۰ ، I_1 و I_2 را بیابید.

جواب: $7.17 \angle -144.9°$ A و $4.87 \angle -164°$ A.



شکل ۲۴ـ۱۰

۹ـ۱۰ تجمیع، تبدیل منبع و قضیه تونن

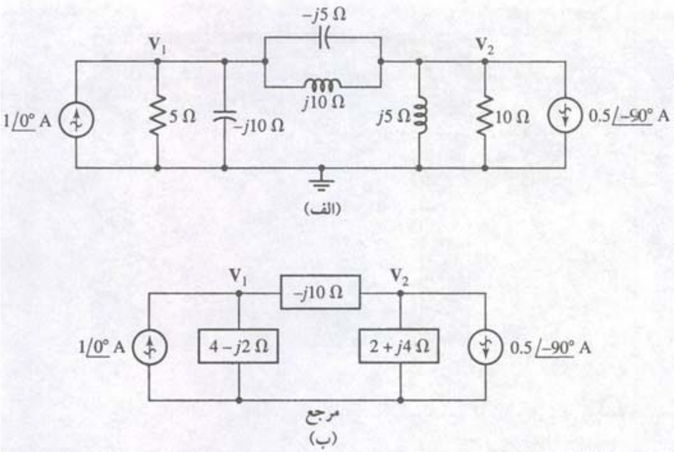
پس از معرفی القاگرها و خازن‌ها در فصل ۷، دیدیم که مدارهای حاوی آن‌ها همچنان خطی‌اند و مزایای این خطی بودن دوباره به کار گرفته شدند. از آن جمله اصل تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تبدیل منابع بودند. می‌دانیم که این روش‌ها در مدارهایی که اکنون ملاحظه می‌کنیم به کار خواهند رفت. ما می‌خواهیم منابع سینوسی را به کار گرفته و روش‌های فوق را روی آن‌ها پیاده کنیم و یافتن تنها پاسخ واداشته چندان اهمیتی ندارد. این‌که بخواهیم مدار را برحسب فیزورها تحلیل کنیم، نیز بی‌اهمیت است. همچنین به یاد خواهیم سپرد که خطی بودن و تجمیع هنگام ترکیب منابع حقیقی و موهومی برای تهیه یک منبع مختلط به کار خواهد رفت.

مثال ۹ـ۱۰

با تجمیع، V_1 را برای مدار شکل ۲۱ـ۱۰ به دست آورید، به خاطر سادگی این شکل در شکل ۲۸ـ۱۰ (الف) تکرار شده است.

ابتدا مدار را به شکل ۲۸ـ۱۰(ب) درمی‌آوریم که در آن هر جفت امپدانس موازی با یک امپدانس معادل جایگزین شده است. یعنی $5 \,||\, -j10\ \Omega$ برابر با $4 - j2\ \Omega$ ؛ $j10 \,||\, -j5\ \Omega$ برابر $-j10\ \Omega$ و $10 \,||\, j5$ برابر است با $2 + j4\ \Omega$. برای یافتن V_1 ، ابتدا منبع سمت چپ را فعال نگه می‌داریم و پاسخ جزئی V_{1L} را در قبال آن به دست می‌آوریم. منبع $1 \angle 0°$ با امپدانس زیر موازی است:

$$(4 - j2) \,||\, (-j10 + 2 + j4)$$



شکل ۲۸-۱۰ (الف) مدار شکل ۲۱-۱۰ که در آن V_1 خواسته شده است. (ب) V_1 را می‌توان با استفاده از تجمیع پاسخ‌های فیزوری مجزا به‌دست‌آورد.

پس

$$V_{1L} = 1\angle 0^\circ \frac{(4-j2)(-j10+2+j4)}{4-j2-j10+2+j4} = \frac{-4-j28}{6-j8} = 2-j2\ \text{V}$$

اگر فقط منبع سمت راست فعال باشد، با تقسیم جریان و قانون اهم داریم:

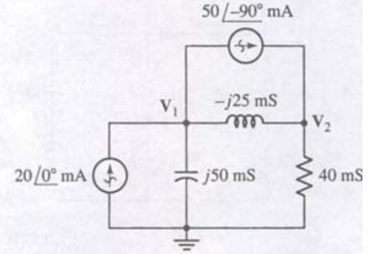
$$V_{1R} = (-0.5\angle -90^\circ)\left(\frac{2+j4}{4-j2-j10+2+j4}\right)(4-j2) = -1\ \text{V}$$

از جمع آن‌ها داریم:

$$V_1 = V_{1L} + V_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2\ \text{V}$$

که با نتیجهٔ قبلی ما در مثال ۷-۱۰ وفاق دارد.

بعداً خواهیم دید که تجمیع، هنگام برخورد با مدارهایی که با فرکانس یکسانی کار نمی‌کنند، به شدت مفید است.



شکل ۲۹-۱۰

تمرین

۱۴-۱۰ با فرض این‌که از تجمیع برای تحلیل مدار شکل ۲۹-۱۰ استفاده کرده باشیم، مطلوب است V_1 اگر (الف) فقط با منبع $20\angle 0^\circ$ mA کار کند، (ب) فقط با منبع $50\angle -90^\circ$ mA کار کند.

جواب: 0.1951 - j0.556 V ،0.780 + j0.976 V

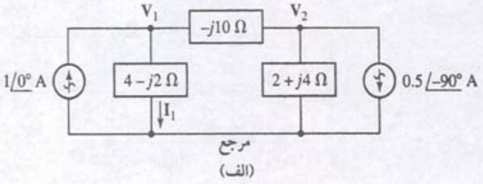
مثال ۱۰-۱۰

از دید امپدانس $-j10\ \Omega$ در شکل ۳۰-۱۰ (الف) معادل تونن را معین کرده از آن برای محاسبهٔ V_1 استفاده کنید.

ولتاژ مدار باز تعریف شده در شکل ۳۰-۱۰(ب) چنین است.

$$V_{oc} = (1\angle 0^\circ)(4-j2) - (-0.5\angle -90^\circ)(2+j4) = 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3\ \text{V}$$

امپدانس مدار غیرفعال شکل ۳۰-۱۰(ج) از دید پایانه‌های بار درواقع مجموع دو امپدانس باقیمانده است، یعنی $Z_{th} = 6 + j2\ \Omega$.



بنابراین وقتی مدار را به صورت شکل ۳۰-۱۰(د) می‌بینیم، جریان از گره 1 به گره 2 از طریق بار $-j10\ \Omega$ برابر است با

$$I_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3\ \text{A}$$

اکنون جریان جاری شده در امپدانس $-j10\ \Omega$ در شکل ۳۰-۱۰(الف) را می‌دانیم. **توجه کنید که نمی‌توانیم با مدار شکل ۳۰-۱۰(د)، مقدار V_1 را محاسبه کنیم. زیرا گره مرجعی وجود ندارد.** با بازگشت به مدار اصلی و تفریق جریان $0.6 + j0.3$ از منبع جریان سمت چپ، جریان جاری شده از شاخه $(4 - j2)\ \Omega$ برابر است با:

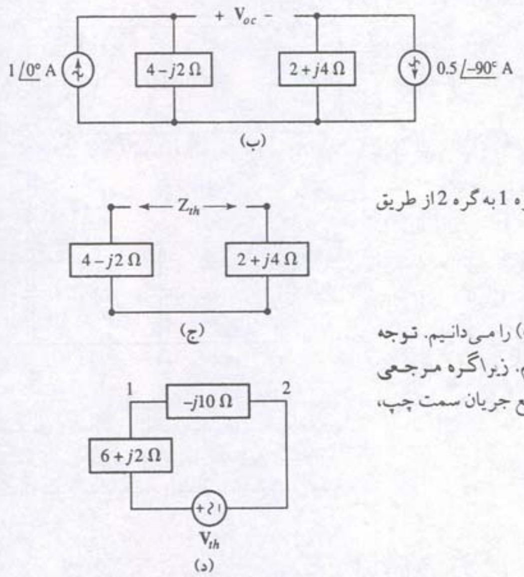
$$I_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3\ \text{A}$$

و بنابراین

$$V_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2\ \ \text{V}$$

که مثل قبل است.

ممکن است از قضیه نورتن روی سه عنصر سمت راست شکل ۳۰-۱۰ (الف) استفاده کنیم، با این فرض که به V_1 علاقمندیم. می‌توان به دفعات تبدیل منبع را برای ساده‌سازی مدار به کار برد. بنابراین همه کارهای میان بُروشگردهای فصل ۴ و ۵ در حوزه فرکانس به کار خواهند رفت. مختصر پیچیدگی اضافی موجود به دلیل استفاده از اعداد مختلط است و نه از ملاحظات تئوریک مربوط به آن.

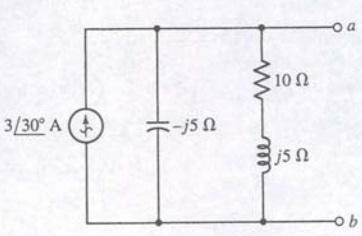


شکل ۳۰-۱۰ (الف) مدار شکل ۲۸-۱۰ (ب). معادل تونن از دید امپدانس $-j10\Omega$ خواسته شده است. (ب) تعریف V_{oc}. (ج) تعریف Z_{th}. (د) رسم مجدد شکل به کمک معادل تونن.

تمرین

۱۵-۱۰ برای مدار شکل ۳۱-۱۰ (الف)، ولتاژ مدار باز V_{ab}، (ب) جریان روبه‌پایین از a به b در صورت اتصال کوتاه، (ج) امپدانس معادل تونن Z_{ab} موازی با منبع جریان را بیابید.

جواب: 2.5 - j5 Ω ،2.60 + j1.500 A ،16.77 $\angle$ -33.4° V



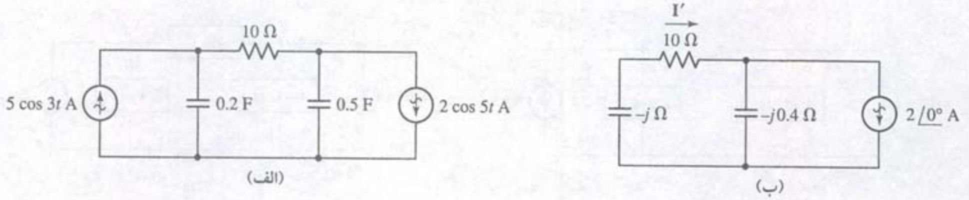
شکل ۳۱-۱۰

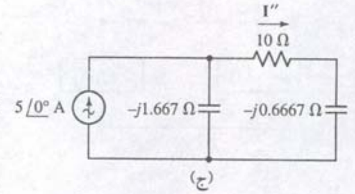
یک اظهار نظر دیگر باقی مانده است. تا این‌جا خودمان را به مدارهای تک منبع یا چند منبعی که فرکانس مشترکی دارند، محدود کردیم. این محدودیت به این علت لازم است که بتوانیم مقادیر امپدانس را برای عناصر القایی و خازنی محاسبه کنیم. با این وجود، مفهوم تحلیل فیزوری به‌راحتی قابل اعمال به مدارهای چندمنبعی با فرکانس‌های مختلف است. در این موارد از تجمیع برای تعیین ولتاژها و جریان‌های ناشی از هر منبع استفاده کرده و نتایج را در حوزه زمان با هم جمع می‌کنیم. اگر چندین منبع به طور همزمان کار کنند، اصل تجمیع اجازه می‌دهد تا منابع را در یک زمان بررسی کنیم و پاسخ نتیجه را با دیگر پاسخ‌ها در فرکانس مختلف جمع کنیم.

مثال ۱۱-۱۰

توان تلف شده به وسیلهٔ مقاومت 10 Ω را در مدار شکل ۳۲-۱۰(الف) معین کنید.

با نگاهی به مدار، ترغیب می‌شویم که سریعاً دو معادله گرهی را بنویسیم و یا با دو تبدیل منبع بلافاصله به دنبال یافتن ولتاژ در دو سر مقاومت 10 Ω باشیم.





شکل ۳۲ــ۱۰ (الف) مداری که منابع آن فرکانس‌های متفاوتی دارند. (ب) مدار با کشته‌شدن منبع چپ. (ج) مدار با کشته‌شدن منبع راست.

در مطالعات بعدی در مورد پردازش سیگنال با روش دانشمندی فرانسوی به‌نام فوریه آشنا می‌شویم که تکنیکی است برای تقریباً هر تابع متناوب و طی آن تابع با ترکیبی از توابع سینوسی نشان داده می‌شود. هنگام کار با مدارهای خطی وقتی پاسخ مداری خاصی را به تابع تحریک سینوسی بدانیم، می‌توان به راحتی پاسخ مدار به هر موج اختیاری که به وسیله تابع سری فوریه نشان داده شود را با تجمیع به‌دست‌آورد.

متأسفانه این کار امکان‌پذیر نیست، زیرا دو منبع در فرکانس‌های مختلف کار می‌کنند. در این موارد راهی برای محاسبهٔ امپدانس یک خازن یا القاگر در مدار وجود ندارد زیرا نمی‌دانیم کدام ω را به کار ببریم؟

تنها راه خروج از این مخمسه استفاده از تجمیع و جمع‌آوری همه منابع هم فرکانس در یک زیرمدار طبق شکل ۳۲ـ۱۰(ب) و (ج) است. در زیر مدار شکل ۳۲ـ۱۰(ب) با روش تقسیم جریان، سریعاً جریان I' را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{I}' = 2\underline{/0°}\left[\frac{-j0.4}{10 - j - j0.4}\right] = 79.23\underline{/-82.03°} \text{ mA}$$

به این ترتیب

$$i' = 79.23 \cos (5t - 82.03°) \text{ mA}$$

به همین طریق

$$\mathbf{I}'' = 5\underline{/0°}\left[\frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667}\right] = 811.7\underline{/-76.86°} \text{ mA}$$

و به طور مشابه

$$i'' = 811.7 \cos (3t - 76.86°) \text{ mA}$$

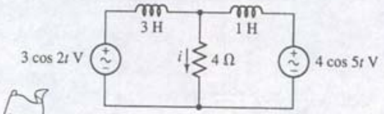
در این جا باید توجه داشت که سعی در جمع جریان‌های فیزوری I' و I'' در شکل ۳۲ـ۱۰(ب) و (ج) اهمیت ندارد. قدم بعدی جمع دو جریان در حوزه زمان، مربع کردن نتیجه و ضرب آن در 10 است تا توان تلف شده در مقاومت 10 Ω شکل ۳۲ـ۱۰(الف) به دست آید.

$$P_{10} = (i' + i'')^2 \times 10$$
$$= 10[79.23 \cos (5t - 82.03°) + 811.7 \cos (3t - 76.86°)]^2 \text{ mW}$$

تمرین

۱۶ــ۱۰ جریان i جاری شده در مقاومت 4 Ω شکل ۳۳ـ۱۰ را پیدا کنید.

جواب: $i = 175.6 \cos (2t - 20.55°) + 547.1 \cos (5t - 43.16°)$ mA

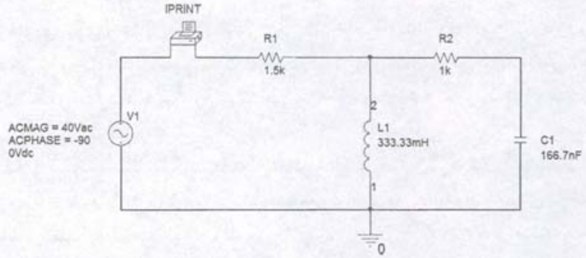


شکل ۳۳ـ۱۰

تحلیل کامپیوتری

در PSpice چندین انتخاب برای تحلیل مدارها در حالت ماندگار سینوسی وجود دارد. شاید سرراست‌ترین روال، روش استفاده از ساخت دو منبع طراحی شده خاص، یعنی VAC و IAC باشد. اندازه و فاز هر منبع با دوبار کلیک روی آن انتخاب می‌گردد.

اجازه بدهید تا مدار شکل ۱۹ـ۱۰ (الف)، که در شکل ۳۴ـ۱۰ رسم شده است را شبیه‌سازی کنیم.

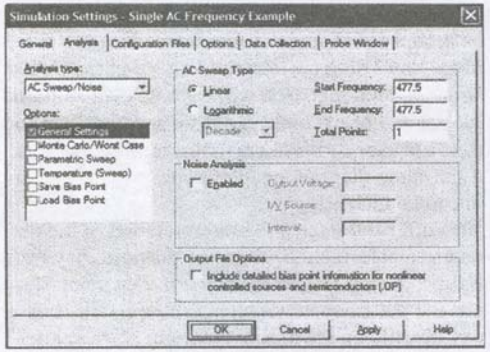


شکل ۳۴ـ۱۰ مدار ساده سینوسی که در $\omega = 3000$ rad/s کار می‌کند و در آن جریان داخل مقاومت 1.5 kΩ است.

فرکانس منبع از طریق Property Editor انتخاب نمی‌گردد، بلکه از طریق مد تحلیل ACSweep صورت می‌پذیرد.

فرکانس منبع با تنظیم Total Points با 1 و Start Freq و End Freq در مقادیر مناسب، انتخاب می‌گردد. چون منبع در 3000 rad/s کار می‌کند، هر دو پارامتر را با $3000 / (2\pi) = 477.5$ Hz مقداردهی می‌کنیم.

توجه کنید که در مدار یک قطعه اضافی ظاهر شده است. این قطعه IPRINT نامگذاری شده است و اجازه می‌دهد تا انواع پارامترهای جریان چاپ شود. در این شبیه‌سازی ما به خصیصه‌های AC، MAG و PHASE علاقمندیم. برای این‌که PSpice این کمیت‌ها را چاپ کند، هر یک از خصیصه‌های موردنظر را در شکل ۳۵ـ۱۰ با yes تنظیم کنید.



شکل ۳۵ــ۱۰ کادر محاوره برای انتخاب فرکانس.

نتایج شبیه‌سازی با انتخاب Examine Output زیر File در پنجره PSpice AD به دست می‌آید. در انتهای فایل اطلاعات زیر ظاهر می‌گردد.

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
4.775E + 02	1.600E - 02	-1.269E + 02

بنابراین اندازه جریان 16 mA، زاویه فاز -126.9° است و به این ترتیب جریان داخل مقاومت 1.5 k Ω برابر زیر است.

$$i = 16 \cos (3000t - 126.9°) \text{ mA}$$
$$= 16 \sin (3000t - 36.9°) \text{ mA}$$

۱۰ـ۱۰ نمودارهای فیزوری

نمودار فیزوری نامی است که به یک ترسیم در صفحه مختلط اطلاق می‌گردد تا رابطه بین

ولتاژهای فیزوری و جریان‌های فیزوری یک مدار خاص را نشان دهد. این نمودار روشی گرافیکی برای حل مسائل معینی است که ممکن است برای تست روش‌های تحلیلی به‌کار رفته باشد. در فصل بعد با نمودارهای مشابهی مواجه خواهیم شد که روابط توان مختلط در حالت ماندگار سینوسی را به نمایش می‌گذارند.

قبلاً با صفحه مختلط، هنگام مطالعه با اعداد مختلط و جمع و تفریق‌شان آشنا شدیم. چون ولتاژها و جریان‌های فیزوری اعداد مختلط‌اند، می‌توان آن‌ها را به‌عنوان نقطه‌ای در صفحه مختلط در نظر گرفت. مثلاً فیزور ولتاژ $V_1 = 6 + j8 = 10\ 53.1^\circ$ V در صفحه مختلط شکل ۳۶_۱۰ نشان داده شده است. محور x محور ولتاژ حقیقی است و محور y، محور موهومی است. ولتاژ V_1 با پیکانی که از مبدأ کشیده می‌شود، مستقر می‌گردد. چون اجزای نمایش روی صفحه مختلط برای جمع و تفریق بخصوص ساده است، فیزورها به‌راحتی روی نمودار فیزوری جمع و تفریق می‌شوند. ضرب و تقسیم از جمع و تفریق زوایا و تغییر دامنه به دست می‌آیند. شکل ۳۷_۱۰(الف) جمع V_1 و فیزور دیگر $V_2 = 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ$ V و شکل ۳۷_۱۰(ب) جریان I_1 که حاصل‌ضرب V_1 و ادمیتانس $Y = 1 + j1$ S است را نشان می‌دهد.

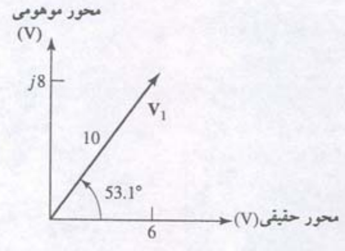
آخرین نمودار فیزوری هر دو فیزور جریان و ولتاژ را روی یک صفحه مختلط نمایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که هر کدام مقیاس خاص خود را دارند ولی مقیاس زاویه مشترک است. مثلاً فیزور ولتاژ یک سانتیمتری ممکن است 100 V را نشان دهد، ولی فیزور جریان با طول یک سانتیمتر برابر 3 mA جریان است. با ترسیم هر دو فیزور روی یک نمودار به راحتی می‌توان تشخیص داد که کدام فیزور پیشفاز و یا پسفاز می‌باشد.

نمودار فیزوری تفسیر جالبی از تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس را می‌نماید، زیرا می‌توان نمودار را از دیدگاه حوزه زمان یا حوزه فرکانس تفسیر کرد. تا این‌جا ما از دید حوزه فرکانس به تفسیر پرداخته‌ایم، چون فیزورها را مستقیماً روی نمودار فیزوری نشان می‌دادیم. اکنون بیایید با ترسیم شکل ۳۸_۱۰(الف) از دید حوزه زمان به فیزور $V = V_m \angle \alpha$ نگاه می‌کنیم. برای انتقال V به حوزه زمان قدم بعدی ضرب $e^{j\omega t}$ در فیزور است. بنابراین اکنون ولتاژ مختلط $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m \angle \omega t + \alpha$ را داریم. این ولتاژ هم می‌تواند به‌عنوان فیزور تلقی شود، با زاویه‌ای که به طور خطی با زمان زیاد می‌شود. در نتیجه نمودار فیزوری این زاویه قطعه خط دواری را نشان خواهد داد که مکان لحظه‌ای آن با اندازه ωt جلوتر از (عکس ساعت‌گرد) $V_m \angle \alpha$ است. هر دو $V_m \angle \alpha$ و $V_m \angle \omega t + \alpha$ روی نمودار فیزوری شکل ۳۸_۱۰ (ب) نشان داده شده‌اند.

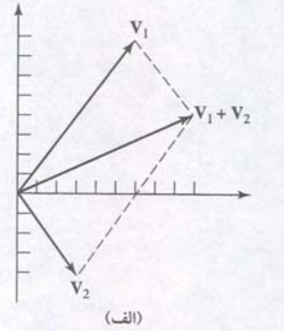
با انتخاب $V_m \angle \omega t + \alpha$، گذر به حوزه زمان تکمیل شده است. بخش حقیقی این کمیت مختلط تصویر $V_m \angle \omega t + \alpha$ روی محور حقیقی است: یعنی $V_m \cos(\omega t + \alpha)$.

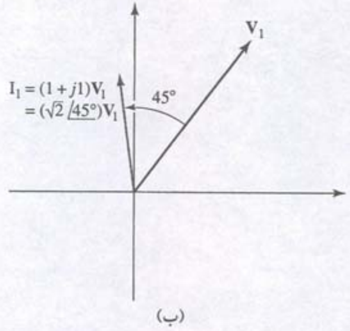
فیزور حوزه فرکانس به طور خلاصه روی نمودار فیزوری نمایش داده شده است و انتقال به حوزه زمان با چرخش فیزور در خلاف جهت ساعت‌گرد با سرعت زاویه‌ای ω rad/s و مشاهده تصویر روی محور حقیقی انجام می‌شود. می‌توان چنین تصور کرد که پیکان نمایشگر فیزور V روی نمودار فیزوری، تصویر کوتاه مدت در $\omega t = 0$ از یک پیکان چرخان باشد که تصویرش روی محور حقیقی ولتاژ لحظه‌ای $v(t)$ است.

اکنون بیایید نمودارهای فیزوری چند مدار ساده را بسازیم. مدار سری RLC در شکل ۳۹_۱۰(الف) چندین ولتاژ و تنها یک جریان دارد. نمودار فیزور با انتخاب جریان به‌عنوان فیزور مرجع، راحت‌تر ساخته می‌شود. بگذارید به طور اختیاری $I = I_m \angle 0^\circ$ را برگزینیم و آن را در طول محور حقیقی نمودار فیزور، شکل ۳۹_۱۰(ب) قرار دهیم. آن‌گاه می‌توان ولتاژهای مقاومت، خازن و القاگر را محاسبه و سپس روی نمودار مستقر کرد. رابطه



شکل ۳۶_۱۰ یک نمودار ساده فیزوری ولتاژ $V_1 = 6 + j8 = 10\angle 53.1^\circ$ V را نشان می‌دهد.

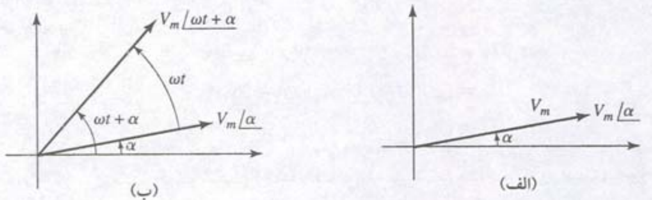




شکل ۳۷_۱۰ (الف) نمودار فیزوری که جمع $V_1 = 6+j8V$ و $V_2 = 3\text{-}j4V$ را نشان می‌دهد، یعنی:

$$V_1 + V_2 = 9 + j4V = 9.85\angle 24.0^\circ\ \text{V}$$

(ب) نمودار فیزوری، V_1 و I_1 را نشان می‌دهد که $I_1 = YV_1$ و $Y = 1 + js = \sqrt{2}\angle 45^\circ$ s است. مقیاس دامنه‌های جریان و ولتاژ متفاوت است.



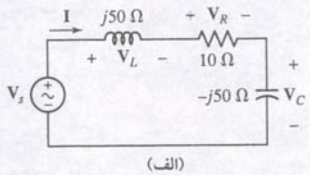
شکل ۳۸_۱۰ (الف) فیزور ولتاژ $V_m \angle \alpha$. (ب) ولتاژ مختلط $V_m \angle \omega t + \alpha$ به صورت فیزور در لحظه معینی از زمان نشان داده شده است. این فیزور از $V_m \angle \alpha$ به اندازه ωt رادیان جلو است.

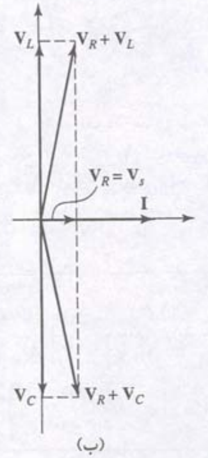
فاز 90° به خوبی روی نمودار دیده می‌شود. مجموع این سه ولتاژ برابر با ولتاژ منبع در این مدار است. ما در فصل بعد تحت شرایط تشدید خواهیم دید که اگر $Z_C = -Z_L$ باشد، ولتاژ منبع و ولتاژ مقاومت با یکدیگر برابرند. ولتاژ کل دو سر مقاومت و القاگر، یا مقاومت و خازن در نمودار از جمع فیزورهای مناسب طبق شکل حاصل می‌گردد.

شکل ۴۰_۱۰(الف) یک مدار ساده موازی است و منطقی است که ولتاژ بین دو گره را به‌عنوان فیزور مرجع اختیار نماییم. فرض کنید $V = 1 \angle 0^\circ$ V باشد. جریان مقاومت $I_R = 0.2 \angle 0^\circ$ A هم‌فاز با این ولتاژ می‌باشد، ولی جریان خازن $I_C = j0.1$ A از ولتاژ مرجع به اندازه 90° پیش است. پس از تبدیل این دو جریان به نمودار فیزور، شکل ۴۰_۱۰(ب)، می‌توان آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد تا جریان منبع به دست آید. نتیجه این کار $I_s = 0.2 + j0.1$ A است.

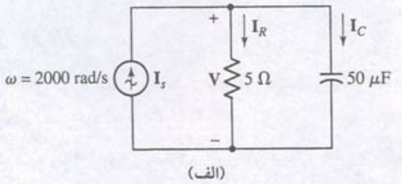
اگر منبع جریان به‌صورت مقدار اولیه $1 \angle 0^\circ$ داده شده باشد و ولتاژ گره در آغاز معلوم نباشد، بهتر است باز هم نمودار فیزوری را با فرض ولتاژ گره (مثلاً $V = 1 \angle 0^\circ$ V) بسازیم و آن را به‌عنوان فیزور ولتاژ به کار ببریم. نمودار را چون گذشته تکمیل می‌کنیم و منبع جریان که به دلیل ولتاژ گره فرضی جاری می‌گردد، $0.2 + j0.1$ A خواهد بود. با این وجود، جریان منبع واقعی $1 \angle 0^\circ$ A است و ولتاژ گره واقعی با ضرب ولتاژ گره مفروضی در $1 \angle 0^\circ / (0.2 + j0.1)$ به دست می‌آید. بنابراین ولتاژ گره واقعی برابر $4 - j2\ \text{V} = \sqrt{20} \angle -26.8^\circ$ V است. ولتاژ مفروض نموداری می‌دهد که با نمودار واقعی مدار فرق می‌کند، باید مقیاس این نمودار در $1/\sqrt{20}$ ضرب شود و نمودار حاصل به اندازه 26.6° در جهت عکس ساعت‌گرد بچرخد تا نمودار واقعی به دست آید.

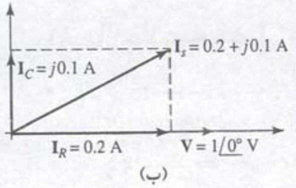
نمودارهای فیزوری معمولاً به سادگی ساخته می‌شوند و در بسیاری از تحلیل‌های حالت ماندگار سینوسی، اگر این نمودارها لحاظ شوند، مفهوم‌ترند. مثال‌های دیگری از کاربرد نمودارهای فیزوری در ادامه مطالعاتمان ملاحظه خواهد شد.





شکل ۳۹_۱۰ (الف) یک مدار RLC سری. (ب) نمودار فیزوری برای این مدار، جریان I به‌عنوان فیزور مرجع به‌کاررفته است.



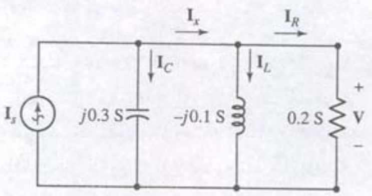


شکل ۴۰_۱۰ (الف) یک مدار RC موازی. (ب) نمودار فیزوری برای این مدار. ولتاژ گره V به‌عنوان یک فیزور مرجع.

مثال ۱۲_۱۰

برای مدار شکل ۴۱_۱۰، نمودار فیزوری I_R، I_L و I_C را ترسیم کنید. با ترکیب این جریان‌ها، زاویه پیشفاز I_s را نسبت به I_R، I_C و I_x مشخص نمایید.

با انتخاب فیزور مرجع آغاز می‌کنیم. با بررسی مدار و متغیرهای موردنظری که باید معین شوند، می‌بینیم که اگر V معلوم باشد، I_R، I_L و I_C با به‌کارگیری قانون اهم محاسبه می‌شوند.



شکل ۱۰-۴۱ مدار ساده‌ای که در آن چند جریان مجهول است.

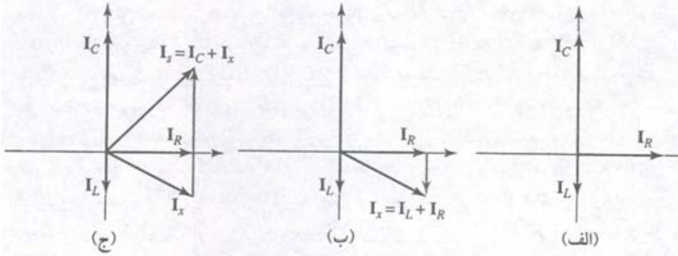
بنابراین $V = 1 \angle 0°$ V را به خاطر سادگی برمی‌گزینیم و متعاقباً روابط زیر را محاسبه می‌نماییم.

$$I_R = (0.2)1\angle 0° = 0.2\angle 0° \text{ A}$$
$$I_L = (-j0.1)1\angle 0° = 0.1\angle -90° \text{ A}$$
$$I_C = (j0.3)1\angle 0° = 0.3\angle 90° \text{ A}$$

نمودار فیزوری مربوطه در شکل ۱۰-۴۲(الف) دیده می‌شود. همچنین لازم است فیزور جریان‌های I_s و I_x را بیابیم. شکل ۱۰-۴۲(ب) تعیین

$$I_x = I_L + I_R = 0.2 - j0.1 = 0.224 \angle -26.6° \text{ A}$$

و شکل ۱۰-۴۲(ج) تعیین $I_s = I_C + I_x = 0.283 \angle 45°$ A را نشان می‌دهد. از شکل ۱۰-۴۲(ج) می‌بینیم که I_s از I_R به اندازه 45° از I_C به اندازه -45° و I_x به اندازه $45° + 26.6° = 71.6°$ پیش است. این زوایا فقط نسبی‌اند و مقدار عددی آن‌ها به I_s وابسته است. مقدار واقعی V نیز به آن وابسته می‌باشد.

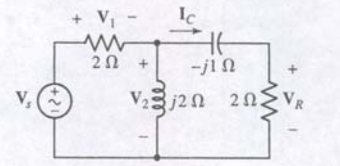


شکل ۱۰-۴۲ (الف) نمودار فیزوری ساخته‌شده با مقدار مرجع $V = 1 \angle 0°$. (ب) تعیین گرافیکی $I_x = I_L + I_R$. (ج) تعیین گرافیکی $I_s = I_C + I_x$.

تمرین

۱۰-۱۷ مقدار مرجع مناسبی برای I_C در مدار شکل ۱۰-۴۳ انتخاب کنید. نمودار فیزوری بکشید که V_R، V_2، V_1 و V_s را نشان دهد و نسبت طول‌های (الف) V_s به V_1 (ب) V_1 به V_2 (ج) V_s به V_R را به دست آورید.

جواب: 2.12؛ 1.00؛ 1.90



شکل ۱۰-۴۳

۱۰-۱۱ خلاصه فصل و مرور

- اگر دو موج سینوسی (یا کسینوسی) دارای اندازه مثبت و فرکانس یکسانی باشند، می‌توان موج پیشفاز یا پسفاز را با مقایسه زاویه آن‌ها مشخص کرد.
- پاسخ واداشته یک مدار خطی به یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی را می‌توان همواره به صورت یک تابع سینوسی نوشت که فرکانس آن همان فرکانس منبع سینوسی است.
- تبدیل فیزوری را می‌توان روی هر تابع سینوسی پیاده کرد و برعکس:

$$V_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow V_m \angle \phi$$

- یک فیزور دارای اندازه و زاویه فاز است، فرکانس آن همان فرکانس منبع تحریک در مدار می‌باشد.
- هنگام تبدیل یک مدار حوزه زمان به مدار متناظر حوزه فرکانس، مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها با امپدانس (یا گاهی ادمیتانس) جایگزین می‌شوند.
- امپدانس یک مقاومت، همان مقاومت است.
- امپدانس خازن $1 / j\omega C$ Ω می‌باشد.

- امپدانس یک القاگر $j\omega L$ Ω است.
- امپدانس‌ها در ترکیبات سری و موازی مثل مقاومت‌ها ترکیب می‌شوند.
- همه تکنیک‌های تحلیلی که قبلاً روی مدارهای مقاومتی به‌کار رفتند، روی خازن‌ها و القاگرهایی که به معادل حوزه فرکانس تبدیل شده‌اند، قابل اعمالند.
- تبدیل فیزوری فقط روی مدارهای تک فرکانس اجرا می‌شود. در غیر این صورت، از تجمیع باید استفاده کرد و پاسخ‌های جزئی حوزه زمان را با هم جمع می‌کنیم تا پاسخ کامل به دست آید.
- توانمندی مربوط به نمودارهای فیزوری وقتی که تابع وادارکننده مناسبی از آغاز به‌کار رود کاملاً آشکار است، و نیز باید نتیجه نهایی به طور مناسبی مقیاس‌بندی شده باشد.

۱۰-۱۲ خواندنی‌های کمکی

A good reference to phasor-based analysis techniques can be found in:

R.A. DeCarlo and P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Frequency-dependent transistor models are discussed from a phasor perspective in Chap. 7 of

W.H. Hayt, Jr. and G.W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

مسائل

۱۰-۱ ویژگی‌های توابع سینوسی

۱. یک موج سینوسی f(t) در $t = 2.1$ ms صفر بوده و در $t = 7.5$ ms به حداکثر 8.5 می‌رسد. موج را به شکل (الف) $C_1 \sin(\omega t + \phi)$ نشان دهید که در آن ϕ مثبت و کوچکترین مقدار خود را به درجه داشته باشد، (ب) $C_2 \cos(\omega t + \beta)$. نشان دهید که β کوچکترین اندازه ممکن و بر حسب درجه باشد. (ج) به‌فرم $C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$ باشد.

۲. (الف) اگر $-10 \cos \omega t + 4 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \phi)$ و $A > 0$، $-180° < \phi < 180°$ باشد، A و ϕ را پیدا کنید. (ب) اگر $200 \cos(5t + 130°) = F\cos 5t + G \sin 5t$ باشد، F و G را به دست آورید. (ج) سه مقدار t را برای $0 \leq t \leq 1$ پیدا کنید که در آن‌ها $i(t) = 5\cos 10t - 3\sin 10t = 0$ باشد. (د) در چه فاصله زمانی بین $t = 0$ و $t = 10$ ms، $10 \cos 100\pi t \geq 12 \sin 100\pi t$ است؟

۳. با فرض دو تابع سینوسی $f(t) = -50 \cos \omega t - 30 \sin \omega t$ و $g(t) = 55 \cos \omega t - 15 \sin \omega t$ مطلوب است (الف) دامنه هر کدام و (ب) زاویه فازی که f(t) از g(t) پیش است.

۴. پاسخ جریان مفروض معادلهٔ (۳) با $i(t) = A \cos(\omega t - \phi)$ را در معادله دیفرانسیل $L(di/dt) + Ri = V_m \cos \omega t$ بگذارید و نشان دهید که A و ϕ حاصل با معادله (۴) یکی است.

۵. یک منبع ولتاژ، موجی به صورت $V_m \cos(\omega t + \phi)$ تولید می‌کند که فرکانس آن 13.56 MHz است. اگر مولد 300 W توان را به بار 5 Ω منتقل کند و ولتاژ به حداقل خود در $t = 21.15$ ms برسد، V_m، ω و γ چقدر است؟

۶. امواج زیر را با هم مقایسه کنید و بگویید کدام پیشفاز است: (الف) $12 \cos(8t - 1°)$ و $-33 \sin(8t - 9°)$. (ب) $15 \cos(1000t + 66°)$ و $-2 \cos(1000t + 450°)$. (ج) $\sin(t - 13°)$ و $\cos(t - 90°)$. (د) $\sin t$ و $\cos(t - 90°)$.

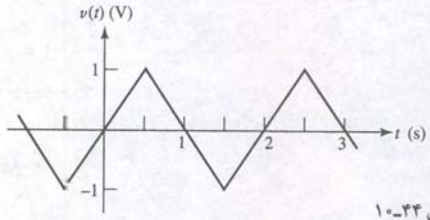
۷. بگویید در امواج زیر کدام پسفاز است: (الف) $6 \cos(2\pi 60t - 9°)$ و $-6 \cos(2\pi 60t + 9°)$، (ب) $\cos(t - 100°)$ و $-\cos(t - 100°)$، (ج) $-\sin t$ و $\sin t$. (د) $7000 \cos(t - \pi)$ و $9 \cos(t - 3.14°)$.

۸. نشان دهید که ولتاژ $v(t) = V_1 \cos \omega t - V_2 \sin \omega t$ را می‌توان به صورت $V_m \cos(\omega t + \gamma)$ نوشت. V_m و ϕ را به دست آورید.

۹. تئوری فوریه ابزار رایجی در علوم و مهندسی است. این تئوری می‌گوید که امواج پریودیک مثل شکل ۱۰-۴۴ برابر با جمع بینهایت جمله مطابق زیر است.

$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin \pi t - \frac{1}{3^2}\sin 3\pi t + \frac{1}{5^2}\sin 5\pi t - \frac{1}{7^2}\sin 7\pi t + \ldots\right)$$

(الف) مقدار واقعی $v(t)$ را در $t = 0.4$ s حساب کنید. مقدار تقریبی $v(t)$ را با سری فوریه فوق برای: (ب) فقط جمله اول، (ج) فقط چهار جمله اول و (د) فقط پنج جمله اول محاسبه کنید.



شکل ۱۰-۴۴

۱۰. برق خانگی معمولاً 110 V ، 115 V یا 120 V است. با این وجود این مقادیر ولتاژ دامنه را نشان نمی‌دهند. در واقع این مقادیر بیانگر جذر مربع ولتاژ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t)\, dt}$$

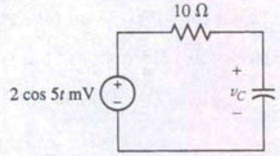
که T پریود موج، V_m دامنه ولتاژ و ω فرکانس یا سرعت زاویه‌ای است (الف) انتگرال فوق را اجرا نموده و نشان دهید که برای ولتاژ سینوسی داریم:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(ب) ولتاژهای دامنه مربوط به V_{rms} برای 110، 115 و 120 V چقدر است؟

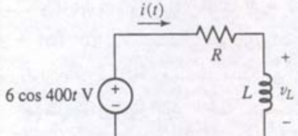
۱۰-۲ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

۱۱. پاسخ حالت ساکن $v_C(t)$ را در شکل ۱۰-۴۵ پیدا کنید.



شکل ۱۰-۴۵

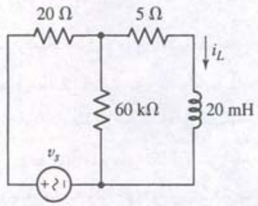
۱۲. ولتاژ القاگر $v_C(t)$ را برای مدار شکل ۱۰-۴۶ با فرض $R = 100\ \Omega$ و $L = 2$ H پیدا کنید. همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از بین رفته‌اند.



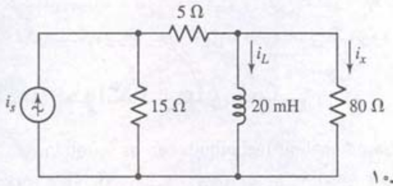
شکل ۱۰-۴۶

۱۳. در مدار شکل ۱۰-۴۷ فرض کنید $v_s = 20 \cos 500t$ V است. پس از ساده‌سازی آن $i_L(t)$ را بیابید.

۱۴. اگر در شکل ۱۰-۴۸، $i_s = 0.4 \cos 500t$ A باشد، مدار را آن قدر ساده کنید تا به فرم شکل ۱۰-۴ درآید و سپس (الف) $i_L(t)$ و (ب) $i_x(t)$ را بیابید.



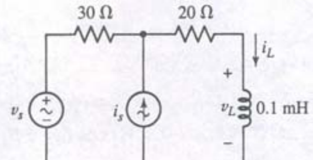
شکل ۱۰-۴۷



شکل ۱۰-۴۸

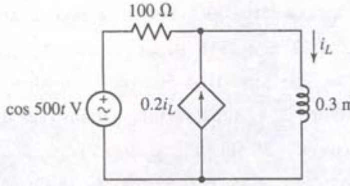
۱۵. یک منبع ولتاژ سینوسی $v_s = 100 \cos 10^5 t$ V، یک مقاومت 500 Ω و یک القاگر 8 mH با یکدیگر سری‌اند. لحظاتی بین $0 < t < \frac{1}{2}T$ را پیدا کنید که در آن توان صفر (الف) به مقاومت منتقل شده است، (ب) به القاگر رفته است و (ج) به وسیله منبع تولید شده است.

۱۶. در مدار شکل ۱۰-۴۹، $v_s = 3 \cos 10^5 t$ V و $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$ می‌باشد. پس از اجرای تجمیع و قضیه تونن مقادیر لحظه‌ای i_L و v_L را در $t = 10\ \mu s$ به دست آورید.



شکل ۱۰-۴۹

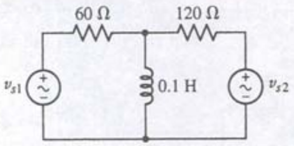
۱۷. در مدار شکل ۱۰-۵۰، $i_L(t)$ را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۰

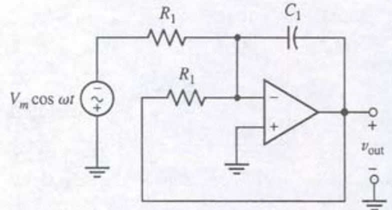
۱۸. هر دو منبع ولتاژ در شکل ۱۰-۵۱ با تابع $120 \cos 120\pi t$ V داده شده‌اند. (الف) عبارتی برای انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر را بیابید. (ب) آن را برای یافتن مقدار متوسط انرژی ذخیره شده به کار ببرید.

۱۹. در مدار شکل ۱۰-۵۱، منابع ولتاژ عبارتند از $v_{s1} = 120 \cos 200t$ V و $v_{s2} = 180 \cos 200t$ V جریان روبه‌پایین در القاگر را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۱

۲۰. فرض کنید که op-amp در شکل ۱۰-۵۲ ایده‌آل است ($R_i = \infty$، $R_0 = 0$ و $A = \infty$) و نیز دو سیگنال به ورودی انتگرال‌گیر متصل است، $-V_m \cos \omega t$ و v_{out}. اگر حاصلضرب R_1C_1 برابر L / R در شکل ۱۰-۴ تنظیم شده باشد، نشان دهید که v_{out} برابر ولتاژ دوسر R (مرجع سمت چپ) در شکل ۱۰-۴ است.



شکل ۱۰-۵۲

۲۱. یک منبع ولتاژ $V_m \cos \omega t$ یک مقاومت R و یک خازن به طور سری بسته شده‌اند. (الف) یک معادله انتگرالی - دیفرانسیلی برحسب جریان حلقه i بنویسید و پس از آن مشتق بگیرید، تا معادله دیفرانسیل مدار به دست آید و (ب) یک فرم عمومی مناسب برای پاسخ واداشته $i(t)$ فرض کنید و سپس آن را در معادله دیفرانسیل جایگزین نمایید و سپس فرم دقیق پاسخ واداشته را معین کنید.

۱۰-۳ تابع تحریک مختلط

۲۲. فرم‌های مقابل را به مختصات قائم ببرید. (الف) $7 \angle -90^\circ$، (ب) $3 + j + 7 \angle -17^\circ$، (ج) $14e^{j15^\circ}$، (د) $1 \angle 0^\circ$. فرم‌های زیر را به فرم قطبی تبدیل نمایید. (هـ) $-2(1 + j9)$ و (و) 3.

۲۳. عملیات زیر را انجام دهید و پاسخ را به صورت یک عدد مختلط در مختصات قائم نشان دهید. (الف) $3 + 15 \angle -23^\circ$، (ب) $12j(17 \angle 180^\circ)$ و (ج) $5 - 16 \dfrac{(1 + j)(2 - j7)}{33 \angle -90^\circ}$.

۲۴. عملیات لازم برای تبدیل عبارات زیر به یک عدد مختلط به‌فرم قطبی را انجام دهید. (الف) $5 \angle 9^\circ - 9 \angle -17^\circ$، (ب) $(8 - j15)(4 + j16) - j$، (ج) $\dfrac{(14 - j9)}{(2 - j8)} + 5 \angle 30^\circ$ و (د) $17 \angle -33^\circ + 6 \angle -21^\circ + j3$.

۲۵. عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط به فرم قطبی نشان دهید.

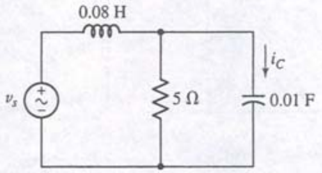
(الف) $e^{j14^\circ} + 9 \angle 3^\circ - \dfrac{8 - j6}{j^2}$ و (ب) $\dfrac{5 \angle 30^\circ}{2 \angle 15^\circ} + \dfrac{2e^{j5^\circ}}{2 - j2}$.

۲۶. اعداد مختلط زیر را به فرم مختصات قائم درآورید.

(الف) $5 \angle -110^\circ$، (ب) $6e^{j160^\circ}$، (ج) $(3 + j6)(2 \angle 50^\circ)$. به فرم قطبی درآورید: (د) $-100 - j40$ و (هـ) $2 \angle 50^\circ + 3 \angle -120^\circ$.

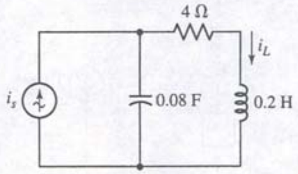
۲۷. محاسبات زیر را انجام دهید ونتیجه را به فرم قطبی درآورید. (الف) $45 \angle -50^\circ - 18 \angle 25^\circ$، (ب) $3 + \dfrac{2}{j} + \dfrac{2 - j5}{1 + j2}$. به فرم قائم درآورید. (ج) $(2.1 \angle 25^\circ)^3$ و (د) $0.7e^{j0.3}$.

۲۸. در مدار شکل ۱۰-۵۳ فرض کنید i_C به صورت پاسخ مختلط، $20e^{j(40t + 30^\circ)}$ A باشد، v_s را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.



شکل ۱۰-۵۳

۲۹. در مدار شکل ۱۰-۵۴ فرض کنید که جریان i به صورت مختلط $20e^{j(10t + 25^\circ)}$ باشد، $i_s(t)$ را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.



شکل ۱۰-۵۴

۳۰. در یک شبکه خطی مانند شکل ۱۰-۸، یک منبع ولتاژ سینوسی $v_s = 80 \cos (500t - 20^\circ)$ یک جریان خروجی $i_{out} = 5 \cos (500t + 12^\circ)$ تولید می‌کند. مطلوب است i_{out} به شرطی که v_s برابر (الف) $40 \cos (500t + 10^\circ)$ V، (ب) $40 \sin (500t + 10^\circ)$ V، (ج) $40e^{j(500t + 10^\circ)}$ V و (د) $(50 + j20)e^{j500t}$ V باشد.

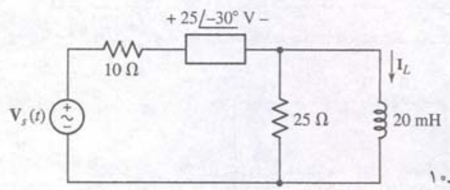
۱۰-٤ فیزور

۳۱. هر یک از جریان‌های زیر را به صورت فیزور بنویسید: (الف) $12 \sin (400t + 110^\circ)$ A، (ب) $-7 \sin 800t - 3 \cos 800t$ A، (ج) $4 \cos (200t - 30^\circ) - 5 \cos (200t + 20^\circ)$ A. اگر $\omega = 600$ rad/s باشد، مقدار لحظه‌ای هر یک از ولتاژها را در $t = 5$ ms به دست آورید. (د) $70 \angle 30^\circ$ V (هـ) $-60 + j40$ V.

۳۲. بگذارید $\omega = 4$ krad/s باشد و سپس مقدار لحظه i_x را در $t = 1$ ms به دست آورید. به شرطی که I_x برابر باشد با (الف) $5 \angle -80^\circ$ A، (ب) $-4 + j1.5$ A. فیزور ولتاژ V_x را به فرم قطبی نشان دهید به شرطی که $v_x(t)$ برابر باشد با (ج) $50 \sin (250t - 40^\circ)$ V، (د) $20 \cos 108t - 30 \sin 108t$ V و (هـ) $33 \cos (80t - 50^\circ) + 41 \cos (80t - 75^\circ)$ V.

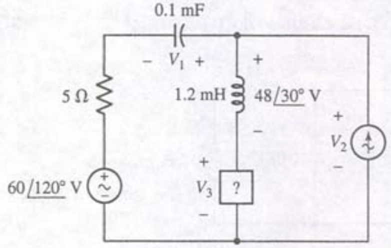
۳۳. ولتاژ فیزوری $V_1 = 10 \angle 90^\circ$ mV در $\omega = 500$ rad/s و $V_2 = 8 \angle 90^\circ$ mV در $\omega = 1200$ rad/s با هم در یک op amp جمع شده‌اند. اگر op amp این ورودی را در ضریب 5- ضرب کند، خروجی را در $t = 0.5$ ms بیابید.

۳۴. اگر در شکل ۱۰-۵۵، $\omega = 500$ rad/s و $I_L = 2.5 \angle 40^\circ$ A باشد، $v_s(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۰-۵۵

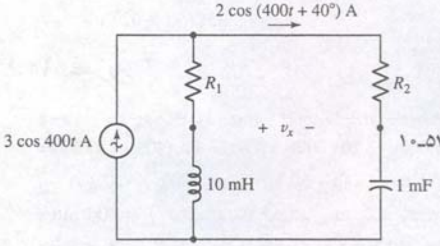
۳۵. اجازه دهید در شکل ۱۰-۵۶، $\omega = 5$ krad/s باشد، (الف) $v_1(t)$، (ب) $v_2(t)$ (ج) $v_3(t)$ را معین کنید.



شکل ۱۰-۵۶

۳۶. جریان فیزور $1\angle 0°$ A در ترکیب سری 1 Ω، 1 H و 1 F جاری است. در چه فرکانسی دامنه ولتاژ دوسر شبکه دوبرابر دامنه ولتاژ دو سر مقاومت است؟

۳۷. در شکل ۱۰-۵۷، v_x را در مدار به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۷

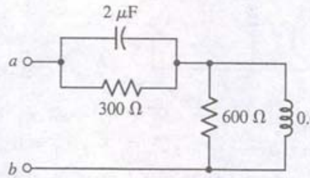
۳۸. یک جعبه سیاه با دو سیم زرد حاوی دو منبع جریان I_{s1} و I_{s2} است. ولتاژ خروجی V_{out} است. اگر $I_{s1} = 2\angle 20°$ A و $I_{s2} = 3\angle -30°$ A باشد، آن‌گاه $V_{out} = 80\angle 10°$ V است. با این وجود اگر $I_{s1} = I_{s2} = 4\angle 40°$ A باشد، آن‌گاه $V_{out} = 90 - j30$ V می‌باشد. اگر $I_{s1} = 2.5\angle -60°$ A و $I_{s2} = 2.5\angle 60°$ A باشد، V_{out} چقدر است؟

۱۰-۶ امپدانس

۳۹. امپدانس یک ترکیب سری متشکل از خازن‌های 1 mF، 2 mF و 3 mF را در فرکانس‌های (الف) 1 Hz، (ب) 100 Hz، (ج) 1 kHz و (د) 1 GHz پیدا کنید.

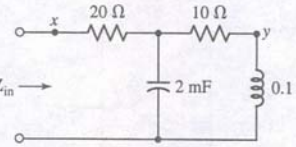
۴۰. امپدانس یک مقاومت موازی با القاگر 1 nH و القاگر 5 nH را در فرکانس‌های (الف) 1 Hz، (ب) 1 kHz، (ج) 1 MHz، (د) 1 GHz و (ه) 1 THz پیداکنید

۴۱. در پایانه‌های a و b از شکل ۱۰-۵۸، Z_{in} را پیدا کنید، اگر ω برابر باشد با (الف) 800 rad/s (ب) 1600 rad/s.



شکل ۱۰-۵۸

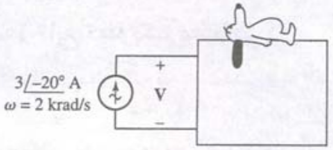
۴۲. بگذارید در شکل ۱۰-۵۹، $\omega = 100$ rad/s باشد، (الف) Z_{in} را پیدا کنید. (ب) اگر x به y اتصال کوتاه شده باشد، Z_{in} را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۹

۴۳. اگر ولتاژ منبع $v_s = 120 \cos 800t$ V به دو سر پایانه‌های a و b در شکل ۱۰-۵۸ وصل باشد. (و مرجع + در بالا است) جریان جاری شده به راست در مقاومت 300 Ω چقدر است؟

۴۴. در شکل ۱۰-۶۰، V را اگر در جعبه (الف) مقاومت 3 Ω با القاگر 2 mH سری باشد، (ب) 3 Ω در 125 μF سری باشد، (ج) 3 Ω و 2 mH و 125 μF سری باشند و (د) 3 Ω و 2 mH و 125 μF سری باشند، ولی $\omega = 4$ krad/s باشد.



شکل ۱۰-۶۰

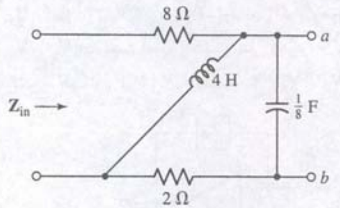
۴۵. یک القاگر 10 H - یک مقاومت 200 Ω و یک خازن C با هم موازی‌اند. (الف) امپدانس ترکیب موازی را در $\omega = 100$ rad/s با $C = 20$ μF به دست آورید. (ب) اگر اندازه امپدانس در $\omega = 100$ rad/s برابر 125 Ω باشد، C را معین کنید. (ج) در چه مقداری از ω با $C = 20$ μF اندازه امپدانس برابر 100 Ω می‌باشد.

۴۶. یک القاگر 20 mH و یک مقاومت 30 Ω با هم موازی‌اند. فرکانس ω: (الف) در $|Z_{in}| = 25 \Omega$ چقدر است؟ (ب) در زاویه $ang(Z_{in}) = 25°$ چقدر؟ (ج) در $Re(Z_{in}) = 25$ Ω چقدر؟ (د) در $Im(Z_{in}) = 10$ Ω چقدر می‌باشد؟

۴۷. در شکل ۱۰-۵۷ مقدار R_1 و R_2 را پیدا کنید.

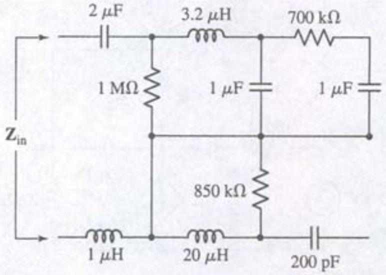
۴۸. یک شبکه دو عنصری دارای امپدانس ورودی $200 + j80$ Ω در فرکانس $\omega = 1200$ rad/s است. چه خازنی را با شبکه موازی کنیم تا ورودی دارای (الف) راکتانس صفر باشد؟ (ب) امپدانس 100 Ω باشد؟

۴۹. برای شبکه شکل ۱۰-۶۱، Z_{in} را در $\omega = 4$ rad/s به دست آورید به شرطی که پایانه‌های a و b (الف) مدار باز است و (ب) اتصال کوتاه است.



شکل ۱۰-۶۱

۵۰. امپدانس معادل شبکه در شکل ۱۰-۶۲ را پیدا کنید. فرکانس $f = 1$ MHz است.



شکل ۱۰-۶۲

۵۱. مداری مرکب از چند القاگر، خازن و مقاومت طراحی کنید که دارای (الف) امپدانس $1 + j4$ Ω در $\omega = 1$ rad/s باشد، (ب) امپدانس 5 Ω در $\omega = 1$ rad/s باشد و حداقل یک القاگر دارد، (ج) امپدانس $7\angle 80°$ Ω در $\omega = 100$ rad/s باشد و (د) با حداقل قطعات دارای امپدانس 5 Ω در $f = 3$ THz باشد.

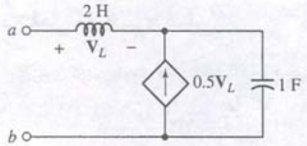
۵۲. مداری مرکب از خازن‌ها، القاگرها و مقاومت‌ها طراحی کنید که دارای (الف) امپدانس $1 + j4$ kΩ در $\omega = 230$ rad/s باشد، (ب) امپدانس 5 MΩ در $\omega = 10$ rad/s ساخته شده که حداقل یک خازن دارد، (ج) دارای امپدانس $8\angle -22°$ Ω در $\omega = 50$ rad/s باشد و (د) با حداقل قطعات امپدانس 300 Ω در $\omega = 3$ krad/s باشد.

۱۰-۷ ادمیتانس

۵۳. ادمیتانس ترکیب موازی خازن‌های 1 mF، 2 mF و 4 mF را اگر در فرکانس (الف) 2 Hz، (ب) 200 Hz، (ج) 20 kHz و (د) 200 GHz کار کند را محاسبه کنید.

۵۴. سوسپتانس ترکیب موازی (الف) دو مقاومت 100 Ω، (ب) یک مقاومت 1 Ω موازی با خازن 1 F را اگر در فرکانس 100 rad/s کار کند، (ج) یک مقاومت 1 Ω سری با القاگر 2 H اگر در فرکانس 50 rad/s کار کند را به دست آورید.

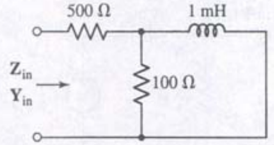
۵۵. ادمیتانس Y_{ab} شبکه شکل ۱۰-۶۳ را پیدا کرده و آن را به صورت ترکیبی از مقاومت R و القاگر L رسم نمایید. مقدار R و L را در $\omega = 1$ rad/s فرض کنید.



شکل ۱۰-۶۳

۵۶. یک مقاومت 5 Ω، یک القاگر 20 mH و یک ظرفیت 2 mF یک شبکه سری با پایانه‌های a و b را تشکیل می‌دهند. ضمن کار با ادمیتانس ببینید چه خازنی بین a و b قرار گیرد تا در $\omega = 500$ rad/s مقدار $Z_{in,ab} = R_{in,ab} + j0$ شود، (ب) $R_{in,ab}$ چقدر است؟ (ج) با خازن فوق در $\omega = 100$ rad/s، Y_{ab} چقدر است؟

۵۷. در شبکه شکل ۱۰-۶۴، فرکانسی را که در آن، (الف) 550 Ω، (ب) $X_{in} = 50$ Ω، (ج) $G_{in} = 1.8$ ms و (د) $B_{in} = -150$ μs باشد، به دست آورید.



شکل ۱۰-۶۴

۵۸. دو ادمیتانس $Y_1 = 3 + j4$ ms و $Y_2 = 5 + j2$ ms با هم موازی‌اند و سومین ادمیتانس $Y_3 = 2 - j4$ ms با ترکیب موازی سری است. اگر جریان $I_1 = 0.1\angle 30°$ A از Y_1 عبور کند، اندازه ولتاژ دو سر، (الف) Y_1، (ب) Y_2، (ج) Y_3 و (د) کل شبکه را پیدا کنید.

۵۹. ادمیتانس ترکیب موازی مقاومت 10 Ω و خازن 50 μF در فرکانس $\omega = 1$ krad/s برابر با ادمیتانس R_1 و C_1 سری در همان فرکانس است. (الف) R_1 و C_1 را پیدا کنید. (ب) بند قبل را برای $\omega = 2$ krad/s تکرار کنید.

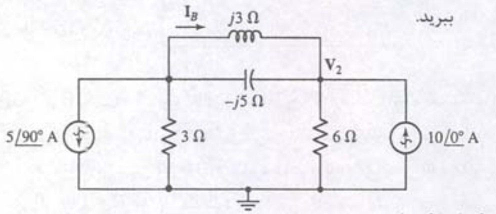
۶۰. صفحه مختصات کارتزین (قائم) دارای محور افقی با G_{in} برحسب زیمنس است، و محور عمودی B_{in} نیز بر حسب زیمنس می‌باشد. اگر ترکیب سری مقاومت 1 Ω و خازن 0.1 F باشد، (الف) Y_{in}، G_{in} و B_{in} را برحسب ω به دست آورید. (ب) جفت محورها (G_{in} و B_{in}) را روی صفحه در فرکانس‌های $\omega = 0, 1, 2, 10, 20, 10^6$ rad/s مشخص کنید.

۶۱. ترکیبی از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) ادمیتانس $1 - j4$ S در $\omega = 1$ rad/s، (ب) ادمیتانس 200 ms در $\omega = 1$ rad/s با حداقل یک القاگر، (ج) ادمیتانس $7\angle 80°$ μs در $\omega = 100$ rad/s و (د) یک ادمیتانس 200 mΩ در $\omega = 3$ THz با حداقل قطعات ممکن باشد.

۶۲. مداری مرکب از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) یک ادمیتانس $1 - j4$ pS در $\omega = 30$ rad/s، (ب) ادمیتانس 5 μs در $\omega = 560$ rad/s باشد و در آن حداقل یک خازن باشد، (ج) یک ادمیتانس $4\angle -10°$ ns در $\omega = 50$ rad/s و (د) یک ادمیتانس 60 ns در $\omega = 300$ rad/s با حداقل قطعات باشد.

۱۰-۸ تحلیل گرهی و مش

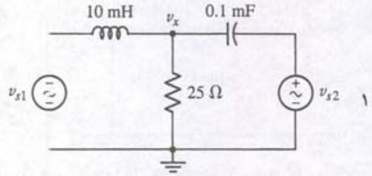
۶۳. تحلیل فیزوری گرهی را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن V_2 به کار ببرید.



شکل ۱۰-۶۵

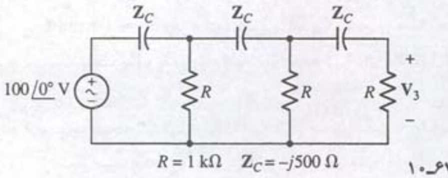
۶۴. تحلیل فیزوری مش را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن I_3 به کار ببرید.

۶۵. در مدار شکل ۱۰-۶۶، اگر $v_{s1} = 20\cos 1000t$ V و $v_{s2} = 20\sin 1000t$ V باشند، $v_x(t)$ را پیدا کنید.



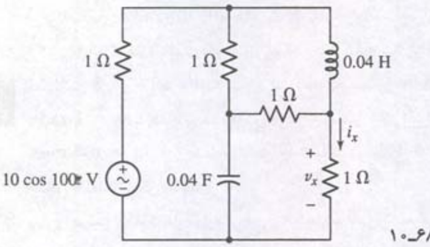
شکل ۱۰-۶۶

۶۶. (الف) V_3 را در مدار شکل ۱۰-۶۷ بیابید. (ب) تا چه مقدار یکسانی، امپدانس خازن‌ها باید تغییر کند به نحوی که V_3 به اندازه $180°$ با ولتاژ منبع اختلاف فاز داشته باشد؟



شکل ۱۰-۶۷

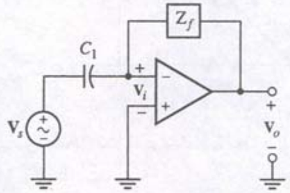
۶۷. برای یافتن $i_x(t)$ در شکل ۱۰-۶۸ از تحلیل مش استفاده کنید.



شکل ۱۰-۶۸

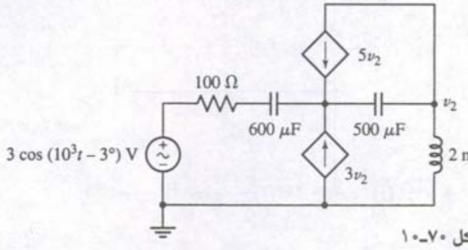
۶۸. به کمک فیزورها و تحلیل گرهی، $v_x(t)$ را در شکل ۱۰-۶۸ به دست آورید.

۶۹. op amp شکل ۱۰-۶۹ دارای امپدانس ورودی بینهایت، امپدانس خروجی صفر و بهره بزرگ ولی معین (مثبت، حقیقی) $A = -V_o / V_i$ است. (الف) یک مشتق‌گیر ساده با $Z_f = R_f$ بسازید. V_o / V_s را پیدا کنید و سپس نشان دهید که با $A \to \infty$، نسبت $V_o / V_s \to -j\omega C_1 R_f$ خواهد بود. (ب) اگر Z_f موازی C_f و R_f باشد، V_o / V_s را به دست آورید و سپس نشان دهید که اگر $A \to \infty$ میل کند، $V_o / V_s \to -j\omega C_1 R_f / (1 + j\omega C_f R_f)$ میل خواهد کرد.



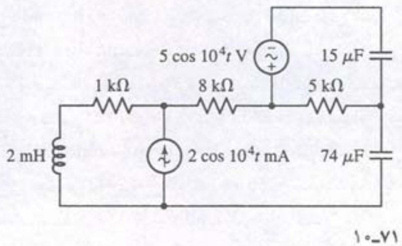
شکل ۱۰-۶۹

۷۰. برای مدار شکل ۱۰-۷۰، ولتاژ v_2 را معین کنید.



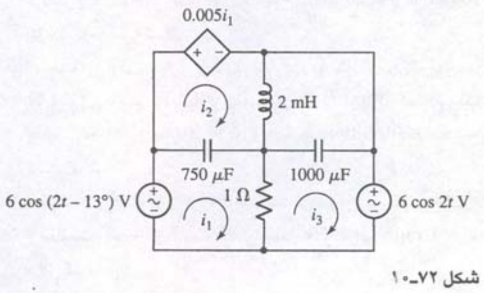
شکل ۱۰-۷۰

۷۱. توان تلف شده به وسیله مقاومت 1 kΩ در شکل ۱۰-۷۱ در زمان $t = 1$ ms چقدر است؟



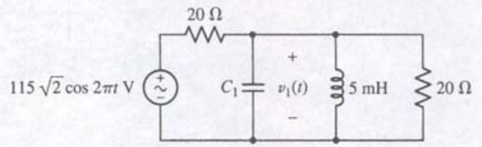
شکل ۱۰-۷۱

۷۲. تحلیل فیزوری برای تعیین سه جریان مش $i_1(t)$، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ در مدار شکل ۱۰-۷۲ به کار ببرید.



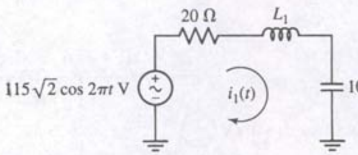
شکل ۱۰-۷۲

۷۳. در مدار شکل ۱۰-۷۳ ولتاژ $v_1(t) = 6.014\cos(2\pi t + 85.76°)$ V است. ظرفیت C_1 چقدر است؟



شکل ۱۰-۷۳

۷۴. در مدار شکل ۱۰-۷۴ جریان $i_1(t) = 8.132\cos 2\pi t$ A است. مطلوب است القاکنایی L؟

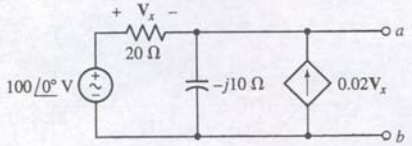


شکل ۱۰-۷۴

۷۵. با مراجعه به تقویت کننده شکل ۱۰-۲۶ (ب): (الف) برای زاویه فاز خروجی معادله‌ای برحسب فرکانس به دست آورید. ورودی را $V_s = 1\angle 0°$ V فرض کنید. (ب) معادله خود را روی کاغذ نیمه لگاریتمی برای فرکانس‌های 100 Hz تا 10 GHz رسم کنید. از $C_\pi = 5$ PF، $R_\pi = 2.2$ kΩ، $R_B = 5$ kΩ، $R_s = 300$ Ω، $R_L = 1.2$ kΩ، $R_C = 4.7$ kΩ، $g_m = 38$ ms، $C_\mu = 2$PF استفاده کنید. (ج) در چه محدوده فرکانسی، خروجی دقیقاً $180°$ نسبت به ورودی اختلاف فاز دارد. حدوداً در چه فرکانسی این رابطه فازی شروع به تغییر می‌نماید.

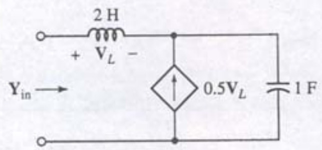
۱۰-۹ تجمیع، تبدیل منابع و قضیه تونن

۷۶. معادله تونن حوزه فرکانس شبکه شکل ۱۰-۷۵ را بیابید. نتیجه را به صورت V_{th} سری با Z_{th} نشان دهید.



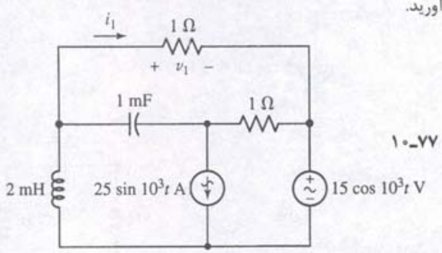
شکل ۱۰-۷۵

۷۷. امپدانس ورودی مدار شکل ۱۰-۷۶ را به دست آورید و آن را به صورت ترکیب موازی یک مقاومت و یک القاگر L نشان دهید، در $\omega = 1$ rad مقادیر R و L را فرض شده‌اند.



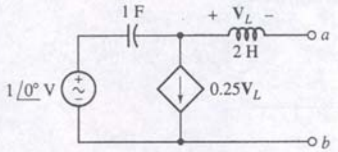
شکل ۱۰-۷۶

۷۸. با مراجعه به شکل ۱۰-۷۷، با روش تجمیع، بخشی از $v_1(t)$ را که در آن، (الف) فقط منبع ولتاژ (ب) فقط منبع جریان عمل می‌کنند، به دست آورید.



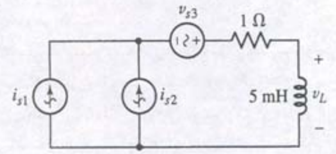
شکل ۱۰-۷۷

۷۹. با $\omega = 1$ rad/s، معادله نورتن شبکه ۱۰-۷۸ را پیدا کنید. معادل نورتن را به صورت I_N موازی با R_N و یکی از دو عنصر L_N و C_N بسازید.



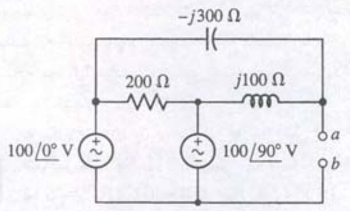
شکل ۱۰-۷۸

۸۰. در مدار شکل ۱۰-۷۹، فرض کنید $i_{s1} = 2\cos 200t$ A، $i_{s2} = 1\cos 100t$ A و $v_{s3} = 2\sin 200t$ V باشد، $v_L(t)$ را بیابید.



شکل ۱۰-۷۹

۸۱. مدار معادل تونن را برای شکل ۱۰-۸۰ به دست آورید.

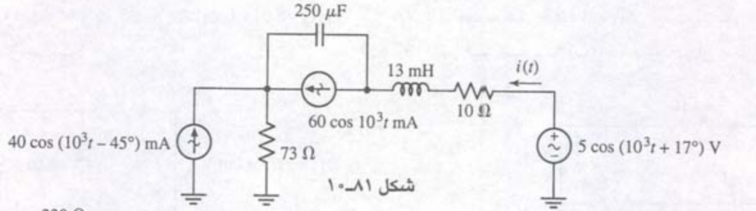


شکل ۱۰-۸۰

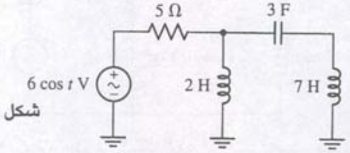
۸۲. جریان $i(t)$ جاری شده از منبع ولتاژ شکل ۱۰-۸۱ چقدر است؟

۸۳. (الف) ولتاژ دو سر خازن 3F شکل ۱۰-۸۲ را به دست آورید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.

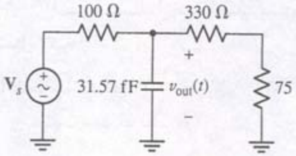
۸۴. (الف) معادل تونن از دید القاگر J5 Ω در شکل ۱۰-۲۱ را به دست آورید. (ب) با فرض فرکانس 100 rad/s، صحت نتیجه خود را با PSpice تحقیق کنید.



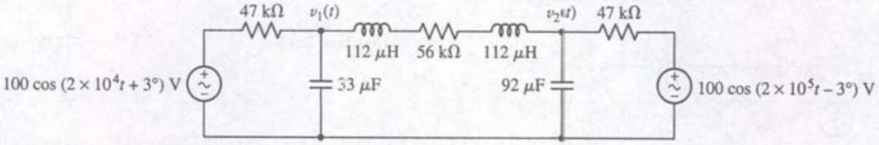
شکل ۱۰-۸۱



شکل ۱۰-۸۲



شکل ۱۰-۸۳



شکل ۱۰-۸۴

۸۵. با استفاده از یک مقاومت، یک خازن، یک منبع ولتاژ سینوسی و اصل تقسیم ولتاژ مداری طراحی کنید که فرکانس‌های بالا را حذف نماید. (راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سر یکی از دو عنصر غیرفعال را تعریف کنید و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف کاهش ولتاژ خروجی است).

۸۶. با یک مقاومت، یک خازن و یک منبع ولتاژ سینوسی و اصل تقسیم ولتاژ مداری طراحی کنید که فرکانس‌های پایین را حذف کند. (راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سر یکی از عناصر غیرفعال را تعریف کنید، و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف، کاهش ولتاژ خروجی است).

۸۷. (الف) مدار شکل ۱۰-۸۳ را به مدار ساده‌تر RC سری کاهش دهید. (ب) معادله‌ای برای اندازه نسبت ولتاژ V_{out} / V_s به صورت تابعی از فرکانس بیابید. (ج) معادله را در محدوده 100 Hz تا 1 MHz رسم کنید و نتیجه خود را با جواب شبیه‌سازی شده حاصل از PSpice در مدار اصلی، مقایسه نمایید.

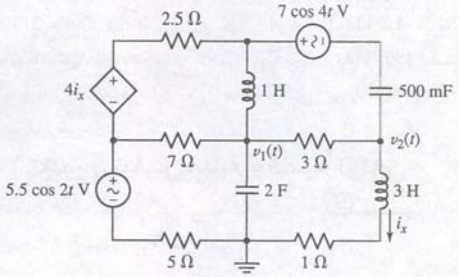
۸۸. به شکل ۱۰-۲۶ (ب) مراجعه کنید. (الف) نشان دهید که حداکثر ولتاژ ماکزیمم $g_m(R_C \,||\, R_L)$ است. (ب) اگر $R_s = 100\ \Omega$، $R_L = 8\ \Omega$، مقدار حداکثر R_C برابر $10\ k\Omega$، $r_\pi g_m = 300$ باشد و دیگر پارامترها بتوانند تغییر کنند، برای افزایش حداکثر بهره، مدار را چگونه اصلاح می‌نمایید. (ج) این اصلاح طراحی روی فرکانس قطع تقویت کننده چه تأثیری دارد؟

۸۹. از تجمیع برای یافتن ولتاژ $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در شکل ۱۰-۸۴ استفاده کنید.

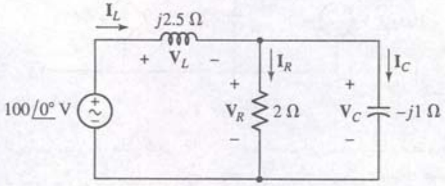
۹۰. از تجمیع برای یافتن ولتاژ $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در شکل ۱۰-۸۵ استفاده نمایید.

۱۰-۱۰ نمودارهای فیزوری

۹۱. (الف) مقادیر I_L، I_R، I_C، V_L، V_R، V_C و V_s را برای مدار شکل ۱۰-۸۶ محاسبه کنید. (ب) با مقیاس هر 50 V در یک اینچ و 25 A در هر اینچ هر جفت کمیت را روی نمودار فیزوری نشان دهید و روابط $V_s = V_L + V_R$ و $I_L = I_R + I_C$ را روی آن مشخص نمایید.

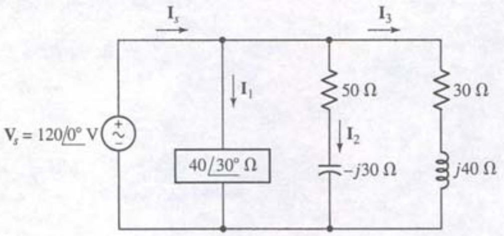


شکل ۱۰-۸۵



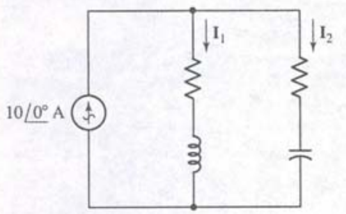
شکل ۱۰-۸۶

۹۲. در مدار شکل ۱۰-۸۷، مقادیر (الف) I_1، I_2 و I_3 را پیدا کنید. (ب) V_s، I_1، I_2 و I_3 را روی نمودار فیزوری نشان دهید (مقیاس 50 V/in و 2 A/in مناسب است) (ج) I_s را به صورت گرافیکی به دست آورید و دامنه و زاویه فاز آن را مشخص کنید.



شکل ۱۰-۸۷

۹۳. در مدار شکل ۱۰-۸۸ می‌دانیم که $|I_1| = 5$ A و $|I_2| = 7$ A است. I_1 و I_2 را با پرگار، خط‌کش یا ابزاری از این قبیل پیدا کنید.



شکل ۱۰-۸۸

۹۴. فرض کنید $V_1 = 100\ \angle 0°$ V، $|V_2| = 140$ V و $|V_1 + V_2| = 120$ V باشد. با روش‌های گرافیکی دو مقدار ممکن برای زاویه V_2 به دست آورید.

فصل یازدهم

تحلیل منابع انرژی AC

مفاهیم کلیدی

- توان لحظه‌ای
- توان متوسط
- مقادیر ولتاژ و جریان موثر
- توان ظاهری و ضریب توان
- توان مختلط
- مقایسه واژه‌های توان

مقدمه

اغلب بخش عمده‌ای از تحلیل مدار، تعیین توان تولیدشده یا مصرف‌شده و یا هر دوی آن‌ها است. در رابطه با موضوع توان ac که ما روش ساده‌ای برگزیدیم تصویر مناسبی از این‌که یک سیستم خاص چگونه کار می‌کند را ارائه نکرده است، لذا ما در این فصل چندین کمیت مرتبط با توان را معرفی می‌کنیم.

با توان **لحظه‌ای** آغاز می‌کنیم، که حاصل‌ضرب ولتاژ حوزه زمان و جریان حوزه زمان در یک عنصر یا شبکه موردنظر است. توان لحظه‌ای به نوبه خود گاهی بسیار مفید است، زیرا حداکثر مقدار آن می‌باید محدود شود تا از محدوده مجاز برای یک وسیله فیزیکی خارج نگردد. مثلاً تقویت‌کننده‌های ترانزیستوری و لامپی هر دو در هنگام تجاوز توان اوج از حد معینی در خروجی تولید اعوجاج می‌نمایند و لذا بلندگوها صدای ناهنجاری را تولید می‌کنند. در هر صورت ما عمدتاً به توان لحظه‌ای به این دلیل علاقمندیم که می‌توان از آن **توان متوسط** را محاسبه کرد. مشابه با این مطلب مسافرت در بیرون شهر است که در آن حرکت با سرعت متوسط بهتر قابل تعریف است، ولی سرعت لحظه‌ای به ما پرهیز از سرعت‌های ماکزیممی که موجب خطر می‌شود را یادآوری می‌نماید.

در مسائل عملی توان متوسط را مورد توجه قرار می‌دهیم که حدود آن، کسری از پیکووات در ارسال سیگنال راه دور از فضای بالای جو، تا چند وات توان تولیدی برای بلندگوها در سیستم‌های صوتی استریو، چند وات برای قهوه‌جوش، یا 10 میلیون وات تولیدی در یک نیروگاه می‌باشد. هنوز خواهیم دید که حتی مفهوم توان متوسط هم محدودیت خود را دارد، خصوصاً هنگامی که ما با مبادله انرژی بین بارهای رآکتیو و منابع انرژی مواجه می‌شویم. این موضوع به راحتی با معرفی مفاهیم توان رآکتیو، توان مختلط و ضریب توان ـ که همگی واژه‌هایی آشنا در صنعت انرژی هستند ـ قابل برخورد و مدیریت است.

۱۱ـ۱ توان لحظه‌ای

توان لحظه‌ای انتقالی به هر وسیله با حاصل‌ضرب ولتاژ لحظه‌ای دو سر وسیله در جریان لحظه‌ای درون آن تعریف می‌گردد. بنابراین:

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{۱}$$

اگر وسیله موردنظر یک مقاومت R باشد، آن‌گاه توان را برحسب فقط جریان یا فقط ولتاژ بیان می‌کنیم:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \tag{۲}$$

اگر ولتاژ و جریان، مربوط به وسیله یا دستگاهی کاملاً القایی باشد، آن‌گاه:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v(t)\int_{\infty}^{t} v(t')dt' \tag{۳}$$

که در آن فرض خواهیم کرد که در $t = -\infty$ ولتاژ صفر باشد. در حالت خازن:

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}\,i(t)\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \qquad (۴)$$

که فرض مشابهی برای جریان صورت گرفته است. با این وجود معادلات توان برحسب فقط ولتاژ یا فقط جریان بزودی با مطالعه شبکه‌های کلی‌تر، بد وجهه خواهد شد. نمایش فوق به دلیل دیگری هم الزامی نیست زیرا می‌توانیم در پایانه‌های شبکه هم ولتاژ و هم جریان را بیابیم. به عنوان مثال، مدار RL شکل ۱ـ۱۱ را که با یک منبع ولتاژ پله‌ای تحریک شده مورد بررسی قرار می‌دهیم، پاسخ جریان به صورت زیر است:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})\,u(t)$$

و بنابراین توان کل انتقالی به وسیله منبع یا جذب‌شده به وسیله شبکه غیرفعال برابر است با:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})\,u(t)$$

که در آن مربع تابع پله واحد برابر با همان تابع پله واحد است.

توان انتقالی به مقاومت برابر است با:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2\,u(t)$$

برای تعیین توان جذب‌شده به وسیله القاگر، ابتدا ولتاژ القاگر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L\frac{di(t)}{dt} \\ &= V_0e^{-Rt/L}\,u(t) + \frac{LV_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})\frac{du(t)}{dt} \\ &= V_0e^{-Rt/L}\,u(t) \end{aligned}$$

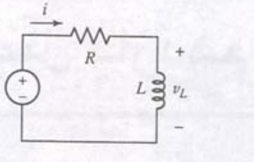
زیرا $\frac{du(t)}{dt}$ در $t > 0$ مساوی صفر و $(1 - e^{-Rt/L}) = 0$ در $t = 0$ صفر می‌باشد. بنابراین توان جذب‌شده به وسیله القاگر برابر زیر است:

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}\,e^{-Rt/L}\,(1 - e^{-Rt/L})\,u(t)$$

با چند دستکاری جبری خواهیم داشت:

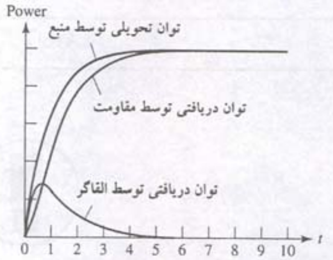
$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

که محکی برای درستی کار است. نتایج در شکل ۲ـ۱۱ رسم شده است.



شکل ۱ـ۱۱ توان لحظه‌ای انتقالی به R عبارت‌است‌از:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2\,u(t)$$



شکل ۲ـ۱۱ نمودارهای $p(t)$، $p_L(t)$ و $p_R(t)$. با میراشدن حالت گذرا مدار به حالت ماندگار می‌رود. چون تنها منبع مدار dc است، القاگر در نهایت به صورت اتصال کوتاه عمل می‌نماید و توان جذب‌شده به وسیله آن صفر می‌شود.

توابع ناشی از تحریک سینوسی

بیایید منبع ولتاژ در شکل ۱ـ۱۱ را با منبع سینوسی $V_m\cos\omega t$ عوض کنیم. پاسخ حالت ماندگار حوزه زمان به صورت زیر بود:

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

که

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \quad \text{و} \quad \phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

پس توان لحظه‌ای انتقالی به کل مدار در حالت ماندگار سینوسی چنین است:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_mI_m\cos(\omega t + \phi)\cos\omega t$$

بهتر است رابطه فوق را با استفاده از روابط مثلثاتی دوباره بنویسیم:

$$p(t) = \frac{V_mI_m}{2}[\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi] = \frac{V_mI_m}{2}\cos\phi + \frac{V_mI_m}{2}\cos(2\omega t + \phi)$$

آخرین معادله چند ویژگی دارد که به طور کلی برای وضعیت حالت ماندگار مدارها معتبر است. اولین جمله تابعی از زمان نیست و دومی دارای فرکانسی دوبرابر فرکانس اعمال شده است. چون جمله اخیر موجی کسینوسی است و چون امواج سینوسی و کسینوسی دارای متوسط صفراند (وقتی‌که متوسط در فاصله مضارب صحیح پریود باشد)، بنابراین توان متوسط برابر با $\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi$ است. به زودی خواهیم دید که واقعاً چنین است.

مثال ۱ـ۱۱

یک منبع ولتاژ $40 + 60u(t)$ V، یک خازن $5\mu F$ و یک مقاومت 200Ω با یکدیگر به طور سری بسته شده‌اند. توان جذب‌شده به‌وسیله خازن و مقاومت را در $t = 1.2ms$ پیداکنید.

در $t = 0^-$، جریانی وجود ندارد و لذا 40 V در دو سر خازن و مقاومت سری با آن به 100 V پرش می‌کند. چون v_C نمی‌تواند در زمان صفر تغییر یابد، ولتاژ مقاومت در $t = 0^+$ برابر 60 V خواهد بود.

پس جریان در هر سه عنصر در $t = 0^+$ برابراست‌با $60/200 = 300$ mA و برای $t > 0$ داریم:

$$i(t) = 300e^{-t/\tau}\ \text{mA}$$

که در آن $\tau = RC = 1ms$ است. بنابراین جریان در $t = 1.2ms$ برابر 90.36 mA و توان جذب‌شده به وسیله مقاومت در این لحظه $i^2(t)R = 1.633$ W می‌باشد.

توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله خازن $i(t)v_C(t)$ است و به چند روش می‌توان رابطه ولتاژ خازن را به‌دست‌آورد. با توجه به این‌که در $t > 0$ مجموع ولتاژ کل در دو سر هر دو عنصر همیشه 100V است و این‌که ولتاژ دو سر مقاومت $60e^{-t/\tau}$ می‌باشد، داریم:

$$v_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

و بنابراین $v_C(1.2ms) = 100 - 60e^{-1/2} = 81.93$ V خواهد شد. توان جذب‌شده به وسیله خازن در $t = 1.2ms$ برابر است با $(90.36mA)(81.93V) = 7.403W$.

تمرین

۱ـ۱۱ یک منبع جریان $12\cos2000t$ A، یک مقاومت 200Ω و یک القاگر 0.2H با هم موازیند. فرض کنید شرایط حالت ماندگار حاکم است. در $t = 1ms$، توان جذب‌شده به وسیله (الف) مقاومت، (ب) القاگر و (ج) منبع سینوسی را به‌دست‌آورید.

جواب: 13.98 kW، -5.63 kW و -8.35 kW.

۲ـ۱۱ توان متوسط

وقتی از مقدار متوسط برای توان لحظه‌ای صحبت می‌کنیم، فاصله زمانی که درآن فرآیند متوسط‌گیری انجام می‌شود، باید کاملاً مشخص باشد. بگذارید ابتدا فاصله زمانی کلی t_1 تا t_2 را درنظربگیریم. آنگاه می‌توان با انتگرال‌گیری $p(t)$ از t_1 تا t_2 و تقسیم نتیجه آن بر فاصله زمانی $t_2 - t_1$، مقدار متوسط را به‌دست‌آورد:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt \qquad (۵)$$

مقدار متوسط با حرف بزرگ P مشخص می‌گردد زیرا تابعی از زمان نیست و معمولاً بدون هر زیرنویسی که بیانگر متوسط باشد، نوشته می‌شود. هرچند P تابعی از زمان نیست ولی تابعی از t_1 و t_2 است که این دو نیز فاصله انتگرال‌گیری را تعریف می‌کنند. این وابستگی فاصله زمانی را می‌توان به صورت ساده‌تر بیان کرد مشروط بر این‌که تابع $p(t)$ متناوب باشد. ما ابتدا این حالت مهم را بررسی می‌کنیم.

توان متوسط برای امواج پریودیک

اجازه بدهید فرض کنیم که تابع تحریک و پاسخ‌های مدار همگی پریودیک (دوره‌ای) اند و به حالت ماندگار رسیده‌ایم، هرچند که لزوماً سینوسی هم نباشد. می‌توان تابع پریودیک $f(t)$ را به صورت ریاضی تعریف کرد:

$$f(t) = f(t + T) \qquad (۶)$$

که T پریود یا دوره تناوب است. اکنون نشان می‌دهیم که مقدار متوسط توان لحظه‌ای که با معادله (۵) بیان شده است، می‌تواند در فاصله یک پریود محاسبه شود و شروع آن نیز اختیاری است.

موج پریودیک کلی در شکل ۳ـ۱۱ نمایش و با $p(t)$ مشخص شده است. ما ابتدا توان متوسط را با انتگرال‌گیری از t_1 تا زمان t_2 که یک پریود فاصله دارد، یعنی $t_2 = t_1 + T$، محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)\,dt$$

سپس با انتگرال‌گیری از t_x تا $t_x + T$ خواهیم داشت:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt$$

برابری P_1 و P_x از تفسیر انتگرال‌ها قابل تفسیر است. سطحی که برای نمایش انتگرال مورد استفاده در تعیین P_x وجود دارد به اندازه سطح t_1 تا t_x از P_1 کوچک‌تر و به اندازه سطح بین $t_1 + T$ تا $t_x + T$ از آن بزرگ‌تر است. طبیعت پریودیک منحنی لازم می‌دارد که این دو سطح برابر باشند. بنابراین **توان متوسط** با انتگرال توان لحظه‌ای در هر پریود دلخواه صورت گرفته و سپس به پریود تقسیم می‌گردد:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p\,dt \qquad (۷)$$

لازم به تذکر است که می‌توان انتگرال را در طول هر تعداد پریود صحیح انجام داد، به شرطی که تقسیم نیز بر همان تعداد پریود گردد. بنابراین:

$$P = \frac{1}{nT}\int_{t_x}^{t_x+nT} p\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (۸)$$

اگر به این مطلب عمومیت ببخشیم و انتگرال را در تمام فاصله زمانی بگیریم، نتیجه مفید دیگری حاصل می‌گردد. ابتدا حدود انتگرال را متقارن اختیار می‌کنیم:

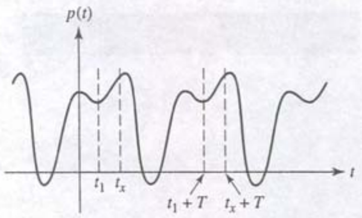
$$P = \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

سپس با بی‌نهایت‌شدن n، حدگیری می‌کنیم:

$$P = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

مادامی که $P(t)$ تابعی با رفتاری منطقی باشد، مثل همه توابع تحریک فیزیکی و پاسخ‌ها، می‌توان عدد بزرگ n را با عدد کمی بزرگ‌تر که صحیح نیست جایگزین کرد، بدون این‌که P تغییر چندانی کند، به علاوه خطا با افزایش n، کاهش می‌یابد. بدون بحثی بیشتر در این باره، مقدار گسسته nT را با متغیر پیوسته τ جایگزین می‌کنیم:

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)\,dt \qquad (۹)$$



شکل ۳ـ۱۱ مقدار متوسط توان P از تابع پریودیک $p(t)$ که در هر دوره تناوبی یکسان است.

در چند مورد خواهیم دید که بهتر است انتگرال‌گیری از توابع متناوب در بی‌نهایت پریود انجام شود. مثال‌هایی از کاربرد معادلات (۷)، (۸) و (۹) در ادامه آمده است.

بیایید محاسبه توان متوسط یک موج پریودیک را با یافتن توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت R از یک موج جریان دندانه‌اره‌ای شکل ۴ـ۱۱ (الف) دنبال کنیم. داریم:

$$i(t) = \frac{I_m}{T}t \qquad 0 < t \le T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T}(t - T) \qquad T < t \le 2T$$

و به همین ترتیب. و نیز:

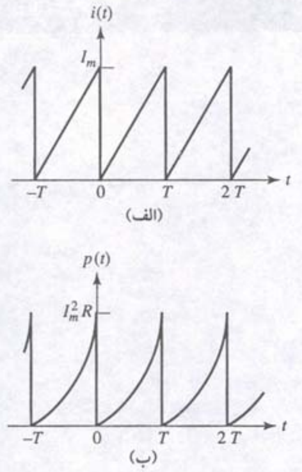
$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2\,Rt^2 \qquad 0 < t \le T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2\,R(t - T)^2 \qquad T < t \le 2T$$

و به همین ترتیب که در شکل ۴ـ۱۱ (ب) نیز رسم شده است، با انتگرال‌گیری حول یک پریود، یعنی از $t = 0$ تا $t = T$ داریم:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2R}{T^2}t^2dt = \frac{1}{3}I_m^2R$$

انتخاب یک پریود در محدوده‌ای دیگر، مانند از $t = 0.1T$ تا $t = 1.1T$، جواب یکسانی تولید می‌نماید. با انتگرال‌گیری از 0 تا 2T و تقسیم بر 2T یعنی کاربرد معادله (۸) با $n = 2$ و $t_x = 0$ نیز همان جواب فراهم می‌شود.



شکل ۴ـ۱۱ (الف) شکل موج دندانه‌اره‌ای. (ب) توان لحظه‌ای حاصل از عبور جریان از مقاومت R.

توان متوسط در حالت ماندگار سینوسی

اکنون بیایید جوابی کلی را برای حالت ماندگار سینوسی به‌دست‌آوریم. فرض می‌کنیم:

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$$

و جریان

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

که از وسیله موردنظر عبور می‌کند. توان لحظه‌ای برابر است با:

$$p(t) = V_mI_m\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

دوباره با بیان ضرب دو جمله کسینوسی به صورت نصف حاصل‌جمع کسینوس اختلاف زاویه‌ها و کسینوس جمع زاویه‌ها داریم:

$$p(t) = \frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}V_mI_m\cos(2\omega t + \theta + \phi) \qquad (۱۰)$$

می‌توانیم با کمی بررسی در انتگرال‌گیری صرفه‌جویی کنیم. اولین جمله یک مقدار ثابت و مستقل از t است. جمله باقیمانده یک تابع کسینوسی است. بنابراین $p(t)$ پریودیک است و پریود آن $\frac{1}{2}T$ می‌باشد. دقت کنید که پریود متعلق به جریان یا ولتاژ است و نه متعلق به توان. تابع توان پریود $\frac{1}{2}T$ دارد. در هر صورت می‌توانیم در صورت تمایل انتگرال را در فاصله T بگیریم تا مقدار متوسط توان به‌دست‌آید. با این وجود باید آن را به T تقسیم کنیم. می‌دانیم که مقدار متوسط امواج سینوسی وکسینوسی در یک پریود صفر است. بنابراین نیازی نیست که از معادله (۱۰) انتگرال بگیریم. متوسط جمله دوم در یک پریود T (یا $(\frac{1}{2}T)$) برابر صفر و متوسط اولین جمله، یک ثابت است. بنابراین:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta - \phi)} \qquad (۱۱)$$

به‌خاطرداشته باشید که $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

بنابراین، این نتیجه مهم که در بخش قبل برای یک مدار خاص معرفی شد، برای همه حالات ماندگار سینوسی حالت معتبری است. توان متوسط برابر با نصف حاصل‌ضرب حداکثر دامنه ولتاژ در حداکثر دامنه جریان در کسینوس اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ می‌باشد. علامت این زاویه در معادله نقشی ندارد.

مثال ۲_۱۱

با ولتاژ حوزه زمان $v = 4\cos(\pi t/6)$ V، توان متوسط و عبارت توان لحظه‌ای حاصل از ولتاژ $\mathbf{V} = 4\angle 0°$ V در دو سر امپدانس $Z = 2\angle 60°\,\Omega$ را پیدا کنید.

فیزور جریان $\mathbf{V}/Z = 2\angle -60°$ A و متوسط توان برابر است با:

$$P = \frac{1}{2}(4)(2)\cos 60° = 2\text{W}$$

ولتاژ حوزه زمان برابر است با:

$$v(t) = 4\cos\frac{\pi t}{6}\text{ V}$$

جریان حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60°\right)\text{ A}$$

و توان لحظه‌ای چنین است:

$$p(t) = 8\cos\frac{\pi t}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}-60°\right) = 2 + 4\cos\left(\frac{\pi t}{3}-60°\right)\text{ W}$$

که همگی در شکل ۵_۱۱ ترسیم شده‌اند. مقدار متوسط توان 2W و پریود آن، 6s، یعنی نیم پریود از جریان یا ولتاژ به وضوح دیده می‌شوند. در هر لحظه که جریان یا ولتاژ صفر باشد توان لحظه‌ای هم صفر است.

تمرین

۲_۱۱ با فرض فیزور ولتاژ $\mathbf{V} = 115\sqrt{2}\angle 45°$ V در دو سر امپدانس $Z = 16.26\angle 19.3°\,\Omega$، عبارتی برای توان لحظه‌ای بنویسید و اگر $\omega = 50$ rad/s باشد توان متوسط را حساب کنید.

جواب: $767.5 + 813.2\cos(100t + 70.7°)$ W و 767.5 W.

بد نیست برای بررسی، دو حالت خاص را از هم جدا کنیم، یکی توان متوسط انتقالی به مقاومت ایده‌آل و دیگری به رآکتور (ترکیبی فقط از خازن‌ها و القاگرها) ایده‌آل.

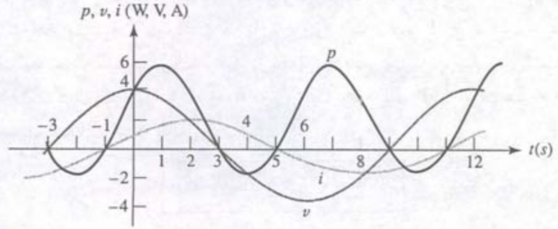
توان متوسط جذب‌شده توسط یک مقاومت ایده‌آل

اختلاف فاز زاویه‌ای بین جریان عبوری و ولتاژ دو سر یک مقاومت خالص صفر است. بنابراین:

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 0 = \frac{1}{2} V_m I_m$$

یا

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \qquad (۱۲)$$



شکل ۵_۱۱ منحنی‌های $p(t)$، $v(t)$ و $i(t)$ به‌صورت تابعی از زمان برای مداری که در آن ولتاژ فیزوری $\mathbf{V} = 40\angle 0°$ V به امپدانس $Z = 2\angle 60°\,\Omega$ در $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/s اعمال شده است.

یا

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \qquad (۱۳)$$

با دو فرمول آخر می‌توانیم توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت خالص را با آگاهی از جریان یا ولتاژ معین کنیم، این دو معادله ساده و مهم‌اند. متأسفانه گاهی از آن‌ها سوء استفاده می‌شود. بزرگ‌ترین اشتباه در به‌کارگیری آن‌ها هنگامی است که V_m، ولتاژ دو سر مقاومت نیست. اگر در به‌کارگیری جریان در مقاومت، معادله (۱۲)، و ولتاژ دو سر مقاومت، معادله (۱۳)، دقت کافی به عمل آید صحت عملکرد تضمین شده است. البته $\frac{1}{2}$ یادتان نرود.

به یاد داشته باشید که ما متوسط توان انتقالی به یک مقاومت را که به وسیله یک منبع سینوسی حمل می‌گردد محاسبه می‌کنیم، ضمناً این کمیت را با توان لحظه‌ای که فرمی مشابه دارد اشتباه نگیرید.

توان متوسط جذب‌شده به وسیله عناصر رآکتیو خالص

توان متوسط تحویلی به هر وسیله رآکتیو خالص (بدون مقاومت) باید صفر باشد. این مطلب نتیجه وجود اختلاف فاز 90° بین جریان و ولتاژ است، زیرا $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90° = 0$ و $P_x = 0$.

توان **متوسط** تحویل‌شده به هر شبکه متشکل از فقط القاگر و خازن نیز صفر است. توان **لحظه‌ای** فقط در لحظات مشخصی صفر است. بنابراین توان در بخشی از تناوب یا سیکل به شبکه داده شده و در قسمت دیگر از شبکه گرفته می‌شود، ولی هیچ توانی تلف نمی‌شود.

مثال ۳_۱۱

توان متوسط انتقالی به امپدانس $Z_L = 8 - j11\,\Omega$ را از جریان $\mathbf{I} = 5\angle 20°$ A به‌دست‌آورید.

می‌توان با استفاده از معادله (۱۲) حل را به سرعت به‌دست‌آورد. در محاسبه توان متوسط، تنها مقاومت 8Ω نقش دارد زیرا مولفه j11Ω هیچ توان متوسطی را جذب نمی‌کند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2}(5^2)\,8 = 100\text{ W}$$

تمرین

۳_۱۱ توان متوسط داده‌شده به امپدانس $6\angle 25°\,\Omega$ به وسیله جریان $\mathbf{I} = 2 + j5$ A چقدر است.

جواب: 78.85 W

مثال ۴_۱۱

توان جذب‌شده به وسیله هر سه عنصر غیرفعال شکل ۶_۱۱ و توان تولیدشده به وسیله هر منبع را مشخص کنید.

بدون هر تحلیلی می‌دانیم که توان متوسط جذب‌شده به وسیله دو عنصر رآکتیو برابر صفر است.

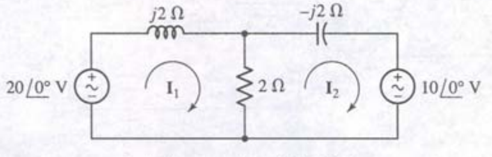
هر یک از مقادیر $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ با یکی از روش‌های آشنا، مثل روش حلقه، گره یا تجمیع قابل محاسبه است. این جریان‌ها عبارتند از:

$$\mathbf{I}_1 = 5 - j10 = 11.18\angle -63.43°\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 5 - j5 = 7.071\angle -45°\text{ A}$$

جریان رو به پایین در مقاومت 2Ω برابر است با:

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = -j5 = 5\angle -90°\text{ A}$$



شکل ۶_۱۱ توان متوسط داده‌شده به هر عنصر رآکتیو در حالت ماندگار سینوسی صفر.

پس $I_m = 5A$ و توان متوسط جذب‌شده به وسیله مقاومت به راحتی از معادله (۱۲) حاصل می‌گردد:

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2}(5^2)2 = 25W$$

این نتیجه می‌تواند با استفاده از معادله (۱۱) یا (۱۳) تست شود. توان متوسط جذب‌شده به وسیله هر عنصر راکتیو صفر است. اکنون به سراغ منبع سمت چپ می‌رویم. ولتاژ $20\angle 0°$ V و جریان مربوطه‌اش، $I_1 = 11.18\angle -63.43°$ قرارداد علامت عنصر فعال را تأیید می‌کنند. به این ترتیب توان تولیدشده به وسیله این منبع برابر است با:

$$P_{\text{چپ}} = \frac{1}{2}(20)(11.18)\cos[0° - (-63.43°)] = 50\ W$$

به طریقی مشابه، توان جذب‌شده توسط منبع سمت راست با توجه به قرارداد علامت عناصر غیرفعال عبارت‌است‌از:

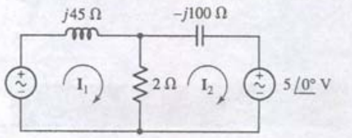
$$P_{\text{راست}} = \frac{1}{2}(10)(7.071)\cos(0° + 40°) = 25\ W$$

چون $25 + 25 = 50$ است، بنابراین رابطه توان صحیح است.

تمرین

۱۱ـ۴ برای مدار شکل ۱۱ـ۷ توان متوسط حمل‌شده به هر یک از عناصر غیرفعال را معین کنید. صحت پاسخ خود را با محاسبه توان تولیدی به وسیله هر یک از دو منبع تحقیق نمایید.

جواب: 37.6 mW.



شکل ۱۱ـ۷

انتقال حداکثر توان

قبلاً قضیه انتقال حداکثر توان به بار مقاومتی و منابع دارای امپدانس مقاومتی را بیان کردیم. اگر منبع تونن V_{th} با امپدانس تونن $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$ به بار $Z_L = R_L + jX_L$ وصل شود، می‌توان به سادگی نشان داد که توان متوسط داده‌شده به بار هنگامی حداکثر می‌شود که داشته باشیم $R_L = R_{th}$ و $X_L = -X_{th}$، یعنی وقتی که $Z_L = Z_{th}^*$ باشد. این نتیجه را معمولاً **قضیه انتقال حداکثر توان برای حالت ماندگار سینوسی** می‌نامند.

علامت Z^* مزدوج مختلط Z است، که از تبدیل j به -j به دست می‌آید. برای توضیح بیشتر نیز به پیوست ۵ مراجعه کنید.

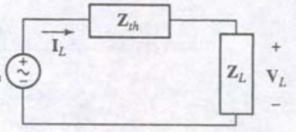
> یک منبع مستقل ولتاژ سری با یک امپدانس Z_{th}، یا یک منبع جریان موازی با یک امپدانس Z_{th} به شرطی **حداکثر توان متوسط** را به امپدانس Z_L انتقال می‌دهد که $Z_L = Z_{th}^*$ باشد.

جزئیات اثبات مطلب فوق به تمرین ۱۱ محول شده است، ولی می‌توان با روشی ساده موضوع را در شکل ۱۱ـ۸ پیگیری و مشاهده کرد. امپدانس معادل تونن Z_{th} را می‌توان به صورت مجموع دو مولفه نوشت، یعنی $R_{th} + jX_{th}$ و به همین ترتیب Z_L به صورت $R_L + jX_L$ نوشته می‌شود. جریان در حلقه برابر است با:

$$I_L = \frac{V_{th}}{Z_{th} + Z_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

و

$$V_L = V_{th}\frac{Z_L}{Z_{th} + Z_L} = V_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L}$$
$$= V_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$



شکل ۱۱ـ۸ یک مدار تک‌حلقه‌ای برای یافتن قضیهٔ انتقال حداکثر توان در حالت ماندگار سینوسی.

اندازه I_L برابر است با:

$$\frac{|V_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز برابر است با:

$$\angle V_{th} - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

به‌طور مشابه اندازه V_L برابر است با:

$$\frac{|V_{th}|\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز آن برابر است با:

$$\angle V_{th} + \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

با توجه به معادله (۱۱) عبارتی برای توان متوسط حمل‌شده به بار امپدانسی Z_L عبارت‌است‌از:

$$P = \frac{\frac{1}{2}|V_{th}|^2\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right)\right) \qquad (۱۴)$$

برای این‌که ثابت کنیم شرط انتقال حداکثر توان متوسط به بار، $Z_L = Z_{th}^*$ است، باید دو گام دیگر برداریم. ابتدا باید مشتق معادله (۱۴) را نسبت به R_L به دست آورده و برابر صفر کنیم. دوم این‌که مشتق معادله (۱۴) نسبت به X_L هم باید برابر صفر گردد. جزئیات بیشتر را برای خواننده باقی می‌گذاریم.

مثال ۱۱ـ۵

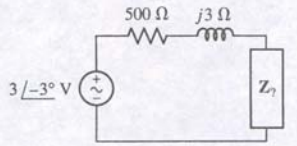
مدار خاصی متشکل از ترکیب سری یک منبع ولتاژ سینوسی $3\cos(100t - 3°)$ V، یک مقاومت 500Ω، یک القاگر 30mH و یک امپدانس مجهول تشکیل شده است. اگر مطمئن باشیم که منبع ولتاژ حداکثر توان متوسط را به امپدانس مجهول می‌دهد، مقدار آن چقدر است؟

نمایش فیزوری مدار در شکل ۱۱ـ۹ ترسیم شده است. به خوبی دیده می‌شود که در مدار مذکور امپدانس مجهول $Z_?$ با یک معادل توننی که متشکل از منبع $3\angle -3°$ V و امپدانس $500 + j3\Omega$ می‌باشد، سری است.

چون ظاهر مدار شکل ۱۱ـ۹ از قبل به فرمی است تا قضیه توان متوسط حداکثر به‌کارگرفته شود، می‌دانیم که توان متوسط حداکثر به امپدانسی برابر با مزدوج مختلط Z_{th} منتقل می‌گردد، یا:

$$Z_? = Z_{th}^* = 500 - j3\ \Omega$$

این امپدانس را به چند طریق می‌توان به‌دست‌آورد، که ساده‌ترین آن از سری‌کردن یک مقاومت 500Ω با یک خازن $-j3\ \Omega$ حاصل می‌گردد. چون فرکانس مدار 100 rad/s است این میزان امپدانس متعلق به خازنی با ظرفیت 3.333 mF است.



شکل ۱۱ـ۹ نمایش فیزوری یک مدار سری ساده متشکل از یک منبع ولتاژ سینوسی، یک مقاومت، یک القاگر و یک امپدانس مجهول.

تمرین

۱۱ـ۵ اگر القاگر 30mH مثال ۱۱ـ۵ با خازن 10μF تعویض شود، مقدار مولفه القاکتایی امپدانس $Z_?$ چیست؟ با این فرض که $Z_?$ حداکثر توان متوسط را جذب کند.

جواب: 10H.

توان متوسط برای توابع نامتناوب

حال توجه خود را به توابع نامتناوب معطوف می‌داریم. مثال عملی از یک تابع توان نامتناوب (یا غیر پریودیک) که در آن مقدار توان متوسط موردنظر است، توان خروجی یک رادیوتلسکوپ است که به سمت یک ستاره می‌فرستد. مثال دیگر مجموع تعدادی توابع متناوب است، که هر یک پریود متفاوتی دارد، به نحوی که نمی‌توان در بین آن‌ها تابعی با پریود یا دوره متناوب مشترک پیدا کرد. مثلاً جریان:

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \qquad (۱۵)$$

نامتناوب است زیرا نسبت تناوب دو موج سینوسی عدد غیر گویا است. در $t = 0$، هر دو تابع صفر و صعودی‌اند. ولی جمله اول تنها در $t = 2\pi n$ صفر و صعودی است که در آن n عددی صحیح است و بنابراین تابع فوق هنگامی متناوب است که πt یا $\pi(2\pi n)$، برابر $2\pi m$ باشد، که m نیز عددی صحیح است. هیچ حل یا n و m صحیحی نمی‌توان یافت که در رابطه فوق صدق کند. مقایسه تابع نامتناوب بیان‌شده در معادله (۱۵) و تابع متناوب زیر آموزنده است:

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \qquad (۱۶)$$

که در آن 3.14 یک عدد اعشاری کامل است نه تقریبی از ...3.141592. با کمی کوشش می‌توان نشان داد که تناوب موج جریان فوق 100π ثانیه می‌باشد.*

• $T_1 = 2\pi$ و $T_2 = 2\pi/3.14$. بنابراین به‌دنبال مقادیر صحیحی می‌گردیم که در رابطه $2\pi n = 2\pi m/(3.14)$ صدق کند. پس $m = 3.14n$ یا $(m = 314/100n)$ یا $157n = 50m$. کوچکترین m و n ممکن عبارت‌است از $n = 50$ و $m = 157$. بنابراین زمان تناوب برابر $T = 2\pi n = 100\pi s$ یا $T = 2\pi(157/3.14) = 100\pi s$.

مقدار متوسط توان انتقالی به یک مقاومت 1Ω با جریان متناوب معادله (۱۶) یا معادله متناوب (۱۵) را می‌توان با گرفتن انتگرال روی یک فاصله نامحدود به‌دست‌آورد. البته چون مقدار متوسط توابع ساده را غالباً می‌دانیم، می‌توان از انتگرال‌گیری‌های بسیاری اجتناب کرد. بنابراین توان متوسط ناشی از جریان معادله (۱۵) با اعمال معادله (۹) حاصل می‌گردد:

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t)\, dt$$

در این‌جا P را به صورت مجموع سه مقدار متوسط نوشته‌ایم. مقدار متوسط $\sin^2 t$ در بی‌نهایت دوره زمانی محدود را می‌توان با تبدیل آن به $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t)$ به‌دست آورد که برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود. به‌طورمشابه مقدار متوسط $\sin^2 \pi t$ نیز $\frac{1}{2}$ است و جمله آخر را می‌توان به صورت دو تابع کسینوسی نوشت که هر یک مطمئناً مقدار متوسط صفر را دارند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ \mathrm{W}$$

برای جریان متناوب معادله (۱۶) نیز جواب مشابهی به‌دست‌می‌آید. این روش را می‌توان به هر تابع جریانی که مجموعی از چند تابع سینوسی با تناوب‌های مختلف است اعمال کرد، یعنی:

$$i(t) = I_{m1}\cos\omega_1 t + I_{m2}\cos\omega_2 t + \ldots + I_{mN}\cos\omega_N t \qquad (۱۷)$$

توان متوسط انتقالی به R برابر است با:

$$P = \frac{1}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \ldots + I_{mN}^2)R \qquad (۱۸)$$

اگر هر مولفه جریان فوق زاویه فاز خاصی هم داشته باشد نتیجه تغییری نخواهد کرد. این نتیجه مهم به میزان قابل توجهی به هنگام به دست‌آوردن آن، ساده است. گام‌های لازم در این راستا عبارتنداز: مربع‌کردن تابع جریان، انتگرال‌گیری و حدگیری آن. نتیجه شگفت‌انگیز نیز هست، زیرا برای جریان‌هایی شبیه به معادله (۱۷) اصل تجمیع را می‌توان در مورد توان هم اعمال کرد. اگر جریان مجموع دو جریان dc یا دو جریان سینوسی هم فرکانس باشد، اصل تجمیع معتبر نخواهد بود.

مثال ۶ـ۱۱

توان متوسط داده‌شده به یک مقاومت 4Ω به وسیله جریان $i_1(t) = 2\cos 10t - 3\cos 20t$ A چقدر است؟

چون دو جمله کسینوسی فرکانس‌های متفاوتی دارند، دو توان‌متوسط به‌طورجداگانه محاسبه شده و سپس با هم جمع می‌شوند. بنابراین جریان توانی برابر $\frac{1}{2}(2^2)4 + \frac{1}{2}(3^2)4 = 8 + 18 = 26\mathrm{W}$ را به مقاومت 4Ω حمل می‌کند.

مثال ۷ـ۱۱

توان متوسط داده‌شده به مقاومت 4Ω به وسیله جریان $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t$ A چقدر است؟

در این‌جا هر دو جزء جریان فرکانس برابر دارند، و بنابراین باید در آن فرکانس به یک جمله سینوسی ادغام شوند. پس $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t - \cos 10t$ تنها $\frac{1}{2}(1^2) = 2\mathrm{W}$ متوسط توان به مقاومت 4Ω حمل خواهد کرد.

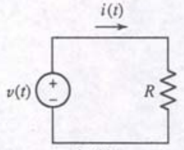
تمرین

۶ـ۱۱ یک منبع ولتاژ v_s به دو سر مقاومت 4Ω وصل است. توان متوسط جذب‌شده به وسیله مقاومت را برای v_s (الف) $8\sin 200t$ V، (ب) $8\sin 200t - 6\cos(200t - 45°)$، (ج) $8\sin 200t - 4\sin 100t$ V، (د) $8\sin 200t - 6\cos(200t - 45°) - 5\sin 100t + 4$ V، به‌دست‌آورید.

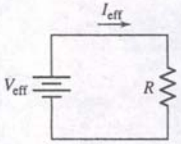
جواب: 8.00W، 4.01W، 10.00W و 11.14W.

۳ـ۱۱ مقادیر ولتاژ و جریان موثر

همه می‌دانیم که ولتاژ پریزهای برق منزلمان یک ولتاژ سینوسی 220V با فرکانس 50Hz است. ولی 220V چه معنی می‌دهد؟ مطمئناً این یک ولتاژ لحظه‌ای نیست، چون ولتاژ لحظه‌ای ثابت نیست، این ولتاژ، دامنه هم نیست چراکه ما آن را با V_m نشان می‌دهیم، اگر آن را روی صفحه اسیلوسکوپ کالیبره‌شده نمایش دهیم، خواهیم دید که دامنه این ولتاژ در هر یک از پریزهای منزل $220\sqrt{2}$ یا 311.12V است. مسلماً مقدار متوسط ولتاژ هم نمی‌باشد، زیرا مقدار متوسط ولتاژ سینوسی صفر است. می‌توانیم کمی به مفهوم آن، با تعریف اندازه متوسط در یک نیم سیکل مثبت یا منفی نزدیک‌تر شویم. اگر از یک ولتمتر نوع یکسوکننده برای این کار استفاده کنیم، مقدار 198V را اندازه‌گیری خواهیم کرد. 220V، **مقدار موثر** این ولتاژ سینوسی است. این مقدار نقش یک منبع در تحویل توان به بار مقاومتی را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰ـ۱۱ اگر توانی که مقاومت در دو حالت (الف) و (ب) جذب می‌کند یکسان باشد، مقدار موثر $i(t)$ برابر با I_{eff} و مقدار موثر $v(t)$ برابر با V_{eff} است.

مقدار موثر یک موج متناوب

بگذارید مقدار موثر را برحسب جریان تعریف کنیم، هرچند که می‌توان ولتاژ را هم برای این‌کار انتخاب کرد. مقدار موثر هر جریان متناوب برابر با مقدار جریان مستقیمی است که در یک مقاومت R جاری است و توان متوسط حمل‌شده به وسیله آن با توان جریان مستقیم برابر است.

به بیان دیگر، اجازه می‌دهیم تا جریان متناوب مفروضی از مقاومتی بگذرد، توان لحظه‌ای i^2R را معین می‌کنیم و سپس مقدار متوسط i^2R را در طول یک دوره تناوب یا پریود به‌دست‌می‌آوریم، که این همان توان متوسط است. آنگاه یک جریان dc در مدار جاری می‌کنیم و مقدار جریان مستقیم را آنقدر تنظیم می‌کنیم تا توانی به همان اندازه تولید شود. مقدار جریان مستقیم حاصل برابر با مقدار موثر جریان متناوب است. این ایده در شکل ۱۰ـ۱۱ دیده می‌شود.

اکنون می‌توان یک عبارت ریاضی کلی برای مقدار موثر $i(t)$ به سادگی به‌دست‌آورد. توان متوسط حمل‌شده به مقاومت به وسیله جریان متناوب $i(t)$ برابر است با:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

که T زمان تناوب $i(t)$ است. توان انتقالی به وسیله جریان مستقیم عبارت‌است از:

$$P = I_{eff}^2\ R$$

از برابری عبارات فوق و حل I_{eff} داریم:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} \qquad (۱۹)$$

نتیجه از مقاومت R، مستقل است و درواقع باید هم باشد. عبارت مشابهی را می‌توان برای ولتاژ متناوب به‌دست‌آورد و این کار به ترتیب با تعویض i، I_{eff} با v و V_{eff} صورت می‌گیرد.

توجه کنید که مقدار موثر به این ترتیب حاصل می‌شود که ابتدا تابع زمانی را مربع می‌کنیم، سپس متوسط تابع مربع شده در یک دوره تناوب را به‌دست‌می‌آوریم و بالاخره جذر متوسط توابع مربع‌شده را می‌گیریم. به زبان خلاصه‌تر عملیات یافتن مقدار موثر را جذر **متوسط مربع** می‌گویند، و با **rms** نشان می‌دهند.

مقدار موثر (rms) یک موج سینوسی

مهم‌ترین حالت خاص، موج سینوسی است. بیایید جریان سینوسی زیر را انتخاب کنیم:

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

که دارای زمان تناوب زیر است:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

و برای یافتن مقدار موثر آن رادر معادله (۱۹) قرار می‌دهیم:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\phi)\,dt}$$

$$= I_m\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega t+2\phi)\right]dt}$$

$$= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

بنابراین مقدار موثر جریان سینوسی کمیتی حقیقی و مستقل از زاویه فاز است و $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ برابر دامنه جریان می‌باشد. بنابراین جریانی مثل $\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi)$ A مقدار موثر 1A دارد و به همان میزان توان متوسط را به هر مقاومتی حمل خواهد کرد که جریان مستقیم 1A به آن حمل می‌نمود.

باید توجه کرد که فاکتور $\sqrt{2}$ یعنی ضریب دامنه جریان متناوب به مقدار موثر برای امواج سینوسی معتبر است. مثلاً برای موج دندان اره‌ای شکل ۴ـ۱۱، مقدار موثر برابر با مقدار حداکثر تقسیم بر $\sqrt{3}$ می‌باشد. فاکتوری که باید مقدار حداکثر بر آن تقسیم شود تا مقدار موثر به‌دست‌آید، به فرم ریاضی تابع متناوب بستگی دارد و بسته به طبیعت تابع می‌تواند گنگ یا گویا باشد.

استفاده از مقادیر موثر در محاسبه توان متوسط

استفاده از تعریف مقدار موثر rms، عبارات مربوط به توان متوسط را برای جریان و ولتاژ سینوسی با حذف فاکتور $\frac{1}{2}$ کمی ساده می‌کند. مثلاً توان متوسط داده‌شده به مقاومت R به وسیله جریان سینوسی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2}I_m^2 R$$

چون $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ است مقدار توان را چنین می‌توان نوشت:

$$P = I_{eff}^2\ R \qquad (۲۰)$$

عبارات آشنای دیگر توان نیز ممکن‌است به صورت تابعی از I_{eff} نوشته شوند:

$$P = V_{eff}I_{eff}\cos(\theta - \phi) \qquad (۲۱)$$

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R} \qquad (۲۲)$$

گرچه موفق شدیم فاکتور $\frac{1}{2}$ را حذف کنیم ولی اکنون باید ببینیم که یک کمیت سینوسی برحسب دامنه‌اش مشخص شده است یا برحسب مقدار موثرش. در زمینه‌های انتقال انرژی و توزیع آن و ماشین‌های دورانی غالباً مقدار موثر و در زمینه‌های الکترونیک و مخابرات غالباً دامنه و فاز به‌کارمی‌رود. در این کتاب فرض بر این‌است‌که مقادیر برحسب دامنه بیان شوند مگر در مواردی که عبارت rms صریحاً به‌کاررفته باشد.

در حالت ماندگار سینوسی فیزورهای ولتاژ و جریان ممکن‌است برحسب مقادیر موثر یا دامنه‌ها باشند. دو نوع عبارت فقط در ضریب $\sqrt{2}$ با یکدیگر اختلاف دارند. ولتاژ $50\underline{/30^\circ}$ V برحسب دامنه بیان شده‌است، ما می‌توانیم مقدار موثر آن را به صورت $35.4\underline{/30^\circ}$ V هم بیان کنیم.

این حقیقت که مقدار موثر برحسب یک کمیت dc معادل تعریف می‌شود، موجب می‌شود که معادلات توان مدارهای مقاومتی شبیه معادلات توان به‌کاررفته در تحلیل dc گردد.

مقدار موثر در مدارهای چندفرکانسی

برای تعیین مقدار موثر یک موج متناوب یا نامتناوب که از مجموع تعدادی موج سینوسی با فرکانس‌های متفاوت تشکیل شده، می‌توان از رابطه توان متوسط در معادله (۱۸) استفاده کرد. ما آن را برحسب مقادیر موثر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P = (I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + \dots + I_{Neff}^2)R \qquad (۲۳)$$

در این رابطه دیده می‌شود که مقدار موثر یک جریان متشکل از هر تعداد جریان سینوسی با فرکانس‌های مختلف را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$I_{eff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + \dots + I_{Neff}^2} \qquad (۲۴)$$

نتایج نشان می‌دهد که اگر یک موج سینوسی 5A rms با فرکانس 60Hz از مقاومتی عبور کند، توان متوسط $5^2(2) = 50W$ به وسیله مقاومت جذب می‌گردد. اگر جریان دیگری مثلاً 3A rms در 120Hz وجود داشته باشد، توان جذب‌شده $3^2(2) + 50 = 68W$ خواهد بود. اما با به‌کارگیری معادله (۲۴) می‌بینیم که مقدار موثر مجموع جریان‌های 60 و 120Hz برابر 5.831A است. بنابراین $P = 5.831^2(4) = 68W$ بوده که مثل قبل می‌باشد. با این وجود اگر جریان دوم هم در 60Hz باشد، مقدار موثر مجموع دو جریان 60Hz، بسته به فاز نسبی دو مولفه جریان چیزی بین 8 W و 128 W است.

توجه کنید که مقدار موثر کمیت dc به نام K، برابر است با K، نه $\frac{K}{2}$

تمرین

۱۱_۷ مقدار موثر هر یک از ولتاژهای متناوب زیر را محاسبه کنید:
(الف) $6\cos 25t$، (ب) $6\cos 25t+4\sin(25t+30^{\circ})$، (ج) $6\cos(25t) + 5\cos^2(25t)$، و (د) $6\cos 25t + 5\sin 30t + 4$ V.
جواب: 4.24V، 6.16V، 5.23V و 6.82V.

تحلیل کامپیوتری

برای محاسبه کمیت‌ها چند تکنیک مفید در PSpice وجود دارد. خصوصاً توابع موجود در probe امکان ترسیم توان لحظه و محاسبه توان متوسط را فراهم می‌سازد. مثلاً مدار ساده تقسیم ولتاژ شکل ۱۱_۱۱ را ملاحظه کنید که با یک موج سینوسی 60Hz با دامنه $115\sqrt{2}$ راه‌اندازی شده است. ما با اجرای شبیه‌سازی پاسخ گذرا در یک دوره تناوب موج ولتاژ، یعنی $\frac{1}{60}$s، آغاز می‌کنیم.

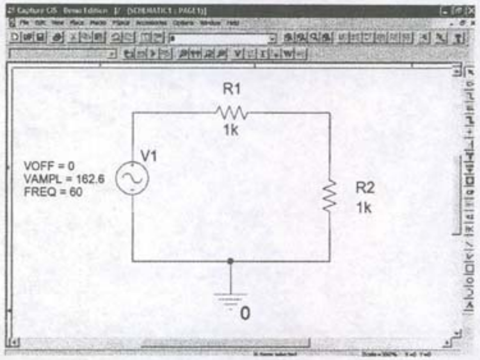
در شکل ۱۱_۱۲ جریان همراه با توان لحظه‌ای تلف‌شده در مقاومت R_1 با به‌کارگیری فرمان Add plot to window تحت plot ترسیم شده است. توان لحظه‌ای متناوب است. مقدار متوسط آن غیرصفر و اوج 6.61W می‌باشد. ساده‌ترین راه به‌کارگیری probe در تهیه توان متوسط $\frac{1}{2}\,(162.6\;\frac{1000}{1000\,+\,1000})\;(81.3\times 10^{-3}) = 3.305$ W استفاده از تابع "متوسط جاری" است. با ظاهر شدن جعبه محاوره Add Trace (Add و Trace)، عبارت زیر را در پنجره Trace Expression، تایپ کنید:

AVG(I(R1) * I(R1) * 1000)

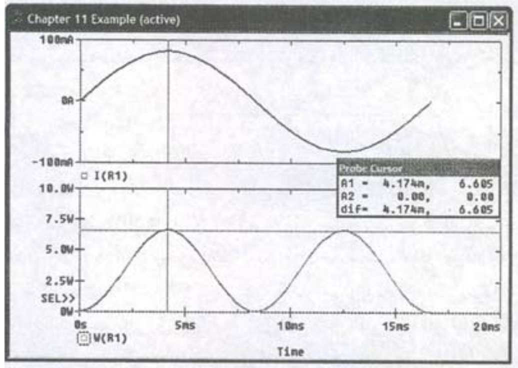
طبق شکل ۱۱_۱۳، توان متوسط در یک یا دو دورهٔ تناوب 3.305 W است که با محاسبات دستی نیز همخوانی دارد. probe امکان محاسبه متوسط روی یک فاصلهٔ زمانی دلخواه را نیز با تابع داخلی AVGX فراهم می‌سازد. مثلاً برای استفاده از این تابع در محاسبهٔ متوسط توان در یک دورهٔ تناوب که در این‌جا $\frac{1}{120} = 8.33$ msec است، عبارت زیر را وارد کنید:

AVGX(I(R1) * I(R1) * 1000, 8.33m)

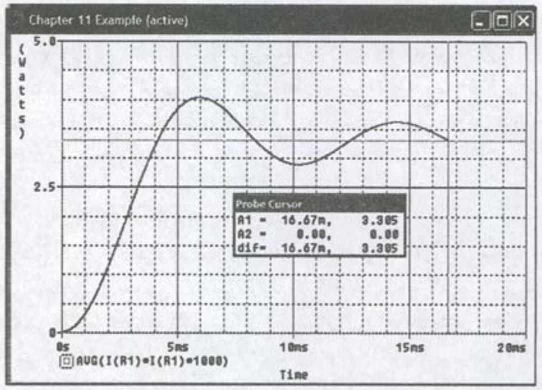
هر یک از دو روش در انتهای نمودار به مقدار 3.305W ختم می‌شوند.



شکل ۱۱_۱۱ یک مدار ساده تقسیم ولتاژ.



شکل ۱۱_۱۲ جریان و توان لحظه‌ای مربوط به مقاومت R_1.



شکل ۱۱_۱۳ توان متوسط جاری مصرفی به‌وسیله مقاومت R_1.

۱۱_۴ توان ظاهری و ضریب توان

به لحاظ تاریخی، معرفی مفاهیم توان ظاهری و ضریب توان در صنعت تولید برق ریشه دارند، زیرا در آن‌جا مقدار متنابهی انرژی از یک نقطه به نقطه دیگر انتقال می‌یابد، و راندمان این انتقال مستقیماً با هزینه تولید نسبت مستقیم دارد: هزینه‌ای که نهایتاً بر دوش مصرف‌کننده است. اگر مصرف‌کننده بار ناجوری داشته باشد که موجب کاهش بازده انتقال شود، باید به ازای هر کیلووات‌ساعت مصرف واقعی پول بیشتری بپردازد. به‌طورمشابه اگر مشتری از نیروگاه بخواهد در تجهیزات انتقال انرژی سرمایه‌گذاری بیشتری نماید باز هم باید پول بیشتری بپردازد. مگر این‌که شرکت دست‌ودل باز باشد و بخواهد ضرر کند.

توان ظاهری تنها به توابع تحریک و پاسخ سینوسی محدود نیست. می‌توان برای هر جریان و ولتاژی، با تعیین حاصل‌ضرب مقادیر موثر آن‌ها مقدار توان ظاهری را معین کرد.

در آغاز اجازه بدهید **توان ظاهری و ضریب توان** را تعریف کرده و سپس به‌صورخلاصه نشان دهیم که چگونه این جملات به وضعیت اقتصادی مرتبط می‌گردد. فرض می‌کنیم ولتاژ سینوسی زیر:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

به شبکه‌ای اعمال شده باشد و جریان سینوسی حاصل برابر باشد با:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

بنابراین زاویه فازی که ولتاژ از جریان پیش است برابر با $(\theta - \phi)$ می‌باشد. توان متوسط داده‌شده به شبکه با فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال در پایانه‌های ورودی را می‌توان برحسب مقادیر حداکثر چنین نوشت:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

یا برحسب مقادیر موثر چنین است:

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$$

اگر ولتاژ اعمال شده و پاسخ جریان مربوطه کمیاتی dc باشند، توان متوسط حمل‌شده به شبکه به سادگی با ضرب ولتاژ در جریان به‌دست‌می‌آید. با اعمال این تکنیک dc به مسائل سینوسی، مقداری برای توان جذب‌شده به‌دست‌می‌آید که "ظاهراً" باید از ضرب $V_{eff}I_{eff}$ حاصل گردد. در هر صورت این ضرب مقادیر موثر ولتاژ و جریان توان متوسط را نمی‌دهد و بنابراین ما آن را **توان ظاهری** می‌نامیم. به لحاظ ابعادی، توان ظاهری باید برحسب همان واحد توان

حقیقی اندازه‌گیری شود زیرا $\cos(\theta - \phi)$ بعدی ندارد، ولی به خاطر پرهیز از اشتباه، از عبارت ولت ـ آمپر یا VA برای توان ظاهری استفاده می‌شود. چون $\cos(\theta - \phi)$ کوچک‌تر از 1 است، بنابراین اندازه توان حقیقی هرگز بزرگ‌تر از توان ظاهری نخواهد بود.

نسبت توان حقیقی (یا متوسط) به توان ظاهری را **ضریب توان** می‌گویند و به‌طور اختصار با PF نشان می‌دهند. به این ترتیب:

$$PF = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{P}{V_{eff}I_{eff}}$$

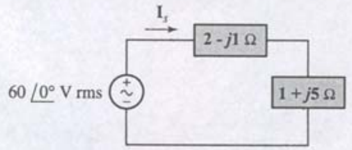
در حالت سینوسی، ضریب توان در واقع همان $\cos(\theta - \phi)$ بوده و $(\theta - \phi)$ زاویه‌ای است که ولتاژ به آن میزان از جریان پیش است. به همین دلیل معمولاً زاویه $(\theta - \phi)$ اغلب زاویه PF خوانده می‌شود.

در مدارهایی که فقط از بار مقاومتی تشکیل شده‌اند، ولتاژ و جریان همفاز، $(\theta - \phi)$ برابر صفر، و PF مساوی با 1 است. به بیان دیگر توان ظاهری و توان متوسط برابرند. با این وجود PF واحد برای مدارهای القایی و خازنی نیز امکان‌پذیر است و این در حالتی است که مقادیر عناصر مذکور و فرکانس کاری به دقت انتخاب شوند تا یک امپدانس ورودی با زاویه فاز صفر تولید گردد. بار خالص رآکتیو، یعنی باری که هیچ مقاومتی ندارد، اختلاف فاز $\pm 90^\circ$ را بین ولتاژ و جریان به‌وجود می‌آورد و بنابراین PF برابر صفر خواهد بود.

شبکه‌ها کلاً بین دو حد قرار دارند یعنی PF آن‌ها می‌تواند بین صفر و یک باشد. PF یک برابر با مثلاً 0.5، باری را نشان می‌دهد که دارای زاویه فاز امپدانس ورودی 60° یا -60° است که اولی بیانگر بار القایی است، زیرا ولتاژ به اندازه 60° از جریان پیش است، درحالی‌که دومی به بار خازن متعلق است. رفع شبهه در تعیین دقیق نوع بار با مراجعه به پیش‌بودن PF یا پس‌بودن آن قابل حل است. جملات پیشفاز و پسفاز، فاز جریان نسبت به ولتاژ را بیان می‌کنند. بنابراین یک بار القایی دارای PF پسفاز و یک بار خازنی هم PF پیشفاز دارد.

مثال ۸ـ۱۱

مقادیر توان متوسط داده‌شده به هر یک از دو بار در شکل ۱۴ـ۱۱ را محاسبه کنید. توان ظاهری تولیدشده به وسیله منبع و ضریب توان بار کل را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۴ـ۱۱ مداری که ما در آن به جست‌وجوی توان متوسط انتقالی به هر عنصر، توان ظاهری تولیدی به‌وسیله منبع و ضریب توان بار ترکیبی هستیم.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.

توان متوسط به توانی گفته می‌شود که به وسیله اجزای مقاومتی بار کشیده می‌شود. توان ظاهری حاصل‌ضرب ولتاژ موثر در جریان موثر ترکیب بار است.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

ولتاژ موثر 60 V rms است و در دو سر بار ترکیبی برابر است با $2-j+1+j5=3+j4\ \Omega$.

- ارائه طرح.

تحلیل ساده فیزوری جریان را مشخص می‌کند. با دانستن جریان و ولتاژ ما خواهیم توانست توان را محاسبه کنیم. این دو کمیت برای یافتن ضریب توان می‌توانند استفاده شوند.

- معادلات مناسب را بنویسید.

توان متوسط با رابطه زیر داده می‌شود:

$$P = V_{eff}I_{eff}\cos(\text{ang } \mathbf{V} - \text{ang } \mathbf{I})$$

توان ظاهری در واقع $V_{eff}I_{eff}$ است. ضریب توان از تقسیم این دو کمیت به‌دست‌می‌آید:

$$PF = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{P}{V_{eff}I_{eff}}$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما I_{eff} را لازم داریم:

$$\mathbf{I}_s = \frac{60\angle 0^\circ}{3 + j4} = 12\angle -53.13^\circ \text{ Arms}$$

به این ترتیب $\text{ang } \mathbf{I}_s = -53.13^\circ$ و $I_{eff} = 12\text{A rms}$ خواهد بود.

- اقدام به حل

توان انتقال‌یافته به بار بالایی برابر است با:

$$P_{upper} = I_{eff}^2 R_{top} = (12)^2(2) = 288 \text{ W}$$

توان انتقال‌یافته به بار سمت راست برابر است با:

$$P_{lower} = I_{eff}^2 R_{right} = (12)^2(1) = 144 \text{ W}$$

خود منبع یک توان ظاهری $V_{eff}I_{eff} = (60)(12) = 720 \text{ VA}$ را تحویل می‌دهد.

بالاخره ضریب توان ترکیب بارها با لحاظ ولتاژ و جریان مربوط به بارهای ترکیبی حاصل می‌شود. البته این ضریب توان با ضریب توان منبع یکی است:

$$PF = \frac{P}{V_{eff}I_{eff}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6 \text{ پسفاز}$$

چون بار ترکیبی القایی است.

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

توان کل حمل‌شده به منبع $288 + 144 = 432 \text{ W}$ است. توان تولیدشده به وسیله منبع برابر است با:

$$P = V_{eff}I_{eff}\cos(ang\ \mathbf{V} - ang\ \mathbf{I}) = (60)(12)\cos(0 + 53.13^\circ) = 432 \text{ W}$$

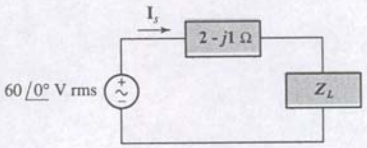
می‌بینیم بالانس توان برقرار است.

می‌توانید ترکیب بار امپدانسی را به صورت $5\angle 53.1^\circ\ \Omega$ بنویسید، ضریب PF را 53.1° به‌دست‌آورید، و بنابراین داریم $PF = \cos 53.1^\circ = 0.6$. ضمناً بار ترکیبی نیز القایی است و بنابراین PF به اندازه 0.6 پسفاز است.

تمرین

۸ـ۱۱ برای مدار شکل ۱۵ـ۱۱ ضریب توان بارهای ترکیبی را اگر $Z_L = 10\Omega$ باشد، به‌دست‌آورید.

جواب: 0.9966 پیشفاز



شکل ۱۵ـ۱۱

۵ـ۱۱ توان مختلط

گر توان را کمیتی مختلط تصور کنیم، محاسبه مربوط به توان تا حدی ساده‌تر می‌شود. خواهیم ید که اندازه توان مختلط همان توان ظاهری و قسمت حقیقی آن توان متوسط را می‌دهد. کمیت جدید یعنی بخش موهومی توان مختلط را **توان رآکتیو** می‌خوانیم.

توان مختلط را بر حسب ولتاژ کلی سینوسی $\mathbf{V}_{eff} = V_{eff}\angle\theta$ در دو سر پایانه‌ها و جریان سینوسی کلی $\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}\angle\phi$ که در یکی از پایانه‌ها جاری است و قرارداد علامت عنصر یرفعال را تأیید می‌کند، تعریف می‌نماییم. توان متوسط جذب‌شده به وسیله این شبکه دو ایانه برابر است با:

$$P = V_{eff}I_{eff}\cos(\theta - \phi)$$

شابه با روشی که در تعریف فیزورها داشتیم برای کمیت مختلط از فرمول اولر استفاده ی‌کنیم. P به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P = V_{eff}I_{eff}\text{Re}\{e^{j(\theta - \phi)}\}$$

$$P = \text{Re}\{V_{eff}e^{j\theta}I_{eff}e^{-j\phi}\}$$

دو فاکتور اول در کروشه معادله فوق فیزور ولتاژ، ولی دو فاکتور دوم به دلیل وجود علامت منفی در زاویه به فیزور جریان تعلق ندارد. این علامت در فیزور جریان وجود ندارد. یعنی فیزور جریان عبارت‌است‌از:

$$\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}e^{j\phi}$$

بنابراین از مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{I}^*_{eff} = I_{eff}e^{-j\phi}$$

به این ترتیب:

$$P = \text{Re}\{\mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff}\}$$

اکنون توان مختلط S را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff} \qquad (۲۵)$$

اگر ابتدا فرم قطبی یا نمایی توان مختلط را بررسی کنیم:

$$\mathbf{S} = V_{eff}I_{eff}e^{j(\theta - \phi)}$$

واضح است که اندازه S، یعنی $V_{eff}I_{eff}$ همان توان ظاهری و زاویه S، یعنی $(\theta - \phi)$ نیز زاویه PF است (زاویه‌ای که ولتاژ از جریان پیش است).

در فرم قائم یا دکارتی داریم:

$$\mathbf{S} = P + jQ \qquad (۲۶)$$

که P مثل قبل توان متوسط است. بخش موهومی توان با Q نشان داده شده است و به آن توان رآکتیو می‌گویند. ابعاد Q مثل توان حقیقی P، توان مختلط S، و توان ظاهری $|S|$ است. برای پرهیز از هر گونه اشتباه با دیگر کمیت‌ها واحد Q را به صورت ولت آمپر رآکتیو (VAR) تعریف می‌کنیم. از معادلات (۲۵) و (۲۶) دیده می‌شود که:

$$Q = V_{eff}I_{eff}\sin(\theta - \phi) \qquad (۲۷)$$

تفسیر فیزیکی توان رآکتیو، تغییر زمانی مبادله انرژی بین منبع (مثل شرکت برق) و عناصر بار رآکتیو است (یعنی خازن‌ها و القاگرها). این عناصر به تناوب شارژ و دشارژ می‌شوند و باعث می‌شود به ترتیب جریان از منبع و به منبع جاری شود.

کمیت‌های فوق در جدول ۱-۱۱ برای سهولت کار جمع‌آوری شده‌اند.

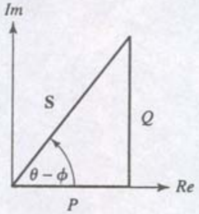
علامت توان رآکتیو طبیعت بار غیرفعال مربوط به $\mathbf{V}_{eff}$ و $\mathbf{I}_{eff}$ را نشان می‌دهد. اگر بار القایی باشد آن‌گاه $(\theta - \phi)$ زاویه‌ای بین 0 و $90°$ است. سینوس این زاویه مثبت و توان رآکتیو نیز مثبت می‌باشد. توان رآکتیو بار خازن منفی است.

جدول ۱-۱۱ خلاصه کمیت‌های مرتبط با توان مختلط.

کمیت	نماد	فرمول	واحدها
توان متوسط	P	$V_{eff}I_{eff}\cos(\theta - \phi)$	وات (W)
توان رآکتیو	Q	$V_{eff}I_{eff}\sin(\theta - \phi)$	ولت-آمپر-رآکتیو (VAR)
توان مختلط	$\mathbf{S}$	$P + jQ$	
		$V_{eff}I_{eff}\angle\theta - \phi$	ولت-آمپر (VA)
		$\mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff}$	
توان ظاهری	$\|S\|$	$V_{eff}I_{eff}$	ولت-آمپر (VA)

مثلث توان

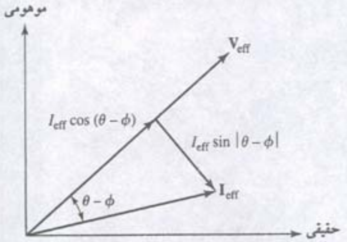
نمایش گرافیکی به‌کاررفته برای توان مختلط را **مثلث توان** می‌گویند و در شکل ۱۶-۱۱ دیده می‌شود. نمودار نشان می‌دهد که فقط دو توان از سه توان همیشه مورد نیاز است و سومی را می‌توان با روابط مثلثاتی معین کرد. اگر مثلث توان در نیمه اول محورها $(0 < \theta - \phi)$ باشد،



شکل ۱۶-۱۱ نمایش مثلث توان مختلط.

ضریب توان پسفاز است (مربوط به بار القایی خواهد بود) و اگر مثلث توان در ربع چهارم باشد $(0 > \theta - \phi)$، ضریب توان پیشفاز خواهد بود (مربوط به خازن). بنابراین مقدار قابل توجهی اطلاعات کیفی مربوط به بار با یک نظر در دسترس می‌باشد.

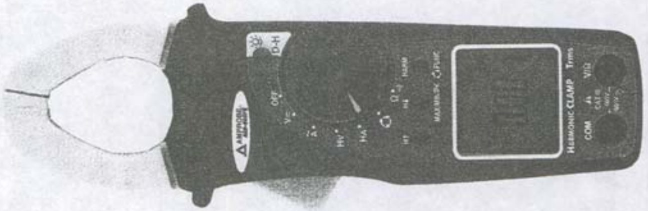
تفسیر دیگری از توان رآکتیو را با ساخت نمودار فیزوری $\mathbf{V}_{eff}$ و $\mathbf{I}_{eff}$ مطابق شکل ۱۷-۱۱ می‌توان ارائه نمود. اگر فیزور جریان به دو مولفه تجزیه شود، که یکی همفاز با ولتاژ و اندازه $I_{eff}\cos(\theta - \phi)$ و دیگری با اختلاف $90°$ نسبت به ولتاژ و اندازه $I_{eff}\sin|\theta - \phi|$، آن‌گاه واضح است که توان حقیقی حاصل‌ضرب دامنه فیزور ولتاژ در مولفه جریان همفاز با ولتاژاست. حاصل‌ضرب دامنه ولتاژ در مولفه‌ای از جریان که با ولتاژ $90°$ اختلاف‌فاز دارد توان رآکتیو نامیده‌می‌شود. مولفه‌ای از یک فیزور که با فیزور دیگر $90°$ اختلاف فاز دارد را مولفه عمودی گویند. بنابراین Q در واقع حاصل‌ضرب $\mathbf{V}_{eff}$ و مولفه عمودی $\mathbf{I}_{eff}$ است. Q را **توان عمودی** یا **ربعی** هم می‌خوانند.



شکل ۱۷-۱۱ فیزور جریان I_{eff} به دو مولفه تفکیک شده است. یکی همفاز با فیزور ولتاژ V_{eff} و دیگری با اختلاف فاز $90°$ با فیزور ولتاژ. این مولفه را مولفه عمودی می‌گویند.

اندازه گیری توان

یک وات‌متر توان حقیقی متوسط مصرفی بار P را می‌خواند، و وارمتر هم توان رآکتیو متوسط Q را که بار می‌کشد، نشان می‌دهد. می‌توان هر دو کمیت را به روشی مشابه پیدا کرد و می‌توان توان ظاهری و ضریب توان را هم اندازه گیری نمود (شکل ۱۸-۱۱).



شکل ۱۸-۱۱ یک توان‌سنج دیجیتال چنگکی ساخت Amprobe برای اندازه‌گیری جریان AC تا 400 A و ولتاژ تا 600 V.

کاربرد عملی

اصلاح ضریب توان

وقتی صورت‌حساب برق به وسیله کمپانی مولد برق به مشترکین بزرگ صنعتی داده می‌شود، کمپانی معمولاً ضریب PF را در صورت‌حساب مشتری قید می‌کند. تحت این وارده در مواردی که ضریب کمتر از مقدار معین باشد، که معمولاً پسفاز 0.85 است، جریمه‌ای به مشترک تعلق می‌گیرد. به دلیل طبیعت بارهای صنعتی، توان صنعتی مصرفی به ندرت PF پیشفاز است. دلایل متعددی برای جریمه فوق توسط کمپانی‌های تولیدکننده وجود دارد. اول این‌که قابلیت حمل جریان بیشتر در داخل ژنراتورها باید تعبیه شود تا جریان بیشتری را که مشتریان در PFهای پایین با ولتاژ و توان ثابت نیاز دارند تهیه نمایند. دلیل دیگر اتلاف بیشتر توان در سیستم انتقال و توزیع برق است.

در تلاشی برای کاهش اتلاف و تشویق مشتریان در کار با PFهای بالاتر، معمولاً جریمه‌هایی در حد $0.22/kVAR برای هر kVAR علاوه بر مقدار محاسبه‌شده درنظرگرفته می‌شود که 0.62 برابر متوسط توان موردتقاضا (دیماند) است:

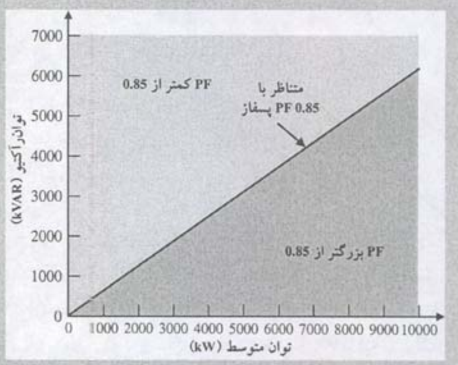
$$\mathbf{S} = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62)$$
$$= P(1.177\angle 31.8°)$$

این عدد برای PF=0.85 است و برابر است با $\cos 31.8° = 0.85$ که در آن Q مثبت می‌باشد (شکل ۱۹-۱۱). مشتریانی که زاویه PF آن‌ها بزرگ‌تر از این مقدار باشد مشمول جریمه‌اند.

تنظیم توان رآکتیو لازم معمولاً از طریق نصب تأسیسات خازنی جبران‌ساز در محل و موازی با بار (معمولاً در خارج امکانات مشتری) صورت می‌گیرد. می‌توان نشان داد که مقدار ظرفیت از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{P(\tan\theta_{old} - \tan\theta_{new})}{\omega V^2_{rms}} \qquad (۲۸)$$

که در آن ω همان فرکانس، θ_{old} همان زاویه PF فعلی، θ_{new}،



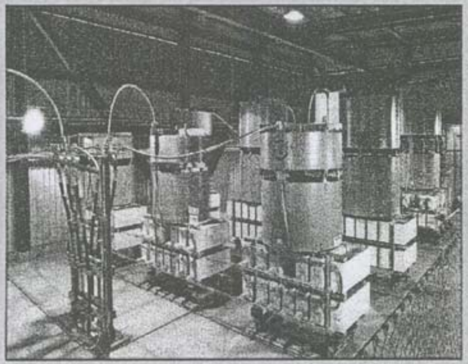
شکل ۱۹_۱۱ نموداری که نسبت توان رآکتیو را به توان متوسط برای ضریب توان 0.85 پسفاز نشان می‌دهد.

زاویه PF موردنظر است. در هر صورت به منظور سهولت بانک خازن جبران‌ساز با تغییر افزایشی خاصی برحسب واحدهای kVAR ساخته می‌شوند. مثالی از چنین تأسیسات در شکل ۲۰_۱۱ ملاحظه می‌گردد.

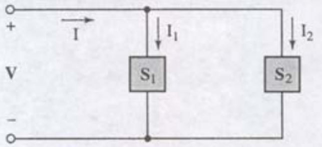
اکنون بیایید مثال خاصی را ملاحظه کنیم. یک مجموعه صنعتی دارای دیماند پیک ماهانه 5000 kW است و نیاز رآکتور آن نیز 6000 kVAR می‌باشد. با توجه به موارد فوق، هزینه سالانه این مشترک با احتساب جرائم PF چقدر است؟ اگر جبران از طریق هزینه $2390 در هر 1000 kVAR افزایش و $3130 به ازای هر 2000 kVAR افزایش یابد، بهترین راه حل اقتصادی برای این مشتری چیست؟

PF تأسیسات، زاویه توان مختلط S است، که در این‌جا $5000 + J6000$ kVAR می‌باشد. پس، زاویه برابر است با $\tan^{-1} 6000/5000 = 50.19°$ و PF برابر با 0.6ϕ پسفاز است. معیار توان رآکتیو محاسبه‌شده 0.62 ضربدر حداکثر دیماند برابر است با $0.62(5000) = 3100$ kVAR. بنابراین مجموعه صنعتی به میزان $6000 - 3100 = 2900$ kVAR توان رآکتیو بیشتری را نسبت به میزان مجاز معاف از جریمه کمپانی تولیدکننده، مصرف می‌نماید. این میزان معادل $12(2900)(0.22) = \$7656$ بیش از هزینه برق سالیانه می‌باشد.

اگر مشترک بخواهد تأسیسات را 1000 kVAR افزایش دهد (به قیمت $2390)، توان رآکتیو اضافی به $2900 - 1000 = 1900$ kVAR کاهش می‌یابد. بنابراین جریمه سالانه کنون $12(1900)(0.22) = \$5016$ خواهد شد پس هزینه سال جاری $\$5016 + \$2390 = \$7406$ می‌گردد و در واقع $250 صرفه‌جویی صورت می‌گیرد. اگر مشتری 2000 kVAR تأسیسات اضافه کند (به قیمت $3130)، توان رآکتیو مصرفی اضافی $2000 - 2900 = 900$ kVAR می‌باشد بنابراین جریمه سالانه کنون $12(900)(0.22) = \$2376$ خواهد شد. هزینه کل در سال اول $\$2376 + \$3130 = \$5506$ بوده و صرفه‌جویی آن $2150 خواهد شد. با این وجود، اگر مشتری 3000 kVAR تأسیسات خازنی اضافه کند در سال اول $14 صرفه‌جویی بیشتری نسبت به 2000 kVAR خواهد داشت.



شکل ۲۰_۱۱ تأسیسات خازنی جبران‌ساز.



شکل ۲۱_۱۱ مدار به‌کاررفته برای نشان‌دادن توان مختلط دریافتی به وسیله دو بار موازی که برابر با مجموع توان‌های مختلط آن‌ها است.

به سادگی می‌توان نشان داد که توان مختلط حمل‌شده به چند بار متصل به هم برابر با مجموع توان‌های مختلط داده‌شده به تک‌تک بارها است و به چگونگی اتصال آن‌ها ارتباطی ندارد. مثلاً دو بار موازی در شکل ۲۱_۱۱ را ملاحظه نمایید. اگر مقادیر rms درنظرگرفته شوند، توان مختلط حاصل از بار ترکیبی برابر است با:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2)$$

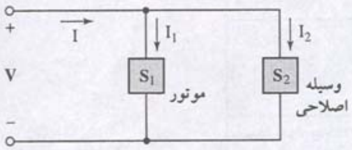
و بنابراین:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{V}\hat{\mathbf{I}}_2$$

مثال ۹_۱۱

یک مصرف‌کننده صنعتی یک موتور القایی 50kW (67.1hp) را با پسفاز PF = 0.8 به کارگرفته است. ولتاژ منبع 230 Vrms است. با هدف مصرف برق کمتر، مشتری مایل است PF خود را تا 0.95 پسفاز بالا ببرد. بهترین راه‌حل را ارائه کنید.

گرچه با افزایش توان حقیقی و ثابت نگه‌داشتن توان رآکتیو می‌توان PF را افزایش داد ولی این‌کار موجب کاهش صورت‌حساب نشده و مورد قبول مشتری نیست. باید بار رآکتیو خالصی به سیستم اضافه نمود. البته واضح است که این افزایش نیز باید موازی باشد، زیرا ولتاژ تحویلی به موتور نباید تغییر کند. لذا مدار شکل ۲۲_۱۱ در این‌جا قابل استفاده است به‌شرطی‌که $\mathbf{S}_1$ را توان مختلط موتور القایی و $\mathbf{S}_2$ را توان مختلط وسیله اصلاحی بدانیم.



شکل ۲۲_۱۱

توان مختلط تولیدی به موتور القایی باید بخش حقیقی 50kW و زاویه $\cos^{-1}(0.8)$ یا $36.9°$ را داشته باشد. پس:

$$\mathbf{S}_1 = \frac{50\angle 36.9°}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

برای دستیابی به $PF = 0.95$، توان مختلط کل باید چنین باشد:

$$\mathbf{S} = \frac{50}{0.95}\angle \cos^{-1}(0.95) = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

بنابراین توان مختلط مصرفی به وسیله بار اصلاحی برابر:

$$\mathbf{S}_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

است. بار امپدانسی $\mathbf{Z}_2$ را می‌توان طی چند گام ساده به‌دست‌آورد. ما زاویه $0°$ را برای منبع ولتاژ برمی‌گزینیم. بنابراین جریان کشیده شده به وسیله $\mathbf{Z}_2$ برابر است با:

$$\hat{\mathbf{I}}_2 = \frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}} = \frac{-j21{,}070}{230} = -j91.6\text{A}$$

یا

$$\mathbf{I}_2 = j91.6\text{A}$$

بنابراین:

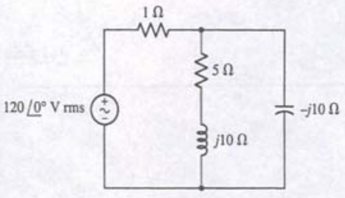
$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51\ \Omega$$

اگر فرکانس کاری 60Hz باشد، این بار به وسیله یک خازن $1056\mu F$ موازی با موتور قابل تهیه است. در هر صورت هزینه اولیه، نگهداری و استهلاک باید با کاهش صورت‌حساب الکتریسیته همخوانی داشته باشد.

تمرین

۹_۱۱ برای مدار شکل ۲۳_۱۱ توان مختلط جذب‌شده به‌وسیله (الف) مقاومت 1Ω، (ب) امپدانس $-j10\Omega$، (ج) امپدانس $5 + j10\Omega$ و (د) منبع، را به‌دست‌آورید.

جواب: $26.6 + j0$ VA؛ $0 - j1331$ VA؛ $532 + j1065$ VA و $-559 + j266$ VA.



شکل ۲۳_۱۱

۶_۱۱ مقایسه واژه‌های توان

در این فصل با آرایه‌ای از واژه‌های توان آشنا شدیم، بررسی همه آن‌ها به صورت یک‌جا بد نخواهد بود. توصیف خلاصه‌ای برای هر یک در جدول ۲_۱۱ آورده شده است.

جدول ۲ـ۱۱ خلاصه‌ای از واژه‌های به‌کاررفته.

عبارات به‌کاررفته	سمبل	واحد	توصیف
توان لحظه‌ای	$p(t)$	W	$p(t) = v(t)i(t)$. مقدار توان در لحظه خاصی از زمان است. این توان حاصل‌ضرب فیزوری ولتاژ و جریان نیست.
توان متوسط	P	W	در حالت ماندگار سینوسی، $P=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta-\phi)$، که θ زاویه ولتاژ و ϕ زاویه جریان است. رآکتانس در P نقشی ندارد.
مقدار موثر یا rms	V_{rms} یا I_{rms}	V یا A	مثلاً به صورت $I_{eff} = 1/T \int_0^T i^2\, dt$ تعریف می‌شود. اگر $i(t)$ سینوسی باشد، آن‌گاه $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$ خواهد بود.
توان ظاهری	$\lvert S \rvert$	VA	$\lvert S \rvert = V_{eff}I_{eff}$ بوده و حداکثر مقدار توان متوسط می‌تواند باشد. $P = \lvert S \rvert$ فقط برای بارهای خالص مقاومتی است.
ضریب توان	PF	ندارد	نسبت توان متوسط به ظاهری است. اگر بار از نوع مقاومتی خالص باشد $PF = 1$ است و برای بار رآکتیو خالص مقدار آن $PF = 0$ می‌باشد.
توان رآکتیو	Q	VAR	به معنی انرژی جاری‌شده به و از بار رآکتیو است.
توان مختلط	S	VA	کمیت مختلط مناسبی حاوی هر دو توان متوسط و توان رآکتیو (القایی) است. $Q : S = P + jQ$.

اهمیت عملی این عبارات جدید را با شرح وضعیت عملی زیر می‌توان نشان داد. ابتدا فرض کنید که یک ژنراتور سینوسی داریم که به وسیله ماشینی که خروجی‌اش گشتاور مکانیکی مانند توربین بخار، یک موتور الکتریکی یا یک موتور احتراقی است می‌چرخد. ژنر تور ولتاژ خروجی 200 Vrms را در فرکانس 60Hz تولید می‌کند. به علاوه فرض کنید که مشخصه ژنراتور به صورت حداکثر توان خروجی 1kW بیان شده باشد. بنابراین ژنراتور قادر خواهد بود جریان 5Arms را به یک بار مقاومتی انتقال دهد. با این وجود اگر باری با توان پسفاز 1kW و ضریب توان 0.5 به ژنراتور وصل شود، آن‌گاه جریان 10Arms لازم خواهد بود. با کاهش PF، جریان‌های بیشتر و بیشتری نیاز است تا به بار منتقل شده و عملکرد در 200V و 1kW ثابت نگه داشته شود. اگر ژنراتور ما طراحی خوبی داشته باشد تا جریان 5A را تأمین کند، آن‌گاه جریان‌های بالاتر اجازه عملکرد رضایت‌بخشی را نخواهند داد و از آن جمله موجب می‌گردند تا عایق‌های داخلی بیش از حد گرم شده و دود کنند.

مشخصات ژنراتور معمولاً برحسب توان ظاهری به ولت‌آمپر داده می‌شود. بنابراین، 1000VA در 200V به این معنی است که ژنراتور می‌تواند تا 5A را در آن ولتاژ تأمین کند. توانی که ژنراتور انتقال می‌دهد به بار بستگی داشته و در نهایت می‌تواند صفر باشد. توان ظاهری با جریان مشخص‌شده هنگام کار در ولتاژ ثابت معادل است.

تمرین

۱۱ـ۱۰ یک منبع 440 Vrms توانی را به بار $Z_L = 10 + j2\Omega$ از طریق یک خط انتقال با مقاومت 1.5Ω می‌فرستد. (الف) توان متوسط و ظاهری تحویلی به بار چقدر است. (ب) توان متوسط و ظاهری تلف‌شده در خط انتقال را به‌دست‌آورید. (ج) توان متوسط و ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است. (د) ضریب توان کار منبع را تعیین کنید.

جواب: 16.34 kW ، 2.131 kVA ، 2.131 kW ، 14.49 kVA ، 14.21 kW ، 16.59 kVA و 0.985 پسفاز.

۱۱ـ۷ خلاصه فصل و مرور

- توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله یک عنصر با عبارت $P(t) = v(t)i(t)$ داده می‌شود.
- توان متوسط داده‌شده به یک امپدانس از یک منبع سینوسی برابر $\frac{1}{2} V_mI_m \cos(\theta - \phi)$ است که θ برابر زاویه فاز ولتاژ و ϕ زاویه فاز جریان است.
- تنها بخش مقاومتی یک بار توان متوسط غیرصفر را مصرف می‌کند. توان متوسط انتقالی به بخش رآکتیو بار صفر است.
- حداکثر توان متوسط انتقالی تحت شرایط $Z_L = \dot{Z}_{th}$ اتفاق می‌افتد.
- مقدار موثر یا rms موج سینوسی از تقسیم دامنه بر $\sqrt{2}$ به‌دست‌می‌آید.
- ضریب توان (PF) یک بار نسبت توان متوسط تلف‌شده به توان ظاهری است.
- یک بار مقاومتی خالص ضریب توان واحد دارد. یک بار رآکتیو دارای ضریب توان صفر است.
- یک توان مختلط به صورت $S = P + jQ$ یا $S = V_{eff}\dot{I}_{eff}$ تعریف می‌شود. واحد اندازه‌گیری آن ولت ـ آمپر (VA) است.
- توان رآکتیو A بخش موهومی توان مختلط است و میزان انرژی جاری‌شده به و یا از بخش رآکتیو بار است. واحد اندازه‌گیری آن ولت ـ آمپر ـ رآکتیو (VAR) می‌باشد.
- خازن‌ها معمولاً برای اصلاح PF بارهای صنعتی به‌کارمی‌روند تا توان رآکتیو درخواستی از تولیدکننده کاهش یابد.

۱۱ـ۸ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems,* 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

Contemporary issues pertaining to ac power systems can be found in:

International Journal of Electrical Power & Energy Systems. Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979–. ISSN: 0142-0615.

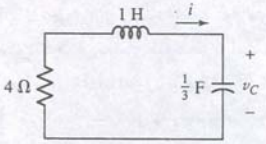
مسائل

۱۱ـ۱ توان لحظه‌ای

۱. یک منبع جریان، $i(t) = 2 \cos 500tA$، یک مقاومت 50Ω و یک خازن 25μF با هم موازی‌اند. توان تحویلی به وسیله منبع را مشخص نمایید، توان جذب‌شده به وسیله مقاومت، توان جذب‌شده به وسیله خازن را در $t = \frac{\pi}{2}ms$ به‌دست‌آورید.

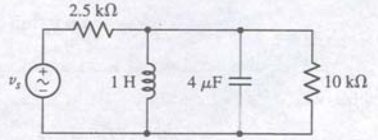
۲. جریان $i = 2t^2 - 1\ A$ در $1s \leq t \leq 3s$ در یک عنصر خاص جاری است. (الف) اگر عنصر یک القاگر 4H باشد، در فاصله زمانی داده‌شده چه انرژی به آن منتقل می‌گردد؟ (ب) اگر عنصر یک خازن 0.2F با $v(t) = 2V$ باشد، توان داده‌شده به آن در $t = 2s$ چقدر است؟

۳. در شکل ۲۴ـ۱۱، اگر $v_C(0) = -2V$ و $i(0) = 4A$ باشد، توان جذب‌شده به وسیله خازن در زمان t، (الف) 0^+، (ب) 0.2s و (ج) 0.4s چقدر است؟



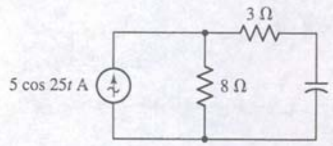
شکل ۲۴ـ۱۱

۴. توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۲۵ـ۱۱ را در $t = 0$ پیدا کنید. به‌شرطی‌که $v_s = 20\cos(1000t + 30)V$ باشد. جواب را با PSpice چک کنید.



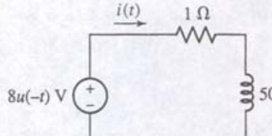
شکل ۲۵ـ۱۱

۵. مدار شکل ۱۱.۲۶ به حالت ماندگار رسیده است. توان جذب‌شده به وسیله هر چهار عنصر را در $t = 0.1s$ به‌دست‌آورید.



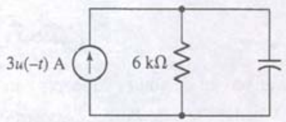
شکل ۱۱.۲۶

۶. مدار RL در شکل ۱۱.۲۷ را ملاحظه نمایید. توان جذب‌شده لحظه‌ای را به وسیله مقاومت در t (الف) برابر با 0^+، (ب) 1 s و (ج) 2 s به دست آورید.



شکل ۱۱.۲۷

۷. مدار RC شکل ۱۱.۲۸ را درنظربگیرید. توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله مقاومت را در t برابر با (الف) 0^+، (ب) 30 ms و (ج) 90 m معین کنید.



شکل ۱۱.۲۸

۸. اگر صاعقه‌ای از ابر به زمین را با جریان 30 kA برای 150 μs در نظر بگیریم، مطلوبست (الف) توان لحظه‌ای حمل‌شده به یک میله مسی با مقاومت 1.2 mΩ در زمان صاعقه و (ب) انرژی کل حمل‌شده به میله.

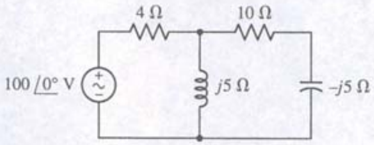
۹. یک خازن 100 mF مقدار 100 mJ انرژی را تا زمانی که یک هادی با مقاومت 1.2 Ω به دو سر پایانه‌های آن وصل نشده نگه می‌دارد. توان تلف‌شده لحظه‌ای در $t = 120$ ms چقدر است؟ به شرطی که ظرفیت گرمای ویژه هادی 0.9 kJ/kg.K و جرم آن 1 gr باشد، مطلوبست افزایش دمای هادی در ثانیه اول تخلیه خازن با فرض این‌که دمای همه عناصر در آغاز 23°C باشد.

۱۰. یک دیود نیمه هادی LED (نوری) با ولتاژ 2.76 V کار می‌کند و جریان 130 mA را می‌کشد. با چشم‌پوشی از ظرفیت داخلی، توان لحظه‌ای کشیده‌شده به وسیله LED، 2 ثانیه پس از روشن‌شدن چقدر است؟ اگر در عوض، آن را به یک منبع سینوسی با رابطه $v(t) = 2.76\cos(1000t)$ V وصل کنیم، چه اطلاعات دیگری لازم است تا توان لحظه‌ای در $t = 500$ ms محاسبه شود. وضعیت گذرا تا آن زمان از بین رفته فرض می‌شود.

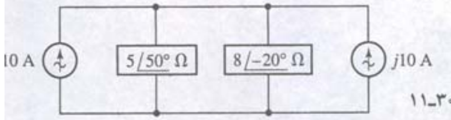
۱۱-۲ توان متوسط

۱۱. توان متوسط مصرف‌شده به وسیله هر یک از عناصر شکل ۱۱.۲۹ چقدر است.

۱۲. توان متوسط تولیدی به وسیله هر منبع و توان متوسط حمل‌شده به هر امپدانس در شکل ۱۱.۳۰ را پیداکنید.

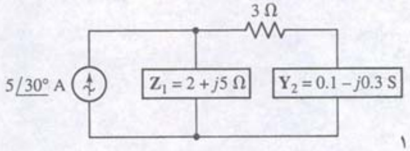


شکل ۱۱.۲۹



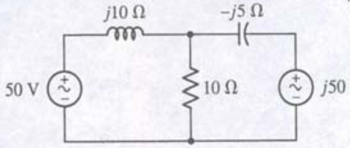
شکل ۱۱.۳۰

۱۳. در مدار شکل ۱۱.۳۱، توان متوسط، (الف) مصرفی در مقاومت 3Ω (ب) تولیدشده به وسیله منبع را بیابید.



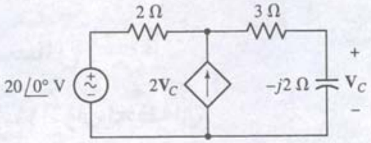
شکل ۱۱.۳۱

۱۴. توان متوسط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر شکل ۱۱.۳۲ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱.۳۲

۱۵. توان متوسط تولیدشده به وسیله منبع وابسته در مدار شکل ۱۱.۳۳ را به‌دست‌آورید.



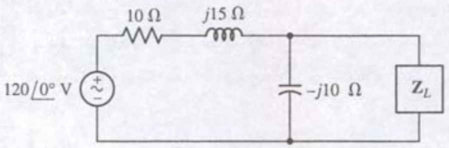
شکل ۱۱.۳۳

۱۶. یک مدار معادل تونن در حوزه فرکانس از یک منبع سینوسی V_{th} سری با امپدانس $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$ تشکیل شده است. شرایطی را مشخص کنید که در آن یک بار $Z_L = R_L + jX_L$ با شرط (الف) $X_L=0$، (ب) R_L و X_L مستقیماً انتخاب شوند، (ج) R_L ثابت (ولی نه مساوی R_{th}) باشد، (د) X_L (مستقل از X_{th}) و (ه) $X_L = 0$، حداکثر توان متوسط را جذب کند.

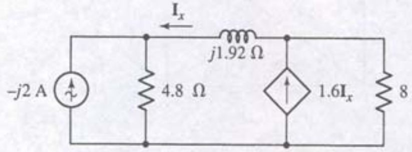
۱۷. برای مدار شکل ۱۱.۳۴، (الف) چه مقداری از Z_L حداکثر توان متوسط را جذب می‌کند. (ب) مقدار این توان ماکزیمم چقدر است؟

۱۸. برای مدار شکل ۱۱.۳۴ لازم است که بار R_L از نوع مقاومتی خالص باشد. چه مقدار از R_L حداکثر توان متوسط را جذب خواهد کرد و مقدار این توان چقدر است؟

۱۹. توان متوسط تولیدشده به وسیله منبع شکل ۱۱.۳۵ را پیداکنید.

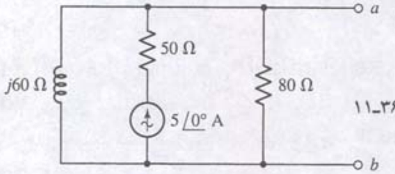


شکل ۱۱.۳۴



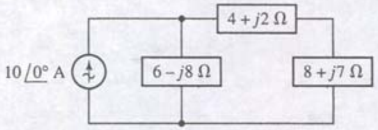
شکل ۱۱.۳۵

۲۰. برای شبکه شکل ۱۱.۳۶، (الف) امپدانس Z_L بین a و b چقدر باشد تا حداکثر توان متوسط به وسیله آن جذب شود؟ (ب) این توان متوسط حداکثر چقدر است؟



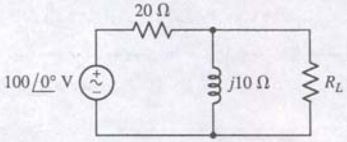
شکل ۱۱.۳۶

۲۱. توان متوسط حمل‌شده به هر جعبه در شبکه شکل ۱۱.۳۷ را پیداکنید، به‌شرطی‌که منبع $10\angle 0°$ A با $5\angle -30°$ A در فرکانس 50Hz جایگزین شود.



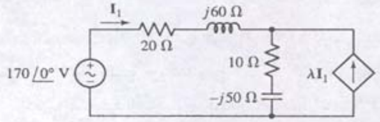
شکل ۱۱.۳۷

۲۲. مقدار R_L را در شکل ۱۱.۳۸ که توان حداکثر را جذب خواهد کرد، معین نمایید و مقدار توان را مشخص کنید.



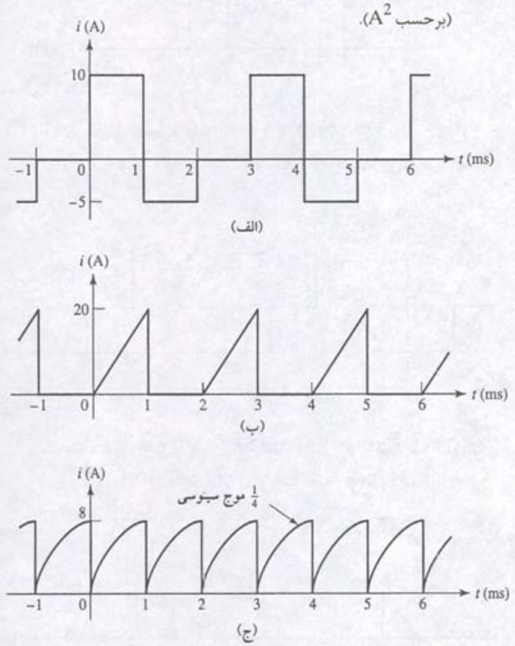
شکل ۱۱.۳۸

۲۳. توان متوسط حمل‌شده به هر مقاومت در شکل ۱۱.۳۹ را مشخص کنید به‌شرطی‌که (الف) $\lambda = 0$، (ب) $\lambda = 1$ باشد، و (ج) با فرض این‌که مدار در فرکانس 60Hz کار کند، پاسخ را با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱.۳۹

۲۴. (الف) مقدار متوسط هر یک از امواج شکل ۱۱.۴۰ را به‌دست‌آورید. (ب) اگر هر یک از این امواج مربع شوند، متوسط هر موج متناوب را پیداکنید (برحسب A^2).



شکل ۱۱.۴۰

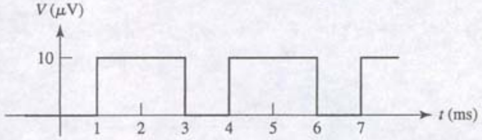
۲۵. توان متوسط حمل‌شده به هر عنصر مدار شکل ۱۱.۲۵ چقدر است، به‌شرطی‌که $v_s = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - 9°)$ V. صحت جواب را با PSpice آزمایش کنید.

۱۱-۳ مقادیر موثر ولتاژ و جریان

۲۶. مقدار موثر را برای موارد زیر به دست آورید: (الف) 12 cos(1000t)V، (ب) 12 sin(1000t)V، (ج) 12 cos(500t)V و (د) 12 cos(500t - 88°) V.

۲۷. مقادیر موثر را برای هر یک از موارد زیر به دست آورید: (الف) 10 cos(10t) A، (ب) 10 sin(10t) A، (ج) 2 cos(5t) A و (د) 2 cos(5t - 32°) A.

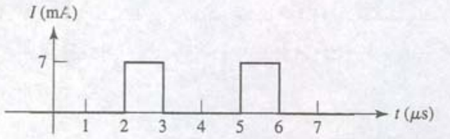
۲۸. مقدار موثر شکل موج ۱۱.۴۱ را به دست آورید.



شکل ۱۱.۴۱

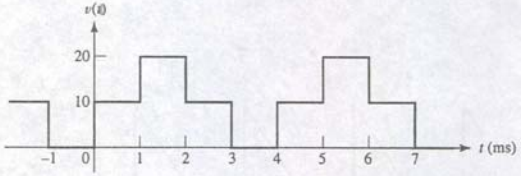
۲۹. مقدار موثر شکل موج ۱۱.۴۲ را به دست آورید.

۳۰. مقدار موثر (الف) 1 V، (ب) 1 + cos 10t V و (ج) 1 + cos(10t + 10°) V را به دست آورید.



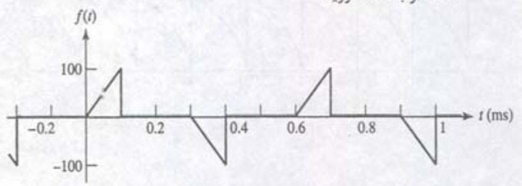
شکل ۱۱-۴۲

۳۱. مقدار موثر، (الف) $v(t) = 10 + 9\cos 100t + 6\sin 100t$ و (ب) برای موج شکل ۱۱-۴۳ به‌دست‌آورید. (ج) مقدار متوسط این موج را بیابید.



شکل ۱۱-۴۳

۳۲. مقدار موثر (الف) $g(t) = 2+3\cos100t+4\cos(100t-120°)$، (ب) $h(t) = 2+3\cos100t+4\cos(101t-120°)$ و (ج) شکل موج ۱۱-۴۴ را به‌دست‌آورید.



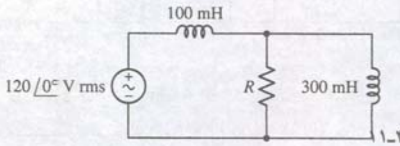
شکل ۱۱-۴۴

۳۳. با فرض موج $f(t) = (2 - 3\cos100t)^2$، مطلوبست مقدار متوسط آن و (ب) مقدار rms.

۳۴. مقدار موثر هر یک از سه موج شکل ۱۱-۴۰ را محاسبه کنید.

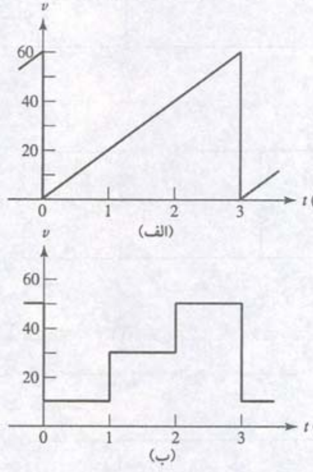
۳۵. چهار منبع ولتاژ ایده‌آل، $A\cos10t$، $B\sin(10t + 45°)$، $C\cos40t$ و ثابت D، به‌طور سری به مقاومت 4Ω وصلند. اگر (الف) $A = B = 10V$ و $C = D = 0$، (ب) $A = C = 10V$ و $B = D = 0$، (ج) $A = 10V$، $B = -10V$ و $C = D = 0$، (د) $A = B = C = 10V$ و $D=0$ و (ه) $A = B = C = D = 10V$ باشد. توان متوسط تلف‌شده را به‌دست‌آورید.

۳۶. (الف) چه مقداری از R موجب می‌شود تا ولتاژهای rms دو سر القاگر در شکل ۱۱-۴۵ برابر شوند؟ (ب) مقدار ولتاژ rms چقدر است؟ (ج) جواب خود را با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱-۴۵

۳۷. هر یک ز امواج شکل ۱۱-۴۶ دوره تناوب 3s دارد. آن‌ها تا حدودی به هم شبیه هستند. (الف) مقدار متوسط هر کدام را محاسبه کنید. (ب) دو مقدار موثر را معین نمایید. (ج) جواب خود را برای موج دندان‌اره‌ای با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱-۴۶

۳۸. القاگر 10mH شکل ۱۱-۴۵ را با خازن 1μF و القاگر 300mH را با خازن 3μF جایگزین نمایید. (الف) چه مقداری از R می‌تواند جریان‌های rms را در خازن‌ها برابر کند؟ (ب) مقدار جریان rms چقدر است؟ (ج) با PSpice آن را آزمایش کنید.

۳۹. شکل موجی دارای تناوب 5s بوده و در فاصله $0 < t < 5s$ به صورت زیر بیان شده است:

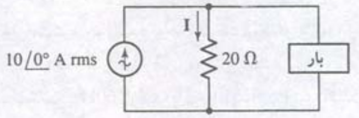
$$v(t) = 10t[u(t) - u(t - 2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t - 3) - t(t-5)]\ V$$

مقدار موثر جریان را به‌دست‌آورید.

۴۰. ترکیب سری مقاومت 1kΩ و القاگر 2H نباید توانی بیش از 250mW در هر لحظه تلف کند. اگر جریان سینوسی و $\omega = 500rad/s$ باشد، بزرگ‌ترین جریان rms قابل تحمل چقدر است؟

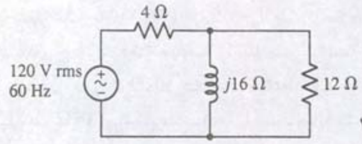
۱۱-۴ توان ظاهری و ضریب توان

۴۱. در شکل ۱۱-۴۷، اگر $I = 4\angle 35°\ A$ باشد، توان متوسط (الف) منبع (ب) مصرف در مقاومت 20Ω، (ج) به بار را بیابید. توان ظاهری در (د) منبع، (ه) مقاومت 20Ω، (و) به بار را پیداکنید. (ز) PF بار چند است.



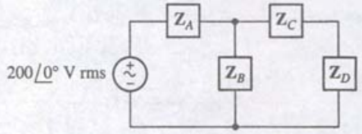
شکل ۱۱-۴۷

۴۲. (الف) ضریب توان منبعی که در شکل ۱۱-۴۸ کار می‌کند را بیابید. (ب) توان متوسط تولیدی به وسیله منبع را مشخص کنید. (ج) چه خازنی باید موازی با منبع نصب شود تا ضریب واحد گردد. (د) جواب را با PSpice آزمایش کنید.



شکل ۱۱-۴۸

۴۳. در مدار شکل ۱۱-۴۹، اگر $Z_A = 5 + j2\Omega$ و $Z_B = 20 + j10\Omega$، $Z_C = 10\angle 30°\ \Omega$ و $Z_D = 10\angle -62°\ \Omega$ باشد. توان ظاهری حمل‌شده به هر بار و تولیدی توسط هر منبع را مشخص نمایید.



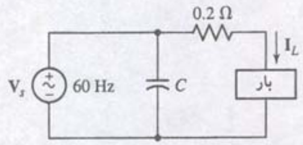
شکل ۱۱-۴۹

۴۴. شبکه‌ای را مجسم کنید که در $f = 50\ Hz$ کار کرده و به طور سری به بارهایی وصل و جریان $10\angle 0°\ A$ rms از آن‌ها می‌گذرد. چنین مداری دوگان بارهای موازی و ولتاژ مشترک است. در سیستم سری، اگر بار را اتصال کوتاه کنیم، بار خاموش می‌شود. این کار موجب آتش‌سوزی می‌گردد. در این سیستم خاص دو بار وجود دارد، $Z_1 = 30\angle 15°\ \Omega$ و $Z_2 = 40\angle 40°\ \Omega$. منبع در چه PF کار می‌کند. (ج) چه خازنی باید مدار سری شود تا ضریب توان پسفاز 0.9 به‌دست‌آید.

۱۱-۵ توان مختلط

۴۵. یک بار مرکب متشکل از سه بار به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند. یکی از آن‌ها 100W با ضریب $PF = 0.92$ پسفاز، دیگری 250W در $PF = 0.8$ پسفاز و سومی 150W در $PF = 1$ می‌کشد. بارهای موازی با یک منبع سری V_s که مقاومتی 10Ω دارد تغذیه می‌شوند. همه بارها باید در 115 V rms کار کنند. مطلوبست (الف) جریان rms در منبع (ب) PF بار ترکیبی.

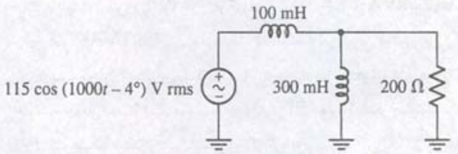
۴۶. بار در شکل ۱۱-۵۰، 10 kVA را در $PF = 0.8$ پسفاز مصرف می‌کند. اگر $|I_L| = 40$ A rms باشد. مقدار C چقدر باشد تا سبب شود که منبع در $PF = 0.9$ کار کند؟



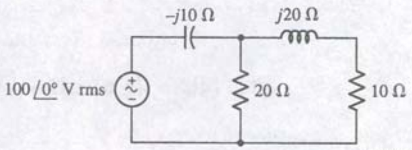
شکل ۱۱-۵۰

۴۷. مدار شکل ۱۱-۵۱ را درنظربگیرید. مقدار ظرفیت لازم برای افزایش PF به 0.92 پسفاز را به‌دست‌آورید، به‌شرطی‌که ظرفیت به‌طور (الف) سری با القاگر 100 mH وصل شود. (ب) موازی با القاگر 100 mH وصل گردد. جواب بخش‌های (الف) و (ب) را با PSpice چک کنید.

۴۸. مدار شکل ۱۱-۵۲ را برای یافتن توان مختلط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر مدار تحلیل کنید.

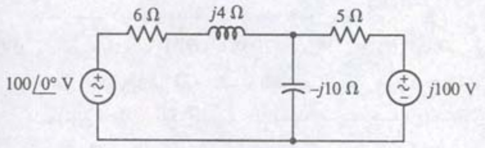


شکل ۱۱-۵۱



شکل ۱۱-۵۲

۴۹. هر دو منبع شکل ۱۱-۵۳ در فرکانس یکسانی کار می‌کنند. توان مختلط تولیدی به وسیله هر منبع را به‌دست‌آورید. توان مختلط مصرفی به وسیله هر عنصر غیرفعال مدار را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱-۵۳

۵۰. توان مختلط حمل‌شده به یک بار، (الف) 500VA در $PF = 0.75$ پسفاز (ب) 500W در $PF = 0.75$ پیشفاز، (ج) -500VAR در $PF = 0.75$ را محاسبه کنید.

۵۱. یک امپدانس خازنی $Z_C = -j120\Omega$ موازی با یک بار Z_L وجود دارد. ترکیب موازی به وسیله یک منبع $V_s = 400\angle 0°$ Vrms تغذیه می‌شود. این منبع توان 1.6 + 0.5 kVA را تولید می‌نماید. (الف) توان مختلط داده‌شده به Z_L چقدر است؟ (ب) PF مربوط به Z_L چقدر است. (ج) PF مربوط به منبع چیست؟

۵۲. یک منبع 230 V rms سه بار موازی را تغذیه می‌کند، در $PF = 0.8$ پسفاز، 1.2 kVA، در $PF = 0.9$ پسفاز 1.6 kVA و 900W در $PF = 1$ است. مطلوبست (الف) دامنه جریان (ب) PF مربوط به حالت کار منبع. (ج) توان مختلط پوشش‌داده‌شده به وسیله منبع.

۵۳. یک سیستم 250V rms سه بار موازی را تغذیه می‌کند. یکی از آن‌ها 20 kW را در ضریب توان واحد، دومی 25 kVA را در ضریب توان $PF = 0.8$ پسفاز، و سومی توان 30kW را در $PF = 0.75$ پسفاز مصرف می‌کند. (الف) کل توان تولیدی به وسیله منبع را به‌دست‌آورید. (ب) کل توان ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است؟ (ج) در چه PF منبع کار می‌کند.

۵۴. مصرف‌کننده‌ای دارای دیماند حداکثر ماهانه 200 kW و نیاز رآکتیوی 280 kVAR است. در تلاشی برای مقابله با اتلاف، تولیدکننده‌ای سعی

دارد تا مشتریانش در PF بالا کار کنند و لذا جریمه $0.22/kVAR را برای هر kVAR اضافی به صورت 0.65 ضربدر توان متوسط پیک (ماکزیمم مجاز) اعمال می‌کند. (الف) با توجه به مطلب فوق، هزینه سالانه جریمه چقدر است؟ (ب) سیاست جریمه PF تولیدکننده چقدر است؟ (ج) اگر بخواهیم جبران‌سازی بگذاریم و هزینه آن $200 در هر 100 kVAR باشد بهترین و اقتصادی‌ترین حل برای مشتری چیست؟ (د) مقدار واقعی ظرفیت برای اصلاح ضریب توان چیست؟

۵۵. معادله (۲۸) را به‌دست‌آورید.

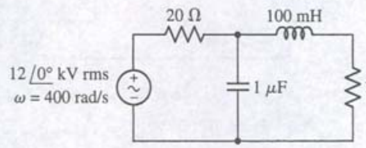
۱۱-۶ مقایسه واژه‌های توان

۵۶. یک منبع ولتاژ $339\cos(100\pi t - 66°)$ V به یک بار خالص مقاومتی 1kΩ وصل است. (الف) ولتاژ موثر منبع چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چقدر است؟ (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد؟ (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع را به‌دست‌آورید. (ه) توان رآکتیو حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

۵۷. یک منبع ولتاژ $v_s(t) = 339\cos(100\pi t - 66°)$ V به یک بار خالص القایی 150mH وصل است. (الف) جریان موثر در مدار چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چند است (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد. (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (ه) توان رآکتیو حمل‌شده از منبع چند است. (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

۵۸. در مدار شکل ۱۱-۲۵، $v_s = 5\cos t$ V است. (الف) حداکثر توان لحظه‌ای حمل‌شده به مقاومت 10kΩ چیست؟ (ب) توان رآکتیو حمل‌شده به مقاومت 10kΩ چند است. (ج) توان ظاهری حمل‌شده به مقاومت 10kΩ چه می‌باشد. (د) توان مختلط اخذشده از منبع را به‌دست‌آورید.

۵۹. (الف) توان مختلط حداکثر به هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۵۴ را به‌دست‌آورید. (ب) نشان دهید که مجموع این مقادیر برابر با مقدار توان مختلط حاصل از منبع است. (ج) آیا این نتیجه برای توان ظاهری هم صحیح است. (د) توان متوسط حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است. توان رآکتیو حاصل از منبع چند است.



شکل ۱۱-۵۴

۶۰. باری در 2300 Vrms مقدار 28 A rms با ضریب توان 0.812 پسفاز را می‌کشد. مطلوبست (الف) جریان حداکثر برحسب آمپر؟ (ب) توان لحظه‌ای در t = 2.5ms با فرض فرکانس 60Hz؟ (ج) توان حقیقی دریافتی به وسیله بار؟ (د) توان مختلط؟ (ه) توان ظاهری (و) امپدانس بار و (ز) توان رآکتیو.

فصل دوازدهم

مدارهای چند فاز

مفاهیم کلیدی

- سیستم‌های قدرت تک‌فاز
- سیستم‌های قدرت سه‌فاز
- منابع سه فاز
- ولتاژ خط در برابر فاز
- جریان خط در برابر فاز
- شبکه‌های اتصال ـ Y
- شبکه‌های اتصال ـ Δ
- بارهای بالانس
- تحلیل بر فاز
- اندازه‌گیری قدرت در سیستم‌های سه فاز

مقدمه

شرکت‌های تولید کننده برق به مشتریان خانگی و صنعتی، الکتریسیته را به فرم ولتاژها و جریان‌های سینوسی ارائه می‌کنند و به آن جریان (ac) می‌گویند. بسیاری از مناطق مسکونی در مریکای شمالی موج سینوسی را در فرکانس 60 Hz و ولتاژ rms تقریباً 120 V دریافت می‌نمایند. در دیگر نقاط جهان الکتریسیته در 50 Hz و ولتاژ rms تقریباً 240 V اخذ می‌شود. در آغاز کمپانی‌های تولید کننده به وسیله توماس ادیسون[1] به توزیع توان از طریق شبکه‌های dc توصیه شده بودند. ولی نیکلا تسلا[2] و جورج وستینگهاوس[3] دو دانشمند صاحب‌نظر دیگر در زمینه الکتریسیته، به شدت از به‌کارگیری ac حمایت نمودند. بالاخره نظر این دو نفر پذیرفته شد.

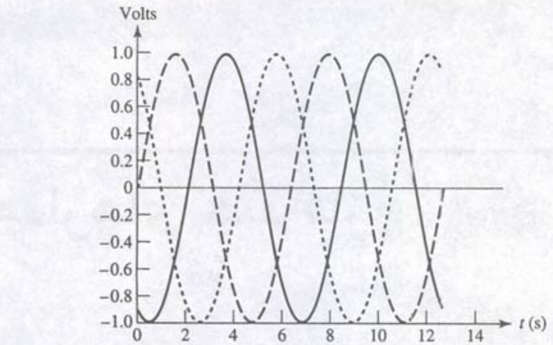
پاسخ گذرای سیستم‌های قدرت ac در تعیین دیماند یا تقاضای توان حداکثر مورد توجه‌اند، زیرا اغلب تجهیزات به‌هنگام شروع نسبت به حالت کار مداوم جریان بیشتری را لازم دارند. با این وجود در بسیاری از موارد عملکرد حالت ماندگار مورد توجه عمده می‌باشد و بنابراین تجربه ما بر تحلیل مبتنی‌بر فیزور، مفیدتر خواهد بود. در این‌جا با نوع جدیدی از منبع ولتاژ آشنا می‌شویم که منبع سه‌فاز نام دارد و می‌تواند با آرایش سه سیم Δ یا چهار سیم Y اتصال یابد. به‌طور مشابه خواهیم دید که بار نیز می‌تواند بسته به کاربرد به صورت هر یک از اتصالات Δ یا Y در شبکه قرار گیرد.

ولتاژ وسایل خانگی معمولاً 120 Vrms است، ولی گاهی 110 V یا 115 V (rms) هم مشخص می‌شود.

۱۲-۱ سیستم‌های چند فاز

تاکنون هر وقت جمله "منبع سینوسی" را به کار بردیم، تصویری از یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی با دامنه، فرکانس و فاز خاص به نظر آمده است. در این فصل، منابع چند فاز را معرفی خواهیم کرد و به‌خصوص بر سیستم‌های سه‌فاز تکیه می‌کنیم. تولید توان سه‌فاز با ژنراتورهای دوار نسبت به تولید تک‌فاز مزایای بیشماری دارد و نیز در انتقال توان هم انتقال سه‌فاز از لحاظ اقتصادی ترجیح داده می‌شود. گرچه بسیاری از تجهیزات مورد استفاده تک‌فاز هستند ولی تجهیزات سه‌فاز خصوصاً در محیط‌های صنعتی ناآشنا نیستند. موتورهای به‌کار رفته در سیستم‌های برودتی و ماشین ابزار اغلب به صورت

1. Thomas Edison 2. Nikola Tesla
3. George Westinghouse



شکل ۱ـ۱۲ مثالی از مجموعه سه‌فاز، که هر یک $120°$ نسبت به دیگری اختلاف فاز دارد. خواهیم دید که در هر لحظه فقط یکی از ولتاژها ممکن است صفر باشد.

سه‌فاز سیم‌پیچی می‌شوند. در دیگر کاربردهای باقیمانده خواهیم دید که اگر با سیستم‌های چند فاز آشنا باشیم، برای تهیه توان تک‌فاز کافی است به یکی از پاهای سیستم چند فاز اتصالی ساده ایجاد شود.

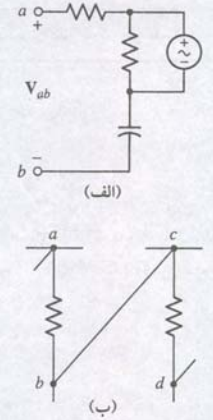
بیایید تا به یک سیستم چند فاز رایج، یعنی سیستم سه‌فاز متعادل یا بالانس نگاهی مختصر بیندازیم. منبع سه پایانه دارد (بدون احتساب اتصال زمین یا نول) اندازه‌گیری با ولت‌متر نشان می‌دهد که دامنه ولتاژ بین هر دو پایانه با یکدیگر برابر است. با این وجود این ولتاژها با یکدیگر همفاز نیستند و هر یک از سه ولتاژ، $120°$ اختلاف فاز با دیگری دارد. علامت فاز به جهت ولتاژها بستگی دارد. نمونه‌ای از این مجموعه در شکل ۱ـ۱۲ ملاحظه می‌گردد. هر بار متعادل توان یکسانی را از هر سه فاز می‌کشد، ولی وقتی یکی از ولتاژها برای یک لحظه صفر شود دو فاز دیگر باید نصف دامنه ماکزیمم خود را داشته باشند. **هیچ‌گاه توان لحظه‌ای دریافتی به وسیله بار کل به صفر نمی‌رسد، درواقع توان لحظه‌ای کل ثابت است.** این، یکی از مزایا برای ماشین‌های دوّار است زیرا گشتاور وارد بر روتور تقریباً ثابت خواهد بود و نسبت به حالتی که منبع تک‌فاز باشد وضعیت ثابت‌تری حاکم و لذا ارتعاش و لرزش ماشین کمتر می‌شود.

تعداد فاز بیشتر، مثل سیستم‌های 6 و 12 فاز، تقریباً در تهیه توان برای یکسوسازهای بزرگ کاربرد دارند. یکسوسازها جریان متناوب را به مستقیم تبدیل کرده و اجازه عبور جریان را از یک جهت به بار ممکن می‌سازند و لذا علامت ولتاژ دو سر بار همیشه ثابت باقی می‌ماند. خروجی یکسوساز یک جریان مستقیم به‌علاوه مؤلفه‌های متناوبی به نام ریپل یا تموّج است که با افزایش فاز کاهش می‌یابد.

تقریباً بدون استثناء تمام سیستم‌های چند فاز در عمل حاوی منابعی هستند که به‌خوبی می‌توان آن‌ها را با منابع ولتاژ ایده‌آل و یا با منابع ولتاژ ایده‌آل سری با امپدانس داخلی کوچک جایگزین نمود، منابع جریان سه‌فاز بسیار نادرند.

علامت با دو زیرنویس

بهتر است ولتاژها و جریان‌های چند فاز را با **دو زیرنویس** نشان دهیم. با این نماد جریان یا ولتاژ، مانند V_{ab} یا I_{aA} مفهوم‌تر از نمایش ساده‌ای چون V_3 یا I_x می‌باشد. بنا به تعریف ولتاژ نقطه a نسبت به b برابر V_{ab} است. به همین دلیل در شکل ۲ـ۱۲ (الف) علامت مثبت در a قرار گرفته است. بنابراین زیرنویسی دوتایی را می‌توان **معادل** با جفت علامت مثبت – منفی دانست. استفاده همزمان از هر دو عمل اضافی است. مثلاً با توجه به شکل ۲ـ۱۲ (ب) می‌بینیم که $V_{ad} = V_{ab} + V_{cd}$ است. مزیت علامت دو زیرنویس بر قانون کیرشهف استوار است که



شکل ۲ـ۱۲ (الف) تعریف ولتاژ V_{ab}. (ب) $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V_{ab} + V_{cd}$.

می‌گوید اختلاف ولتاژ بین دو نقطه به مسیر انتخابی بین نقاط بستگی ندارد. بنابراین:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bd} = V_{ac} + V_{cd} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

در این روش می‌توان KVL را بدون توجه به شکل نوشت، حتی اگر نقطه یا زیرنویسی روی شکل علامت زده نشده باشد، می‌توان معادله صحیحی داشت. مثلاً می‌توان نوشت $V_{ad} = V_{ax} + V_{xd}$ که x هر نقطه موردنظر انتخابی است.

شکل ۳ـ۱۲ یکی از فرم‌های نمایش سیستم سه‌فاز ولتاژ را نشان می‌دهد. بگذارید فرض کنیم ولتاژهای V_{an}، V_{bn} و V_{cn} مطلوبند:

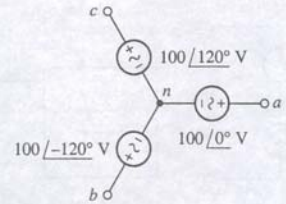
$$V_{an} = 100\angle 0°\ V$$
$$V_{bn} = 100\angle -120°\ V$$
$$V_{cn} = 100\angle -240°\ V$$

بنابراین با نگاهی به زیرنویس، ولتاژ V_{ab} را می‌توان پیدا کرد.

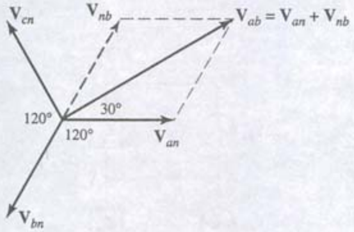
$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} \\ &= 100\angle 0° - 100\angle -120°\ V \\ &= 100 - (-50 - j86.6)\ V \\ &= 173.2\angle 30°\ V \end{aligned}$$

سه ولتاژ معلوم و راه به دست آوردن فیزور V_{ab} ساخته شده از آن‌ها در شکل ۴ـ۱۲ مشاهده می‌شود.

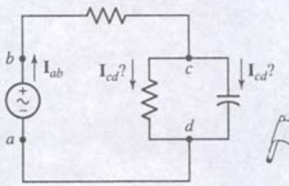
علامت دو زیرنویس (دواندیس) را می‌توان برای جریان هم به کار برد. جریان I_{ab} جریانی است که از a به b از مستقیم‌ترین مسیر ممکن جاری است. در هر مدار کاملی چنین می‌گوییم که باید حداقل دو مسیر ممکن بین نقاطی چون a و b وجود داشته باشد و قرار می‌گذاریم که از دو زیرنویس استفاده نکنیم، مگر این‌که به وضوح مسیر مستقیم‌تر یا کوتاه‌تری بین دو نقطه وجود داشته باشد. معمولاً این مسیر از یک عنصر ساده عبور می‌کند. بنابراین I_{ab} در شکل ۵ـ۱۲ درست نشان داده شده است. درواقع، برای نشان دادن این جریان به پیکان هم نیازی نیست، زیرنویس‌ها جهت را هم بیان می‌کنند. با این وجود در این شکل تعریف جریانی به نام I_{cd} مبهم است و موجب اشتباه خواهد شد.



شکل ۳ـ۱۲ شبکه به‌کاررفته به‌عنوان مثالی از علامت ولتاژ دو زیرنویسی.

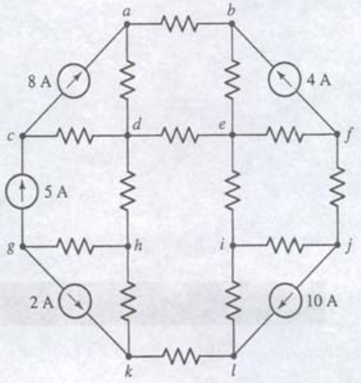


شکل ۴ـ۱۲ این نمودار فیزوری کاربرد گرافیکی قرارداد ولتاژ دو زیرنویسی را برای یافتن V_{ab} در شکل ۳ـ۱۲ نشان می‌دهد.



شکل ۵ـ۱۲ موردی که استفاده از نماد دو زیرنویس مشکل پیش می‌آورد.

تمرین



شکل ۶ـ۱۲

۱ـ۱۲ اگر $V_{ab} = 100\ \angle 0°\ V$، $V_{bd} = 40\ \angle 80°\ V$ و $V_{ca} = 70\ \angle 200°\ V$ باشد، مطلوب است:

(الف) V_{ad}، (ب) V_{bc}، (ج) V_{cd}

۲ـ۱۲ به شکل ۶ـ۱۲ توجه کنید. اگر $I_{fj} = 3A$، $I_{de} = 2A$ و $I_{hd} = -6A$ باشد، مطلوب است:

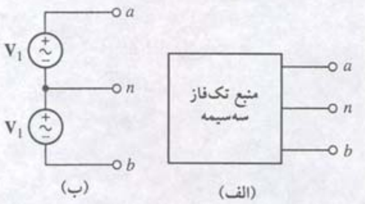
(الف) I_{cd}، (ب) I_{ef}، (ج) I_{ij}

جواب ۱ـ۱۲: $114.0\ \angle 20.2°\ V$ ، $41.8\ \angle 145.0°\ V$ ، $44.0\ \angle 20.6°\ V$

جواب ۲ـ۱۲: -3A ، 7A ، 7A

۲ـ۱۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

منبع تک‌فاز سه سیم به صورت منبعی تعریف می‌شود که دارای سه پایانه خروجی مانند a، n و b در شکل ۷ـ۱۲ (الف) است و در آن فیزور ولتاژ V_{an} و V_{nb} برابرند. بنابراین منبع را می‌توان به صورت ترکیبی از دو منبع ولتاژ یکسان نشان داد. در شکل ۷ـ۱۲ (ب)،



شکل ۷ـ۱۲ (الف) یک منبع تکفاز سه سیمه. (ب) نمایش منبع تکفاز سه سیمه با دو منبع ولتاژ مشابه.

$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_1$ است. واضح است که $\mathbf{V}_{ab} = 2\mathbf{V}_{an} = 2\mathbf{V}_{nb}$ است و بنابراین منبعی داریم که بار متصل به آن در هر یک از دو ولتاژ فوق کار می‌کند. سیستم معمول منازل سیستم تک‌فاز سه سیمه است و می‌توان هر دو نوع دستگاه 110 V و 220 V را تغذیه نمود. وسایل برقی ولتاژ بالاتر آن‌هایی هستند که مقدار بیشتری انرژی مصرف می‌کنند. کار در ولتاژ بالاتر جریان کمتری را در توان ثابت لازم خواهد داشت. بنابراین قطر سیم می‌تواند با امنیت کافی کمتر باشد. در سیستم توزیع منزل یا پست توزیع شرکت برق، قطر سیم‌ها باید بیشتر باشد تا گرمای کمتری در سیم‌ها تولید گردد.

به کارگیری نام **تک فاز** به این دلیل است که ولتاژهای $\mathbf{V}_{an}$ و $\mathbf{V}_{nb}$ مساویند و باید زاویه فاز برابری هم داشته باشند. با این حال، از دید دیگر، ولتاژهای بین سیم‌های بیرونی و سیم وسط که معمولاً سیم خنثی نامیده می‌شود، با یکدیگر 180° اختلاف فاز دارند، یعنی $\mathbf{V}_{an} = -\mathbf{V}_{bn}$ و $\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = 0$. بعداً خواهیم دید که سیستم‌های چندفازه متعادل یا بالانس هم، چند ولتاژ هم‌دامنه دارند که جمع فیزوری آن‌ها صفر است. از این دیدگاه سیستم تک‌فاز سه سیمه در واقع یک سیستم دو فاز بالانس است. با این وجود دو فاز جمله‌ای است که نسبتاً به سیستم‌های غیرمهم غیربالانسی که دو منبع با اختلاف فاز 90 دارند، اتلاق می‌گردد.

اکنون باید یک سیستم تک فاز سه سیم حاوی بارهای یکسان $\mathbf{Z}_p$ بین هر سیم خروجی و سیم خنثی را در نظر بگیریم (شکل ۱۲ـ۸). در آغاز فرض می‌کنیم که سیم‌های اتصال منبع به بار هادی‌های خوبی هستند. چون:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb}$$

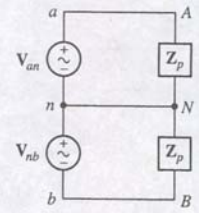
آنگاه

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{V}_{an} / \mathbf{Z}_p = \mathbf{I}_{Bb} = \mathbf{V}_{nb} / \mathbf{Z}_p$$

و بنابراین

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{Bb} - \mathbf{I}_{aA} = 0$$

بنابر ین جریانی در سیم خنثی وجود ندارد و می‌توان بدون هرگونه تغییر در جریان یا ولتاژ آن را حذف کرد.



شکل ۸ـ۱۲ یک سیستم تکفاز سه سیمه. دو بار یکسانند و جریان سیم خنثی صفر است.

اثر امپدانس غیرصفر یک سیم

اکنون تأثیر یک امپدانس غیرصفر در هر سیم را بررسی می‌کنیم. اگر خطوط aA و bB امپدانس‌های برابری داشته باشند می‌توان آن را به $\mathbf{Z}_p$ اضافه کرد و دو مرتبه دوبار یکسان حاصل می‌گردد و باز هم جریان سیم خنثی صفر است. حال تصور کنید که سیم خنثی کمی امپدانس مثل $\mathbf{Z}_n$ داشته باشد. بدون انجام تحلیل دقیق، اصل تجمیع نشان می‌دهد که تقارن موجب می‌شود تا باز هم جریان خنثی صفر باشد. از این گذشته اگر امپدانس مستقیمی بین دو خط خارجی وصل شود باز هم مدار متقارن خواهد بود و از سیم خنثی جریان نمی‌گذرد. بنابراین صفر بودن جریان در سیم خنثی نتیجه بالانس بودن بار است و امپدانس غیرصفر در سیم خنثی تقارن را از بین نمی‌برد.

به‌طور کلی اغلب سیستم‌های تک‌فاز سه سیمه متقارن نیستند. در این سیستم‌ها دوبار نامساوی بین دو سیم بیرونی و سیم خنثی، و یک امپدانس بین دو سیم بیرونی وصل می‌شود. امپدانس دو سیم بیرونی ممکن‌است مساوی تصور شوند ولی امپدانس سیم خنثی کمی بزرگتر از آن دو است. بگذارید مثالی از چنین سیستم را بررسی کنیم. خصوصاً به جریان موجود در سیم خنثی توجه بیشتری خواهیم نمود. همچنین راندمان انتقال نیرو به بار نامتعادل بررسی خواهد شد.

مثال ۱ـ۱۲

سیستم شکل ۹ـ۱۲ را تحلیل کنید و توان حمل شده به هر سه بار و توان تلف شده در سیم خنثی و هر دو خط را معین کنید.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

سه بار در مدار عبارتند از: مقاومت 50 Ω، مقاومت 100Ω و یک امپدانس 20 + J10 Ω هر یک از دو خط مقاومت 1 Ω و سیم خنثی مقاومت 3 Ω دارد. برای تعیین توان لازم، جریان در هر یک از آن‌ها معین شود.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

ما یک سیستم تک‌فاز سه سیمه داریم. نمودار جریان آن کاملاً علامت‌گذاری شده است. جریان‌های محاسبه شده به واحد rms هستند.

- **ارائه طرح.**

مدار را از راه مش حل می‌کنیم و در آن نیز سه حلقه قابل تعریف است. نتیجه تحلیل، تعدادی معادله برای جریان حلقه‌ها است که بعداً قابل استفاده در محاسبه توان است.

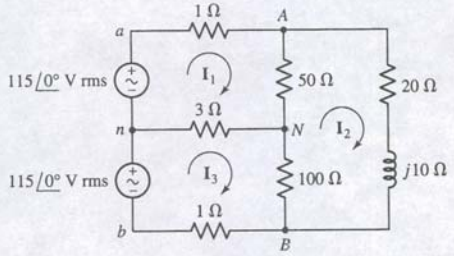
- **معادلات مناسب را بنویسید.**

سه معادله حلقه عبارتند از:

$$-115\angle 0^\circ + \mathbf{I}_1 + 50(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$
$$(20 + j10)\mathbf{I}_2 + 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 50(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$
$$-115\angle 0^\circ + 3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + 100(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_3 = 0$$

که با مرتب کردن آن‌ها سه معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{llll} 54\mathbf{I}_1 & -50\mathbf{I}_2 & -3\mathbf{I}_3 & = 115\angle 0^\circ \\ -50\mathbf{I}_1 & +(170 + j10)\mathbf{I}_2 & -100\mathbf{I}_3 & = 0 \\ -3\mathbf{I}_1 & -100\mathbf{I}_2 & +104\mathbf{I}_3 & = 115\angle 0^\circ \end{array}$$



شکل ۹ـ۱۲ یک سیستم نمونه تکفاز سه‌سیم.

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

ما مجموعه‌ای از سه معادله و سه مجهول داریم. بنابراین می‌توان برای حل آن اقدام کرد.

- **اقدام به حل.**

به کمک یک ماشین حساب $\mathbf{I}_1$، $\mathbf{I}_2$ و $\mathbf{I}_3$ را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{I}_1 = 11.24\angle -19.83^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 9.389\angle -24.47^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_3 = 10.37\angle -21.80^\circ \text{ A}$$

جریان در خطوط بیرونی عبارتنداز:

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_1 = 11.24\angle -19.83^\circ \text{ A}$$

و

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_3 = 10.37\angle 158.20^\circ \text{ A}$$

و جریان کوچکتر در سیم خنثی عبارت است از:

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 0.9459\angle -177.7^\circ \text{ A}$$

پس توان متوسط دریافتی به وسیله هر بار چنین تعیین می‌شود:

$$P_{50} = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2 (50) = 206 \text{ W}$$
$$P_{100} = |\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2|^2 (100) = 117 \text{ W}$$
$$P_{20+j10} = |\mathbf{I}_2|^2 (20) = 1763 \text{ W}$$

توجه کنید که ضریب $\frac{1}{2}$ لازم نیست چون جریان‌های rms را به‌کارمی‌بریم.

به این ترتیب توان بار کل برابر W 2086 است. تفاوت در هر خط برابر است با

$$P_{aA} = |\mathbf{I}_1|^2\,(1) = 126\ \text{W}$$

$$P_{bB} = |\mathbf{I}_3|^2\,(1) = 108\ \text{W}$$

$$P_{nN} = |\mathbf{I}_{nN}|^2\,(3) = 3\ \text{W}$$

که مجموعاً W 237 می‌باشد. پیدا است که این خطوط خیلی طویل‌اند وگرنه این توان نسبتاً زیاد دما را تا حد خطرناکی بالا می‌برد.

گرمای ناشی از دو لامپ 100W را درنظربگیرید. در دو سیم بیرونی در همین حدود توان مصرف می‌شود. برای پایین نگه‌داشتن دما باید سطح بزرگی فراهم شود.

■ صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

توان کل تولید شده برابر است با

$$206 + 117 + 1763 + 237 = 2323\ \text{W}$$

و می‌توان آن را با توجه به توان حمل‌شده به وسیله هر منبع ولتاژ چک کرد:

$$P_{an} = 115(11.24)\cos 19.83^\circ = 1216\ \text{W}$$

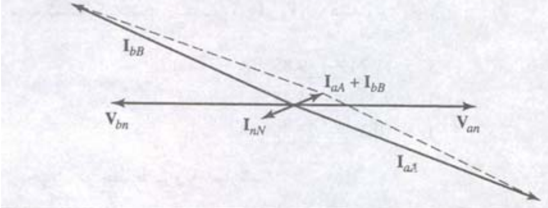
$$P_{bn} = 115(10.37)\cos 21.80^\circ = 1107\ \text{W}$$

که جمعاً همان W 2323 می‌باشد. بازده خط انتقال سیستم برابر است با:

$$\eta = \frac{\text{توان کل محل شده به بار}}{\text{کل توان مولد}} = \frac{2086}{2086 + 237} = 89.8\%$$

چنین بازدهی برای یک موتور بخار یا موتور احتراق داخلی عددی بالا است ولی برای یک سیستم توزیع خوب خیلی پایین است. اگر بخواهیم منبع و بار را به یکدیگر نزدیک کنیم، باید قطر سیم‌ها را افزایش دهیم.

نمایش فیزوری دو منبع ولتاژ، جریان در خطوط بیرونی و جریان سیم خنثی در شکل ۱۰-۱۲ نشان داده شده است. رابطه $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$ در نمودار مشخص شده است.



شکل ۱۰-۱۲ ولتاژ منابع و سه جریان در مدار شکل ۹-۱۲ روی نمودار فیزوری نشان داده شده‌اند. توجه کنید که

$$\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$$

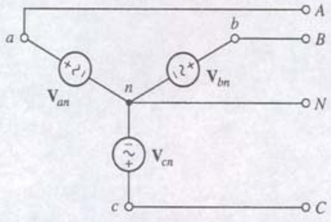
تمرین

۳-۱۲ با جمع مقاومت Ω 1.5 به هر یک از دو سیم بیرونی و Ω 2.5 به سیم خنثی، شکل ۹-۱۲ را تصحیح کنید. توان متوسط تحویلی به هر سه بار را مشخص نمایید.

جواب: W 153.1، W 95.8 و W 1374

۳-۱۲ اتصال سه فاز Y-Y

منبع سه فاز سه پایانه دارند، که به آن‌ها **پایانه‌های خط** می‌گویند و ممکن‌است خط چهارمی داشته و یا نداشته باشند. این منابع می‌توانند پایانه چهارمی هم به‌نام اتصال خنثی داشته و یا نداشته باشند. بحث را با سیستم سه‌فازی که اتصال خنثی دارد، شروع می‌کنیم. این سیستم ممکن‌است از سه منبع ولتاژ ابدا‌ً به صورت Y، شکل ۱۱-۱۲، به هم متصل شده باشد. هر چهار پایانه a، b، c و n در دسترس می‌باشند. ما تنها منابع سه‌فاز متعادل یا بالانس را مطالع خواهیم کرد که به فرم زیر تعریف می‌شوند.



شکل ۱۱-۱۲ منبع چهارسیم با اتصال Y.

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

ین سه ولتاژ که هر کدام بین یک خط و سیم خنثی برقرار است را **ولتاژهای فاز** می‌نامیم. به طور اختیاری $\mathbf{V}_{an}$ را به عنوان مرجع اختیار می‌کنیم، یعنی:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ$$

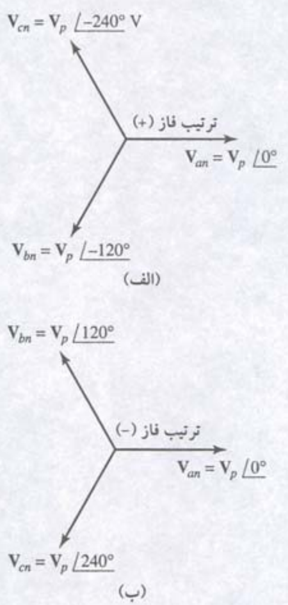
ما همواره از V_p برای نشان دادن دامنه rms هر یک از ولتاژهای فاز استفاده خواهیم کرد. پس منبع سه فاز چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120^\circ \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -240^\circ$$

یا

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\angle 120^\circ \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle 240^\circ$$

ولی را **ترتیب فاز مثبت** یا ترتیب فاز abc می‌گویند و در شکل ۱۲-۱۲(الف) نشان داده شده است. روابط بعدی را **ترتیب فاز منفی** یا cba می‌خوانند و در شکل ۱۲-۱۲(ب) ملاحظه می‌گردد. ترتیب واقعی فاز یک منبع سه فاز فیزیکی به این انتخاب اختیاری پایانه‌های a، b و c بستگی دارد. این انتخاب را می‌توان همیشه طوری برگزید که ترتیب فاز مثبت باشد و فرض می‌کنیم از این پس همین انتخاب در سیستم‌های مورد بررسی برقرار باشد.



شکل ۱۲-۱۲ (الف) ترتیب فاز مثبت یا abc. (ب) ترتیب فاز منفی یا cba.

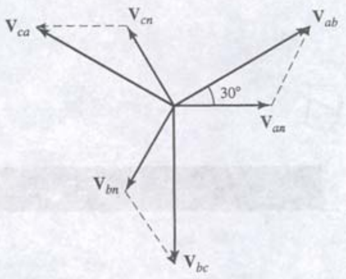
ولتاژهای خط به خط

حال بیایید ولتاژهای خط‌به‌خط (یا به طور خلاصه "ولتاژهای خط") را به دست آوریم. این ولتاژها هنگامی که ولتاژهای خط همچون شکل ۱۲-۱۲(الف) باشند، برقرارند. ساده‌ترین راه یافتن ولتاژهای خط استفاده از نمودار فیزور است زیرا زوایا همگی مضارب صحیحی از 30° هستند. نمودار مزبور در شکل ۱۳-۱۲ ترسیم شده و نتایج عبارتند از:

(۱) $$\boxed{\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ}$$

(۲) $$\boxed{\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ}$$

(۳) $$\boxed{\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210^\circ}$$



شکل ۱۳-۱۲ نمودار فیزوری به‌کاررفته برای یافتن ولتاژهای خط برحسب ولتاژهای فاز.

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} =$$
$$V_p\angle 0^\circ - V_p\angle -120^\circ =$$
$$V_p - V_p\cos(-120^\circ) - jV_p\sin(-120^\circ) =$$
$$V_p(1 + \tfrac{1}{2} + j\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ$$

طبق قانون کیرشهف مجموع ولتاژهای فوق صفر است. بد نیست خواننده این مطلب را تحقیق کند. اگر دامنه rms هر یک از این ولتاژهای خط را با V_L نشان دهیم، آنگاه یکی از مهمترین مشخصه‌های منبع سه فاز با اتصال Y را چنین می‌توان بیان کرد.

$$\boxed{V_L = \sqrt{3}V_p}$$

توجه کنید که با ترتیب فاز مثبت، $\mathbf{V}_{an}$ از $\mathbf{V}_{bn}$ و $\mathbf{V}_{bn}$ از $\mathbf{V}_{cn}$ هریک به اندازهٔ 120° از دیگری پیشفاز است و نیز $\mathbf{V}_{ab}$ از $\mathbf{V}_{bc}$ و $\mathbf{V}_{bc}$ از $\mathbf{V}_{ca}$ دوباره هر کدام 120° از دیگری پیشفاز است. اگر به جای پیشفاز از پسفاز استفاده کنیم، مطالب فوق برای ترتیب فاز منفی صحت خواهدداشت.

بگذارید یک بار متعادل سه فاز Y را به منبع وصل کنیم و برای این کار از سه خط و خط خنثی استفاده نماییم (شکل ۱۴ـ۱۲). بار بین هر خط و خط خنثی را با Z_p نشان می‌دهیم. جریان‌های این سه خط را به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد، زیرا در حقیقت سه مدار تک‌فاز داریم که یک سیم آن‌ها مشترک است.

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p}$$

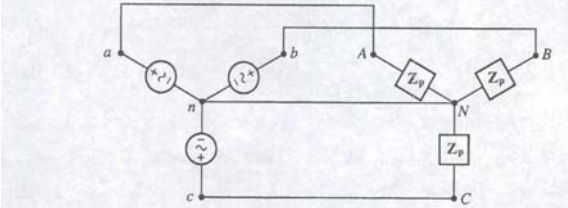
$$I_{bB} = \frac{V_{bn}}{Z_p} = \frac{V_{an}\angle -120^\circ}{Z_p} = I_{aA}\angle -120^\circ$$

$$I_{cC} = I_{aA}\angle -240^\circ$$

و بنابراین:

$$I_{Nn} = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0$$

بنابراین اگر منبع و بار متعادل باشند و اگر چهار سیم، امپدانس صفر داشته باشند، سیم خنثی جریانی را حمل نخواهد کرد. اگر در هر یک از سه خط، امپدانس Z_L را به صورت سری قرار دهیم و نیز امپدانس Z_n را در خط خنثی بگذاریم، آنگاه جریان سیم خنثی چه خواهد شد؟ واضح است که Z_Lها را می‌توان با امپدانس‌های بار ترکیب کرد. این بار حاصل همچنان متعادل می‌ماند و می‌توان سیم هادی خنثی را حذف نمود. بنابراین اگر با اتصال کوتاه یا بازکردن مدار بین n و N تغییری در سیستم به چشم نخورد، هر امپدانسی را می‌توان در سیم خنثی وارد کرد و جریان سیم خنثی در هر حال صفر باقی می‌ماند.

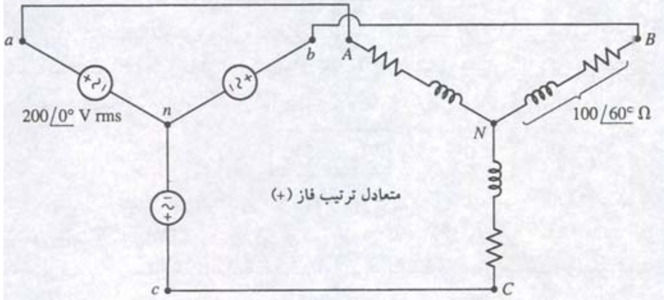


شکل ۱۴ـ۱۲ یک سیستم سه‌فاز بالانس با اتصال Y-Y و سیم خنثی.

پس اگر منبع و بارها متعادل باشند، سیم خنثی می‌تواند هر امپدانسی مثل اتصال کوتاه یا مدار باز داشته باشد. به هر حال این امپدانس هر چه باشد تأثیری بر ولتاژها و جریان‌های سیستم ندارد. اغلب بهتر است بین دو نقطهٔ خنثی را اتصال کوتاه تصور کرد، خواه واقعاً وجود داشته باشد یا نباشد. در این حال مسئله به سه مسئله تک‌فاز تبدیل می‌گردد و هر سه آن‌ها تنها در زاویه فاز با یک‌دیگر اختلاف دارند. در این حالت می‌گوییم مسئله را براساس "تک‌فاز" حل می‌کنیم.

مثال ۲ـ۱۲

برای مدار شکل ۱۵ـ۱۲، جریان‌ها و ولتاژهای مدار را پیداکنید و توان کل مصرفی دو بار را محاسبه نمایید.



شکل ۱۵ـ۱۲ یک سیستم سه‌فاز با اتصال سه‌سیم Y-Y.

چون ولتاژ یکی از فازهای منبع داده شده و نیز ترتیب فاز مثبت است، سه ولتاژ فاز عبارتند از:

$$V_{an} = 200\angle 0^\circ\ V \quad V_{bn} = 200\angle -120^\circ\ V \quad V_{cn} = 200\angle -240^\circ\ V$$

ولتاژ خط $200\sqrt{3} = 346\ V$ است. زاویه فاز هر ولتاژ خط را می‌توان با ایجاد نمودار فیزوری مثل شکل ۱۳ـ۱۲ معین کرد. درواقع، نمودار فیزوری شکل ۱۳ـ۱۲ این‌جا هم قابل اعمال است. آنگاه با استفاده از یک ماشین‌حساب یا معادلات (۱) تا (۳) خواهیم داشت:
$V_{ab} = 346\angle 30^\circ$ V، $V_{bc} = 346\angle -90^\circ$ V و $V_{ca} = 346\angle -210^\circ$ V.

بیایید با فاز A کار کنیم. جریان خط برابر است با:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = \frac{200\angle 0^\circ}{100\angle 60^\circ} = 2\angle -60^\circ\ A$$

چون می‌دانیم سیستم سه‌فاز بالانس است، می‌توان بقیه جریان‌های خط را براساس I_{aA} نوشت:

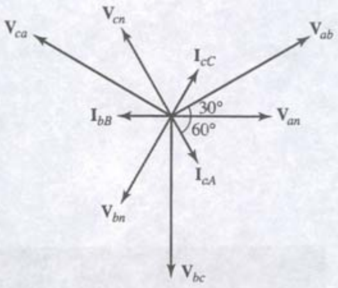
$$I_{bB} = 2\angle(-60^\circ - 120^\circ) = 2\angle -180^\circ\ A$$
$$I_{cC} = 2\angle(-60^\circ - 240^\circ) = 2\angle -300^\circ\ A$$

توان جذب شده به وسیله فاز A برابر است با

$$P_{AN} = 200(2)\cos(0^\circ + 60^\circ) = 200\ W$$

بنابراین توان جذب شده به وسیله بار سه فاز 600 W خواهد شد.

نمودار فیزوری این مدار در شکل ۱۶ـ۱۲ مشاهده می‌شود. به محض این‌که اندازه ولتاژ خط و یا جریان را بدانیم زوایای هر سه ولتاژ و هر سه جریان به سادگی با خواندن از روی نمودار تعیین خواهد شد.



شکل ۱۶ـ۱۲ نمودار فیزوری مدار شکل ۱۵ـ۱۲.

تمرین

۱۲ـ۴ یک سیستم سه فاز سه سیم به باری با اتصال Y وصل شده است، هر فاز شامل سه بار موازی است: $-J100\ \Omega$، $100\ \Omega$ و $50 + J50\ \Omega$. با فرض ترتیب فاز مثبت و $V_{ab} = 400\angle 0^\circ\ V$ مطلوب است: (الف) V_{an}، (ب) I_{aA} (ج) توان کل مصرفی در بار.

جواب: $231\angle -30^\circ$ V، $4.62\angle -30^\circ$ A و 3200 W

قبل از ارائه مثالی دیگر، فرصت خوبی است تا عبارت بخش ۱ـ۱۲ را بشکافیم. عبارت چنین بود که اگر حتی ولتاژها و جریان‌های فاز در هر لحظه خاصی از زمان صفر باشند (در شمال امریکا هر ۱/۱۲۰ ثانیه) توان لحظه‌ای حمل شده به کل بار هرگز صفر نیست. یک بار دیگر مثال ۲ـ۱۲ را ملاحظه کنید که در آن ولتاژ و جریان فاز در حوزه زمان نوشته شده است.

$$v_{AN} = 200\sqrt{2}\cos(120\pi t + 0^\circ)\ V$$

و

$$i_{AN} = 2\sqrt{2}\cos(120\pi t - 60^\circ)A$$

ضریب $\sqrt{2}$ برای تبدیل از واحد rms به‌کار رفته است.

بنابراین توان لحظه‌ای مصرفی در فاز A برابر است با:

$$\begin{aligned}P_A(t) = v_{AN} i_{AN} &= 800\cos(120\pi t)\cos(120\pi t - 60^\circ)\\ &= 400[\cos(-60^\circ) + \cos(240\pi t - 60^\circ)]\\ &= 200 + 400\cos(240\pi t - 60^\circ)\ W\end{aligned}$$

به طریق مشابه داریم:

$$P_B(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 300^\circ)\ W$$

و

$$P_C(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 180^\circ)\ W$$

توان لحظه‌ای جذب شده به وسیله کل بار برابر است با:

$$P(t) = P_A(t) + P_B(t) + P_C(t) = 600\ W$$

این توان مستقل از زمان بوده و مقدار آن همان توان متوسط در مثال ۲ـ۱۲ است.

مثال ۳ـ۱۲

یک سیم سه فاز متعادل یا بالانس با ولتاژ خط 300 V ، یک بار 1200 W با اتصال Y را در PF = 0.8 تغذیه می‌کند. جریان خط و امپدانس بار هر خط را معین کنید.

ولتاژ فاز $300/\sqrt{3}$ و توان هر فاز 1200 / 3 = 400 W می‌باشد. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_L)(0.8)$$

و بنابراین جریان هر فاز 2.89 A می‌باشد. امپدانس فاز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$|Z_P| = \frac{V_P}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\ \Omega$$

چون PF = 0.8 پیشفاز است، امپدانس زاویه -36.9° را دارد، پس $Z_P = 60\angle -36.9^\circ\ \Omega$ خواهد شد. بارهای پیچیده‌تر را هم به‌سادگی می‌توان بررسی کرد، چون مسائل مذکور به مسائل ساده‌تر تک‌فاز تبدیل می‌شوند.

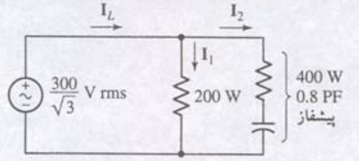
تمرین

۱۲ـ۵ یک سیستم سه فاز سه سیمه ولتاژ خط 500 V را دارد. دوبار با اتصال متعادل Y نیز به آن وصل است. یکی از آن‌ها بار خازنی با 7 - J2 Ω در هر فاز و دیگری القایی با 4 + J2 Ω در هر فاز می‌باشد. (الف) ولتاژ فاز را به دست آورید، (ب) جریان خط چقدر است؟، (ج) توان کل جذب شده به وسیله بار را معین نمایید، (د) ضریب توان هر منبع را پیداکنید.

جواب: 289 V، 97.5 A، 83.0 kW، 0.983 پسفاز

مثال ۴ـ۱۲

یک بار روشنایی متعادل 600 W به سیستم مثال ۳ـ۱۲ اضافه شده است. جریان خط جدید را به دست آورید.



شکل ۱۷ـ۱۲ مدار تکفازی که برای تحلیل یک مثال سه‌فاز بالانس به‌کاررفته است.

ابتدا مدار تک‌فاز مناسبی مثل شکل ۱۷ـ۱۲ می‌کشیم. فرض شده است که بار 600 W متعادل بوده و به طور مساوی بین سه فاز تقسیم شده باشد و بنابراین در هر فاز 200 W مصرف می‌شود. دامنه جریان روشنایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}}|I_1|\cos 0^\circ$$

بنابر این:

$$|I_1| = 1.155\ A$$

به همین ترتیب اندازه جریان بار خازنی با آن‌چه قبلاً دیدیم تفاوتی ندارد، زیرا ولتاژ دو سر آن ثابت باقی می‌ماند.

$$|I_2| = 2.89\ A$$

اگر فازی که با آن کار می‌کنیم زاویه 0° داشته باشد، آنگاه:

$$I_1 = 1.155\angle 0^\circ\ A \qquad I_2 = 2.89\angle +36.9^\circ\ A$$

و جریان خط برابر است با

$$I_L = I_1 + I_2 = 3.87\angle +26.6^\circ\ A$$

به‌علاوه، توان تولیدی در این فاز برابر است با

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}}\,3.87\cos(+26.6^\circ) = 600\ \Omega$$

که تهیه 200 W توان به‌وسیله هر خط بار روشنایی جدید و نیز 400 W برای بار اصلی را تأیید می‌کند.

تمرین

۱۲ـ۶ سه بار بالانس با اتصال Y روی یک سیستم سه‌فاز چهار سیمه نصب شده است. بار 1 کلاً 6 kW را در PF = 1 می‌کشد، بار 2 به 10 kVA در PF = 0.69 پسفاز نیاز دارد و بار 3 مقدار 7 kW را در PF = 0.85 پسفاز لازم دارد. اگر ولتاژ فاز در بارها 135 V و هر خط 0.1 Ω مقاومت داشته باشد و نیز مقاومت خط خنثی 1 Ω باشد، مطلوب است: (الف) توان کل کشیده شده به وسیله بارها، (ب) PF کل بارها، (ج) توان کل از دست رفته در چهار خط، (د) ولتاژ فاز منبع و (ه) ضریب توان کل منبع

جواب: 22.6 kW، 0.954 پسفاز، 1027 W، 140.6 V، 0.957 پسفاز

اگر بار Y نامتعادل به یک سیستم سه فاز که به لحاظ دیگر بالانس است وصل شود، باز هم می‌توان سیستم را براساس تک‌فاز تحلیل کرد، مشروط بر این‌که سیم خنثی وجود داشته باشد و امپدانس آن هم صفر باشد. اگر هر یک از این شرایط برقرار نباشد، باید از روش‌های دیگری چون روش تک‌حلقه یا تحلیل گره استفاده نمود. با این وجود مهندسینی که بیشتر وقت خود را با سیستم‌های سه‌فاز نامتعادل صرف کرده‌اند، می‌دانند که کاربرد **مؤلفه‌های متقارن** چقدر باعث صرفه‌جویی در وقت است. ما در این‌جا این روش را بحث نمی‌کنیم.

۱۲ـ۴ اتصال مثلث یا دلتا (Δ)

آرایشی دیگر در اتصال بارهای سه‌فاز اتصال Δ است، (شکل ۱۸ـ۱۲). این آرایش بسیار رایج بوده و نیازی به اتصال سیم خنثی ندارد.

اجازه دهید تا یک بار با اتصال Δ را که از سه امپدانس Z_p تشکیل شده بررسی کنیم. با مراجعه به شکل ۱۸ـ۱۲ ولتاژهای خطوط را چنین فرض می‌کنیم:

$$V_L = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}|$$

یا ولتاژهای فاز معلوم چنین هستند:

$$V_P = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

که در آن

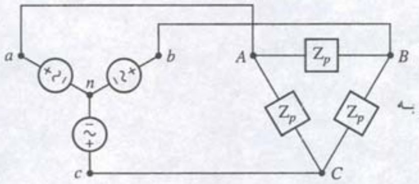
$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ \quad \text{و} \quad V_L = \sqrt{3}V_p$$

و همان است که قبلاً دیدیم. چون ولتاژ دو سر هر شاخه از Δ معلوم است، جریان‌های فاز به راحتی به دست می‌آیند.

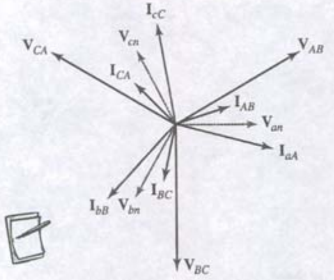
$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_p} \qquad I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_p} \qquad I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_p}$$

و اختلاف آن‌ها جریان‌های خط را به دست می‌دهند، مثل:

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$



شکل ۱۸ـ۱۲ یک بار Δ بالانس روی سیستم سه‌فاز سه سیم. منبع به شکل Y است.



شکل ۱۹ـ۱۲ نمودار فیزوری که اگر، $\mathbf{Z}_p$ یک امپدانس القایی باشد، قابل اعمال به مدار شکل ۱۸ـ۱۲ است.

چون با یک سیستم بالانس کار می‌کنیم. جریان‌های سه‌فاز دارای دامنه‌های برابری هستند.

$$I_P = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

دامنه جریان‌های خط نیز برابرند. تقارن آن‌ها از روی نمودار فیزور شکل ۱۹ـ۱۲ آشکار است. پس داریم:

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|$$

و

$$I_L = \sqrt{3}\, I_P$$

بگذارید موقتاً منبع را کنار بگذاریم و فقط بار متعادل را بررسی کنیم. اگر بار با اتصال Δ است، نمی‌توان ولتاژ فاز و ولتاژ خط را از هم تمیز داد، ولی جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز است. با این وجود در اتصال Y هر دو جریان فاز و جریان خط یک مقدار دارند و ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ فاز است.

مثال ۵ـ۱۲

دامنه یک جریان خط در سیستم سه‌فازی با ولتاژ خط 300 V را معین کنید. این خط 1200 V را به بار Δ در $\mathrm{PF} = 0.8$ پسفاز منتقل می‌کند.

باز هم به‌خاطر داشته باشید که فرض بر این است تمام مقادیر ولتاژها و جریان‌ها rms می‌باشند.

بیایید دوباره حالت تک‌فاز را بررسی کنیم. در این حالت بار، 400 W را در $P = 0.8$ پسفاز از ولتاژ خط 300 V می‌کشد. بنابراین:

$$400 = 300(I_P)(0.8)$$

و

$$I_P = 1.667 \text{ A}$$

توجه داشته باشید که همه ولتاژها و جریان‌ها به rms فرض شده‌اند و رابطه بین جریان‌های فاز و جریان‌های خط برابر است با

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

به‌علاوه زاویه فاز بار برابر $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$ است و بنابراین امپدانس در هر فاز باید برابر رابطهٔ زیر باشد:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300}{1.667}\angle 36.9° = 180\angle 36.9°\ \Omega$$

تمرین

۷ـ۱۳ هر فاز از یک بار Δ متعادل از یک القاگر 0.2 H سری با ترکیبی از خازن 5 μF و مقاومت 200 Ω تشکیل شده است. مقاومت خط را صفر و ولتاژ فاز را 200 V در $\omega = 400$ rad/s فرض کنید. (الف) جریان فاز را پیدا کنید. (ب) جریان خط را پیدا کنید. (ج) کل توان جذب شده به وسیله بار را معین کنید.
جواب: 1.158 A، 2.01 A، 693 W

مثال ۶ـ۱۲

دامنه جریان خط را در یک سیستم سه فاز با ولتاژ خط 300 V که 1200 W توان را به یک بار Y در $P = 0.8$ پسفاز منتقل می‌کند، به دست آورید. (این همان مدار مثال ۵ـ۱۲ است ولی بار به شکل Y منتقل شده است).

براساس تک‌فاز، اکنون ولتاژ فاز $300 / \sqrt{3}$ V و توان 400 W و $P = 0.8$ پسفاز را داریم. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_P)(0.8)$$

و

$$I_P = 2.89$$

یا

$$I_L = 2.89 \text{ A rms}$$

زاویه فاز بار مجدداً همان 36.9° است. بنابراین امپدانس هر فاز Y چنین خواهد بود.

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89}\angle 36.9° = 60\angle 36.9°\ \Omega$$

ضریب $\sqrt{3}$ نه تنها کمیت‌های خط و فاز را به هم مرتبط می‌سازد بلکه در توان کشیده شده به وسیله هر بار سه فاز هم ظاهر می‌شود. اگر یک بار Y با زاویه ضریب توان θ را فرض کنیم توان دریافتی به وسیله هر فاز برابر است با:

$$P_P = V_P I_P \cos\theta = V_P I_L \cos\theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

و توان کل برابر است با:

$$P = 3P_P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$$

به طریق مشابه توان انتقالی در هر فاز به بار Δ برابر است با:

$$P_P = V_P I_P \cos\theta = V_L I_P \cos\theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

و درنتیجه توان کل برابر است با:

$$P = 3P_P$$

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad (۴)$$

بنابراین معادله (۴) امکان محاسبه توان کل به بار متعادل را با آگاهی از اندازه ولتاژ خط، جریان خط و زاویه فاز امپدانس بار فراهم می‌سازد و اتصال Y یا Δ در آن نقشی ندارد. اکنون جریان خط در مثال ۵ـ۱۲ و ۶ـ۱۲ در دوگام ساده قابل محاسبه است:

$$1200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

بنابراین

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A}$$

مقایسه‌ای خلاصه از ولتاژهای فاز و خط و جریان‌های فاز و خط در جدول ۱ـ۱۲ هم برای بارهای Y و هم Δ که به وسیله منبع سه فاز Y تغذیه شده‌اند، ارائه شده است.

جدول ۱ـ۱۲ مقایسه بارهای سه فاز اتصال ستاره (Y) و مثلث (Δ). V_P مقدار ولتاژ فاز و منبع اتصال ستاره (Y) است.

بار	ولتاژ فازی	ولتاژ خطی	جریان فازی	جریان خطی	توان در فاز
Y	$\mathbf{V}_{AN} = V_p\angle 0°$ $\mathbf{V}_{BN} = V_p\angle -120°$ $\mathbf{V}_{CN} = V_p\angle -240°$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle 30°)\mathbf{V}_{AN} = \sqrt{3}V_p\angle 30°$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = (\sqrt{3}\angle 30°)\mathbf{V}_{BN} = \sqrt{3}V_p\angle -90°$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = (\sqrt{3}\angle 30°)\mathbf{V}_{CN} = \sqrt{3}V_p\angle -210°$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ که $\cos\theta$ = ضریب توان بار
Δ	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30°$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90°$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210°$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30°$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90°$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210°$	$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = (\sqrt{3}\angle -30°)\frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = (\sqrt{3}\angle -30°)\frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = (\sqrt{3}\angle -30°)\frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ که $\cos\theta$ = ضریب توان بار

تمرین

۱۲ـ۸ یک سیستم سه فاز سه سیمه به دو بار موازی Δ ختم شده است. بار 1، 40 kVA در $PF = 0.8$ پسفاز می‌باشد. در حالی که بار 2، 24 kW را در $PF = 0.8$ پیشفاز جذب می‌نماید. اگر مقاومتی در خط نباشد و $\mathbf{V}_{ab} = 440\angle 30°$ V باشد، (الف) توان کل دریافتی به وسیله بارها چقدر است؟ (ب) جریان فاز $\mathbf{I}_{AB1}$ برای بار پسفاز چیست؟ (ج) $\mathbf{I}_{AB2}$. (د) $\mathbf{I}_{aA}$.
جواب: 56.0 kW، 30.3$\angle$-6.87° A، 20.2$\angle$55.8° A، 75.3$\angle$-12.46° A

منابع با اتصال Δ

منبع را هم می‌توان به فرم Δ به هم متصل کرد. البته این روش مرسوم نیست زیرا هر وضعیت نامتعادل در فازهای منابع می‌تواند منجر به چرخش جریانی قابل توجه در حلقه Δ گردد. مثلاً سه منبع تک فاز V_{ab}، V_{bc} و V_{cd} را در نظر بگیرید. قبل از بستن Δ که با اتصال d به a صورت می‌گیرد، وضعیت نامتعادل را با جمع $V_{ab} + V_{bc} + V_{ca}$ معین می‌کنیم. فرض کنید دامنه نتیجه تنها 1 درصد ولتاژ خط باشد، بنابراین جریان چرخشی تقریباً $\frac{1}{3}$ درصد ولتاژ خط تقسیم بر امپدانس هر منبع است. این امپدانس چقدر می‌تواند باشد؟ این امپدانس به جریانی که منبع می‌تواند بدهد، بستگی دارد که البته مختصر افتی در ولتاژ پایانه خواهد داشت. اگر این حداکثر جریان 1 درصد افت در ولتاژ پایانه موجب شود، آنگاه جریان چرخشی یک سوم جریان ماکزیمم است! پس توانایی منبع در تأمین جریان کم و تلفات داخلی آن زیاد خواهد شد. همچنین باید توجه کرد که منابع سه فاز متعادل را از Y به Δ و یا برعکس بدون تأثیر بر جریان‌ها یا ولتاژهای بار می‌توان تبدیل نمود. روابط لازم بین ولتاژهای خط و فاز برای حالتی که V_{an} دارای زاویه فاز مرجع $0°$ است، در شکل ۱۳ـ۱۲ دیده می‌شود. این تبدیل اجازه می‌دهد تا هر اتصال منبعی را که ترجیح می‌دهیم انتخاب کنیم. البته تا زمانی که اتصال را ندانیم، نمی‌توانیم جریان‌ها و ولتاژهای منبع را مشخص کنیم. بارهای متعادل را می‌توان با استفاده از رابطه زیر از Δ به Y تبدیل نمود.

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

که حفظ کردن آن ارزشمند است.

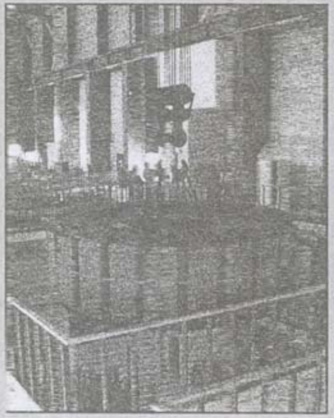
کاربرد عملی

سیستم‌های مولد توان الکتریکی

در تولید توان الکتریکی از تکنیک‌های متنوعی می‌توان استفاده کرد. مثلاً تبدیل مستقیم انرژی خورشید به الکتریسیته با سلول خورشیدی تولید توان dc می‌کند. با این وجود علیرغم وجود یک تکنولوژی ساده در این تکنیک تأسیسات مبتنی بر سلول خورشیدی فعلاً از دیگر روش‌های تولید الکتریسیته خیلی گران‌تر بوده و به مبدل‌هایی برای تبدیل از dc به ac نیاز دارند. دیگر تکنولوژی‌ها مانند ژنراتورهای مبتنی بر توربین‌های بادی، حرارت حاصل از گرمای زمین، هیدرودینامیک، هسته‌ای و سوخت فسیلی بسیار اقتصادی‌ترند. در این سیستم‌ها شفتی از طریق محرک اصلی مثل پره‌های بادی یا توربین آبی یا بخاری روی تیغه‌های توربین می‌چرخد (شکل ۲۰ـ۱۲).

با اتصال محرک اصلی برای چرخش شفت، چندین روش برای تبدیل این انرژی مکانیکی به الکتریکی وجود دارد. مثالی از این تبدیل ژنراتور سنکرون شکل ۲۱ـ۱۲ است. این ماشین‌ها از دو بخش اصلی تشکیل شده‌اند، یکی بخش ساکن به نام استاتور و بخش دوار به نام روتور. به سیم‌پیچ حول روتور یک جریان dc اعمال می‌گردد تا یک میدان مغناطیسی تولید شود. روتور توسط محرک اصلی می‌چرخد. آنگاه یک مجموعه ولتاژ سه‌فاز در بخش دوم سیم‌پیچی حول استاتور تولید می‌گردد. ژنراتورهای سنکرون یا همزمان نام خود را از همزمان بودن فرکانس ولتاژ ac تولید شده با روتور مکانیکی دوار گرفته‌اند.

شکل ۲۰ـ۱۲ تأسیسات انرژی بادی در کالیفرنیا که از 7000 دستگاه تشکیل شده است.



شکل ۲۱ـ۱۲ روتور 24 قطب.

دیماند واقعی از یک مولد، به شدت به نوع بار اضافه شده یا حذف شده مانند تهویه مطبوع و روشنایی وابسته است. به‌طور ایده‌آل ولتاژ خروجی مولد یا ژنراتور باید مستقل از بار باشد ولی عملاً چنین نیست. ولتاژ E_A القاء شده در هر فاز استاتور که غالباً به آن ولتاژ تولیدی داخلی می‌گویند دارای اندازه زیر است:

$$E_A = K\phi\omega$$

که K به ساختمان ماشین وابسته است، ϕ شار مغناطیسی تولید شده به وسیله میدان سیم‌پیچ‌های روتور (بنابراین به بار وابسته نیست) و ω سرعت دوران است و فقط به محرک اصلی و نه به بار متصل به ژنراتور وابسته است. تغییر بار اندازه E_A را تغییر نمی‌دهد. ولتاژ تولید شده داخلی را می‌توان به ولتاژ فاز V_ϕ و جریان فاز I_A با رابطهٔ زیر مرتبط کرد:

$$E_A = V_\phi + jX_S I_A$$

که X_S راکتانس سنکرون ژنراتور است. اگر بار افزایش یابد، آنگاه جریان زیادی از ژنراتور کشیده می‌شود. اگر ضریب توان تغییر نکند (مثلاً زاویه بین V_ϕ و I_A ثابت بماند)، V_ϕ کاهش می‌یابد زیرا E_A نمی‌تواند تغییر کند.

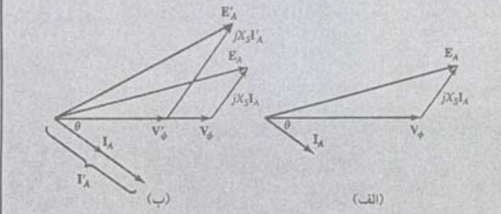
مثلاً نمودار فیزوری شکل ۲۲ـ۱۲ (الف) را در نظر بگیرید.

این نمودار ولتاژ - جریان خروجی یک ژنراتور تک‌فاز متصل به باری با ضریب توان $\cos\theta$ را نشان می‌دهد. ولتاژ تولیدی داخلی E_A هم نشان داده شده است. اگر باری بدون تغییر ضریب توان اضافه گردد، شکل ۲۲ـ۱۲ (ب)، جریان I_A به I'_A افزایش می‌یابد. در این حالت اندازه ولتاژ تولیدی داخلی که از جمع فیزوری $jX_S I'_A$ و V'_ϕ به دست می‌آید باید بدون تغییر باقی بماند. بنابراین $E'_A = E_A$ و ولتاژ خروجی (V'_ϕ) ژنراتور کمی کاهش می‌یابد. شکل ۲۲ـ۱۲ (ب).

تثبیت ولتاژ یک ژنراتور با رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\% \text{تثبیت} = \frac{V_{\text{بی‌بار}} - V_{\text{بار کامل}}}{V_{\text{بار کامل}}} \times 100$$

به‌طور ایده‌آل این مقدار تا حد ممکن باید به صفر نزدیک باشد، ولی تنها در شرایطی امکان‌پذیر است که جریان dc به کار رفته برای کنترل شار ϕ حول سیم‌پیچ میدان تغییر کند، تا هرگونه تغییر بار را جبران نماید. این کار چندان ساده نیست. به این دلیل، هنگام طراحی یک نیروگاه، ساخت چند ژنراتور کوچک بر یک ژنراتور بزرگ که قادر به تحمل بار پیک باشد، ترجیح داده می‌شود. هر ژنراتور می‌تواند در نزدیکی بار کامل کار کند تا ولتاژ خروجی اساساً ثابت بماند. می‌توان برحسب تقاضای مشتریان تک‌تک ژنراتورها را حذف و یا وارد مدار کرد.



شکل ۲۲ـ۱۲ نمودار فیزوری که تأثیر بار را روی یک ژنراتور همزمان نشان می‌دهد. (الف) ژنراتور به باری با ضریب توان پس‌فاز $\cos\theta$ متصل است. (ب) باری بدون تغییر ضریب توان اضافه‌شده است. اندازه ولتاژ تولید درونی E_A ثابت است ولی جریان خروجی افزایش می‌یابد. بنابراین ولتاژ خروجی V_ϕ کاهش خواهد یافت.

۵ـ۱۲ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز

کاربرد واتمتر

قبل از آغاز بحث در مورد تکنیک‌های خاص به کار رفته برای اندازه‌گیری توان سیستم‌های سه‌فاز، بهتر است ابتدا چگونگی کار **واتمتر** که در مدار تک‌فاز به کار می‌رود را مطالعه کنیم.

اندازه‌گیری توان با واتمترهایی که دو سیم‌پیچ جدا دارند، معمولاً در فرکانس‌هایی کمتر از چند صد Hz انجام می‌شود. یکی از آن‌ها از سیم‌های ضخیم با مقاومت خیلی کم، ساخته

شده و **سیم‌پیچ جریان** نام دارد. دیگری از تعداد دورهای بیشتر و سیمی نازک‌تر با مقاومت نسبتاً زیاد ساخته شده و **سیم‌پیچ پتانسیل** یا **ولتاژ** خوانده می‌شود. می‌توان مقاومتی اضافه را هم در داخل یا خارج با سیم‌پیچ سری کرد. گشتاور اعمال شده بر سیستم متحرک و عقربه متناسب با حاصل‌ضرب لحظه‌ای جریان در دو سیم‌پیچ است. به هر حال ماندگاری مکانیکی سیستم متحرک موجب انحراف عقربه متناسب با مقدار متوسط این گشتاور می‌گردد. طریقهٔ اتصال وات‌متر به شبکه طوری است که جریان عبوری از وات‌متر همان جریان شبکه و ولتاژ روی سیم‌پیچ با ولتاژ دوسر پایانه‌های شبکه برابر است. جریان در سیم‌پیچ پتانسیل از تقسیم ولتاژ ورودی بر مقاومت سیم‌پیچ حاصل می‌گردد.

واضح است که وات‌متر چهار پایانه دارد و اتصال به این پایانه‌ها باید به‌طور صحیحی صورت گیرد تا امکان خواندن فراهم گردد. دقیق‌تر بگوییم، فرض کنید که می‌خواهیم توان جذب شده به وسیله یک شبکه غیرفعال را اندازه بگیریم. سیم‌پیچ جریان با یکی از دو سیم متصل به بار سری می‌شود و سیم‌پیچ پتانسیل بین دو سیم معمولاً در سمت بار سیم‌پیچ جریان قرار می‌گیرد. پایانه‌های سیم‌پیچ پتانسیل اغلب طبق شکل ۱۲-۲۳(الف) با پیکان نشان داده می‌شوند. هر سیم‌پیچ دو پایانه دارد و رابطه صحیحی بین حس جریان و ولتاژ باید مشاهده گردد. انتهای هر سیم‌پیچ معمولاً با (+) علامت زده می‌شود و خواندن صحیح هنگامی امکان‌پذیر است که جریان مثبت وارد پایانه (+) سیم‌پیچ جریان گردد، ضمن این‌که پایانه (+) سیم‌پیچ پتانسیل نسبت به پایانه بی‌علامت مثبت است. پس وات‌متر شکل ۱۲-۲۳(الف) هنگام جذب توان به وسیله شبکه سمت راست، انحرافی صحیح و افزاینده خواهد داشت. اگر فقط یکی از سیم‌پیچ‌ها معکوس گردد، و نه هر دوی آن‌ها، موجب انحراف معکوس عقربه می‌شود. معکوس کردن هر دو سیم‌پیچ تأثیری بر خواندن ندارد. بیایید به‌عنوان مثالی از کاربرد چنین وات‌متری در اندازه‌گیری توان متوسط، مدار شکل ۱۲-۲۳(ب) را بررسی کنیم. اتصال وات‌متر طوری است که توان جذب شده در سمت راست وات‌متر، یعنی منبع سمت راست در جهت افزایشی خوانده شود. توان جذب شده به وسیله این منبع با رابطه زیر داده می‌شود:

$$P = |\mathbf{V}_2|\ |\mathbf{I}|\ \cos(\text{ang } \mathbf{V}_2 - \text{ang } \mathbf{I})$$

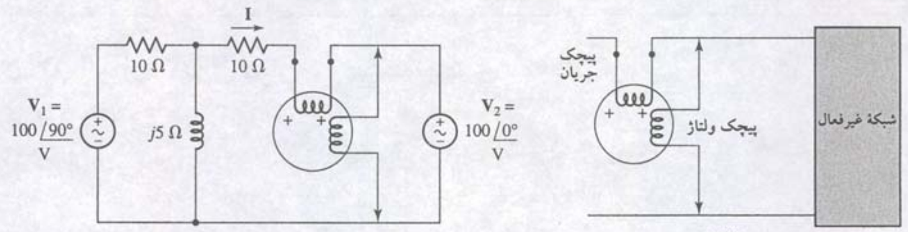
با روش تجمیع یا تحلیل تک حلقه، جریان را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{I} = 11.18 \underline{/153.4^\circ} \text{ A}$$

و بنابراین توان جذب شده برابر است با:

$$P = (100)(11.18)\cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1000 \text{ W}$$

بنابراین عقربه اندازه‌گیری به سمت پایین منحرف می‌شود تا جایی که متوقف گردد. در عمل تعویض سیم‌پیچ پتانسیل راحت‌تر از سیم‌پیچ جریان صورت می‌گیرد. این عمل خواندن 1000 W را به همراه دارد.

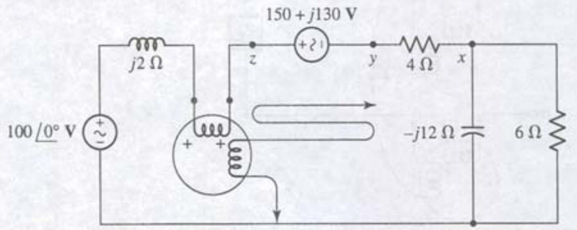


(ب) (الف)

شکل ۱۲-۲۳ (الف) اتصال وات‌متر که هنگام خواندن توان جذب‌شده شبکه عقربه آن در جهت افزاینده حرکت می‌کند. (ب) مثالی از نصب وات‌متر برای خواندن توان جذب‌شده به وسیله منبع سمت راست.

تمرین

۱۲-۹ قرائت وات‌متر در شکل ۱۲-۲۴ را معین کنید. بگویید برای قرائت مثبت باید سیم‌پیچ پتانسیل را معکوس کرد یا خیر. سپس وسیله یا وسایلی که این انرژی را جذب یا تولید می‌کند، مشخص نمایید. پایانه (+) وات‌متر متصل به (الف) x، (ب) y و (ج) z وصل است.



شکل ۱۲-۲۴

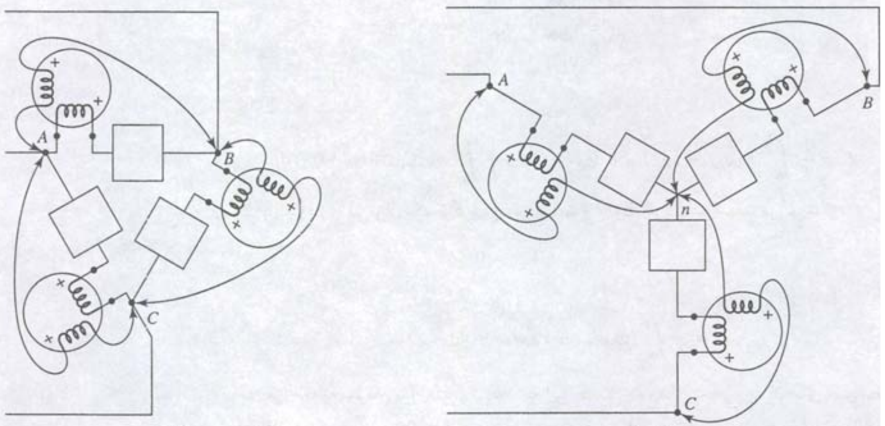
جواب: 1200 W همان‌طور که هست، $P_{6\Omega}$ (مصرف)، 2200 W همان‌طور که هست $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$ (مصرف)، 500 W عوض شود: مصرفی به وسیله 100 V (مصرف).

وات‌متر در سیستم سه‌فاز

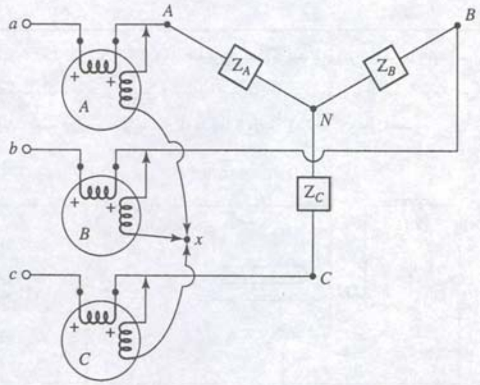
ر نگاه اول، اندازه‌گیری توان مصرف شده به وسیله بار سه‌فاز ساده به نظر می‌رسد. کافی است ر هر فاز تنها یک وات‌متر مستقر کنیم و نتایج را به هم بیفزاییم. مثلاً، یک اتصال صحیح برای تصال Y بار در شکل ۱۲-۲۵(الف) نشان داده شده است. هر وات‌متر سیم‌پیچ جریان خود را در ک فاز بار قرار داده و سیم‌پیچ پتانسیل خود را هم بین بار و سیم خنثی مستقر کرده است. به روشی شابه، سه وات‌متر را می‌توان مثل شکل ۱۲-۲۵(ب) بست تا توان کل دریافتی به وسیله بار Δ ندازه‌گیری شود. روش‌ها از لحاظ تئوری صحیح‌اند، ولی در عمل قابل پیاده‌سازی نیستند، زیرا یم خنثی در Y همیشه قابل دسترسی نیست و فازها هم در Δ در دسترس نمی‌باشند. مثلاً یک ماشین چرخان سه‌فاز فقط سه پایانه قابل دسترسی دارد، که ما آن‌ها را A، B و C می‌خوانیم.

واضح است که به روشی برای اندازه‌گیری توان کل جذبی به وسیله بار سه‌فاز با سه پایانه ابل دسترسی نیاز است. اندازه‌گیری‌ها ممکن است در سمت منبع صورت گیرد و نه در سمت بار.

شکل ۱۲-۲۵ سه وات‌متر طوری وصل شده‌اند که توانی جذبی به‌وسیله یکی از بارهای سه‌فاز را بخواند و جمع سه اندازه‌گیری توان کل است. (الف) یک بار Y، (ب) یک بار Δ. هیچ‌یک از بارها یا منابع نیازی به بالانس‌بودن ندارند.



(ب) (الف)



شکل ۲۶-۱۲ روش اتصال وات‌مترها برای اندازه‌گیری کل توان مصرفی به‌وسیله بار سه‌فاز. تنها سه پایانهٔ بار قابل دسترس‌اند.

چنین روشی وجود دارد و با آن می‌توان توان دریافتی به وسیله یک بار نامتعادل از یک منبع نامتعادل را اندازه گرفت. اکنون بیایید سه وات‌متر را طوری وصل کنیم که هر یک از سیم‌پیچ‌های جریان به یک سیم منبع و سیم‌پیچ ولتاژ بین آن خط و نقطه مشترک x، طبق شکل ۲۶-۱۲ باشد. گرچه یک سیستم با اتصال بار Y تشریح شده است، بحث ارائه شده برای بار Δ هم معتبر است. نقطه x ممکن است یک نقطه نامشخص در سیستم سه‌فاز باشد، یا صرفاً نقطه‌ای در فضا باشد که در آن هر سه سیم‌پیچ پتانسیل گره مشترکی دارند. توان متوسط اندازه‌گیری شده با وات‌متر A برابر است با:

$$P_A = \frac{1}{T}\int_0^T v_{Ax} i_{aA}\, dt$$

که در آن T تناوب همه ولتاژهای منابع است. اندازه‌گیری در وات‌متر دیگر با عبارتی مشابه داده می‌شود. بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{Ax} i_{aA} + v_{Bx} i_{bB} + v_{Cx} i_{cC})\, dt$$

هر یک از سه ولتاژ در عبارت فوق را می‌توان برحسب یک ولتاژ فاز و ولتاژ بین نقطه x و خط خنثی نوشت:

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$
$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$
$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

و بنابراین

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC})\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_{Nx}(i_{aA} + i_{bB} + i_{cC})\, dt$$

کل بار سه‌فاز را می‌توان یک ابرگره در نظر گرفت و قانون جریان کیرشهف می‌گوید که:

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

پس

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC})\, dt$$

مراجعه به نمودار مدار نشان می‌دهد که این حاصل جمع‌ها، مجموع توان‌های متوسط دریافتی به وسیله هر فاز از بار است و لذا مجموع مقادیر قرائت شده توسط سه وات‌متر بیانگر توان متوسط کل دریافتی به وسیله بار کل است!

اجازه دهید این روال را قبل از این‌که بدانیم وات‌مترها در واقع بیش از نیازند، بررسی کنیم. فرض می‌کنیم منبع متعادل یا بالانس باشد:

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\angle 0^\circ \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 100\angle -120^\circ \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 100\angle -240^\circ \quad \text{V}$$

یا

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -150^\circ \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -270^\circ \quad \text{V}$$

برای بار نامتعادل داریم:

$$\mathbf{Z}_A = -j\,10\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_B = j\,10\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_C = 10\ \Omega$$

اکنون وات‌مترها را ایده‌آل تصور کنید که طبق شکل ۲۶-۱۲ وصل شده و نقطه x آن روی n قرار دارد. جریان‌های سه خط از تحلیل حلقه به دست می‌آید:

$$\mathbf{I}_{aA} = 19.32\angle 15^\circ \quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{bB} = 19.32\angle 165^\circ \quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 10\angle -90^\circ \quad \text{A}$$

ولتاژ بین سیم‌های خنثی برابر است با

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{V}_{BN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{I}_{bB}(j10) = 157.7\angle -90^\circ$$

توان متوسطی که هر وات‌متر مشخص می‌کند را می‌توان محاسبه کرد:

$$P_A = V_P I_{aA} \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{am} - \text{ang } \mathbf{I}_{aA})$$

$$P_A = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-30^\circ - 15^\circ) = 788.7 \text{ W}$$

$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-150^\circ - 165^\circ) = 788.7 \text{ W}$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} 10 \cos(-270^\circ + 90^\circ) = -577.4 \text{ W}$$

پس کل توان 1 kW است. چون یک جریان 10 A rms از مقاومت بار می‌گذرد، توان کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = 10^2(10) = 1 \text{ kW}$$

و به این وسیله هر دو روش با یکدیگر همخوانی دارد.

توجه کنید که مقدار اندازه‌گیری شده توسط یکی از وات‌مترها منفی است. در بحث قبلی دیدیم که براساس کاربرد یک وات‌متر، خواندن افزایشی روی صفحه اندازه‌گیری فقط پس از تعویض سیم‌پیچ پتانسیل یا سیم‌پیچ جریان به دست می‌آید.

روش دو وات‌متری

نشان دادیم که نقطه x، یعنی اتصال مشترک سه سیم‌پیچ پتانسیل هر جایی که بخواهیم می‌تواند باشد، بدون این‌که جمع جبری مقادیر قرائت شده با وات‌مترها را تحت تأثیر قرار دهد. اکنون بگذارید اثر استقرار نقطه x را روی یکی از سه خط منبع بررسی کنیم. مثلاً اگر یکی از دو انتهای هر سیم‌پیچ پتانسیل به B بازگردانده شود، ولتاژی در دو سر سیم‌پیچ پتانسیل وات‌متر B وجود ندارد و این وات‌متر باید عدد صفر را بخواند. بنابراین می‌توان آن را حذف کرد ولی جمع جبری در وات‌متر دیگر هنوز توان کل دریافتی به وسیله بار است. وقتی محل x به این طریق انتخاب گردد، روش را روش **دو وات‌متر** می‌نامیم. مجموع دو اندازه‌گیری توان کل را مشخص می‌کند و این مستقل از (۱) بار نامتعادل (۲) منبع نامتعادل (۳) اختلاف در دو وات‌متر و (۴) شکل موج منبع متناوب است. تنها فرضی که نمودیم این بود که اصلاح وات‌متر به اندازه کافی کوچک است و می‌توان از آن چشم پوشید. مثلاً در شکل ۲۶ـ۱۲، از سیم‌پیچ جریان هر وات‌متر جریان منبع عبور کرده و به وسیله بار به‌علاوه سیم‌پیچ ولتاژ کشیده می‌شود. چون جریان آخری خیلی کوچک است، اثر آن را می‌توان با آگاهی از مقاومت سیم‌پیچ پتانسیل و ولتاژ دو سرش، مشخص کرد. با این دو کمیت می‌توان توان تلف شده در سیم‌پیچ ولتاژ را به‌خوبی تخمین زد.

در مثال عددی فوق، اکنون بیایید فرض کنیم که دو وات‌متر به کار رفته است، یکی با سیم‌پیچ جریان در خط a و سیم‌پیچ پتانسیل در بین خطوط A و B و دیگری با سیم‌پیچ جریان در خط c و سیم‌پیچ ولتاژ بین C و B. وات‌متر اول چنین می‌خواند:

$$P_1 = V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA})$$
$$= 100\ (19.32) \cos(0^\circ - 15^\circ)$$
$$= 1866 \text{ W}$$

و دومی چنین قرائت می‌کند:

$$P_2 = V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC})$$
$$= 100\ (10) \cos(60^\circ + 90^\circ)$$
$$= -866 \text{ W}$$

و بنابراین

$$P = P_1 + P_2 = 1866 - 866 = 1000 \text{ W}$$

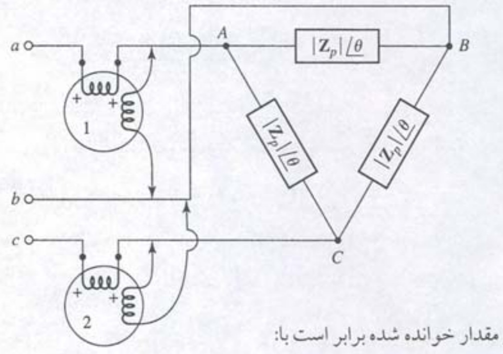
و این همان چیزی است که از مدار انتظار داریم.

در حالت بار متعادل، روش دو وات‌متر اجازه می‌دهد تا زاویه PF و نیز توان دریافتی به وسیله بار مشخص شود. بیایید باری امپدانسی را با زاویه فاز θ فرض کنیم. هر یک از دو اتصال Y یا Δ می‌تواند به کار رود ولی ما اتصال Δ را طبق شکل ۲۷ـ۱۲ برمی‌گزینیم. ساخت یک نمودار فیزوری مثل شکل ۱۹ـ۱۲، تعیین زاویه فاز بین ولتاژها و جریان‌های خط را امکان‌پذیر می‌سازد. بنابراین داریم:

$$P_1 = |\mathbf{V}_{AB}|\ |\mathbf{I}_{aA}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{AB} - \text{ang } \mathbf{I}_{aA})$$
$$= V_L L_L \cos(30^\circ + \theta)$$

و

$$P_2 = |\mathbf{V}_{CB}|\ |\mathbf{I}_{cC}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{CB} - \text{ang } \mathbf{I}_{cC})$$
$$= V_L L_L \cos(30^\circ - \theta)$$



شکل ۲۷ـ۱۲ دو وات‌متر برای خواندن توان کل دریافتی به‌وسیله بار سه‌فاز متعادل، وصل شده‌اند.

نسبت دو مقدار خوانده شده برابر است با:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \qquad (5)$$

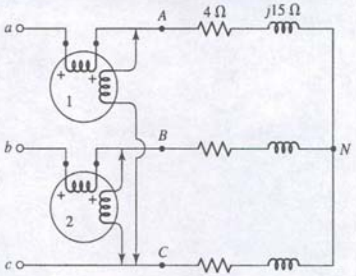
اگر جملات کسینوس را بسط دهیم، این معادله برای $\tan\theta$ به راحتی حل می‌گردد.

$$\tan\theta = \sqrt{3}\ \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \qquad (6)$$

گر قرائت دو وات‌متر مساوی باشند، PF = 1 است، در خواندن مساوی با علامت مخالف، وع بار راکتیو خالص است، P_2 بزرگ‌تر از P_1 امپدانسی القایی و P_2 کوچک‌تر از P_1 نیز بار خازنی را نشان می‌دهد. چگونه بدانیم که کدام وات‌متر P_1 و کدام P_2 است؟ می‌دانیم که P_1 در خط A و P_2 در خط C است و ترتیب فاز سیستم به نحوی است که V_{an} نسبت به V_{cn} پسفاز ست. برای تفکیک این دو وات‌متر همین اطلاعات کافی است، ولی در عمل موجب اشتباه ی‌شود. اگر حتی موفق به تفکیک آن دو نشویم، اندازه زاویه فاز را می‌دانیم ولی علامت آن را می‌دانیم. غالباً این اطلاعات کافی است، اگر بار یک موتور القایی باشد، زاویه باید مثبت باشد دیگر دانستن این که کدام وات‌متر کدام است، لازم نیست. اگر اطلاعات قبلی راجع به بار داریم، آنگاه چند روش برای رفع شبهات وجود دارد. شاید که ساده‌ترین راه افزودن یک بار آکتیو امپدانس بالا مثلاً خازن سه فاز در دو سر بار مجهول باشد. در این حال بار خازنی‌تر ی‌شود. بنابراین اگر اندازه $\tan\theta$ (یا اندازه θ) کاهش یابد، آنگاه بار القایی است، در حالی که فزایش در اندازه $\tan\theta$ بیانگر وجود بار خازنی است.

مثال ۷ـ۱۲

ار متعادل شکل ۲۸ـ۱۲ به وسیله یک سیستم سه‌فاز متعادل با $V_{ab} = 230\angle 0^\circ$ V rms تغذیه و ترتیب فاز مثبت اختیار شده است. مقدار قرائت شده به وسیله هر وات‌متر و توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید.



شکل ۲۸ـ۱۲ یک سیستم بالانس سه‌فاز متصل به یک بار سه‌فاز بالانس که توان آن با تفکیک دو وات‌متر اندازه‌گیری می‌شود.

سیم‌پیچ ولتاژ وات‌متر شماره 1 برای اندازه‌گیری ولتاژ $\mathbf{V}_{ac}$ و سیم‌پیچ جریان آن برای اندازه‌گیری فاز جریان $\mathbf{I}_{aA}$ به کار رفته است. چون ترتیب فاز مثبت به کار رفته است. پس:

$$\mathbf{V}_{ab} = 230\angle 0^\circ \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 230\angle -120^\circ \quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 230\angle 120^\circ \quad \text{V}$$

وجه کنید که $\mathbf{V}_{ac} = -\mathbf{V}_{ca} = 230\angle -60^\circ$ V است.

جریان فاز I_{aA} از ولتاژ فاز V_{an} تقسیم بر امپدانس فاز $4 + j15\ \Omega$ به دست می‌آید:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{4+j15} = \frac{(230/\sqrt{3})\angle -30^\circ}{4+j15} A$$

$$= 8.554\angle -105.1^\circ\ A$$

بنابراین می‌توانیم توان قرائت شده به وسیله واتمتر 1 را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$P_1 = |V_{ac}|\ |I_{aA}|\ \cos(\text{ang}\ V_{ac} - \text{ang}\ I_{aA})$$

$$= (230)(8.554)\cos(-60^\circ + 105.1^\circ)\ W$$

$$= 1389\ W$$

به همین ترتیب داریم:

$$P_2 = |V_{bc}|\ |I_{bB}|\ \cos(\text{ang}\ V_{bc} - \text{ang}\ I_{bB})$$

$$= (230)(8.554)\cos(-120^\circ - 134.9.1^\circ)\ W$$

$$= -512.5\ W$$

بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = 876.5\ W$$

تمرین

۱۲-۱۰ برای مدار شکل ۱۲-۲۶ ، فرض کنید بارهای $Z_A = 25\angle 60^\circ\ \Omega$ ، $Z_B = 50\angle 60^\circ\ \Omega$ ، $Z_C = 50\angle 60^\circ\ \Omega$ و $V_{AB} = 600\angle 0^\circ$ rms به‌علاوه ترتیب فاز مثبت و نقطه x در C باشد. (الف) P_A، (ب) P_B، (ج) P_C.

جواب: 0، 7200 W، 0

۱۲-۶ خلاصه فصل و مرور

- بخش عمده تولید الکتریسیته به فرم توان سه فاز است.
- برق منازل مسکونی به فرم جریان متناوب با فرکانس 60 Hz و ولتاژ 115 rms است.
- منابع سه فاز می‌توانند به صورت Y یا Δ متصل شوند. هر دو نوع منبع سه پایانه دارند و هر یک متعلق به یک فاز است. منابع Y یک سیم اتصال خنثی نیز دارند.
- در یک سیستم متعادل سه‌فاز، تمام ولتاژها با هم برابرند، ولی هر یک با دو فاز دیگر 120° اختلاف فاز دارد.
- بار در یک سیستم سه فاز ممکن است به فرم Y یا Δ باشد.
- در یک منبع متعادل با اتصال Y و ترتیب فاز مثبت (abc)، ولتاژ خط برابر است با:

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ \qquad V_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210^\circ$$

و ولتاژ هر فاز برابر است با:

$$V_{an} = V_p\angle 0^\circ \qquad V_{bn} = V_p\angle -120^\circ \qquad V_{cn} = V_p\angle -240^\circ$$

- در یک سیستم با بار Y ، جریان‌های منبع با جریان‌های فاز برابرند.
- در اتصال Δ منبع، ولتاژهای خط با ولتاژهای فاز برابر است.
- در یک سیستم متعادل با ترتیب فاز مثبت و یک بار Δ متعادل، جریان‌های خط عبارتند:

$$I_a = I_{AB}\sqrt{3}\angle -30^\circ \qquad I_b = I_{BC}\sqrt{3}\angle -150^\circ \qquad I_c = I_{CA}\sqrt{3}\angle +90^\circ$$

و جریان‌های فاز عبارتند از:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta} \qquad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_\Delta} = \frac{V_{bc}}{Z_\Delta} \qquad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ca}}{Z_\Delta}$$

- بیشتر محاسبات توان بر مبنای تک‌فاز انجام می‌شود و فرض بر این‌است‌که سیستم متعادل است. در غیر این صورت تحلیل گرهی / حلقه‌ای، روشی معتبر خواهد بود.
- توان در یک سیستم سه فاز (بالانس یا غیربالانس) تنها با دو واتمتر اندازه‌گیری می‌شود.
- توان لحظه‌ای در هر سیستم سه فاز بالانس ثابت است.

۱۲-۷ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

A comprehensive book on generation of electrical power from wind is:

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, and E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*. Chichester, England: Wiley, 2001.

مسائل

۱۲-۲ سیستم‌های چندفاز

۱. مداری که در آزمایشگاهی ساخته شده با ولت‌متر اندازه‌گیری و نتایج زیر حاصل شده است:

$$V_{ce} = 10\ V \qquad V_{be} = 0.7\ V$$

مطلوب است V_{bc}، V_{eb}، V_{cb}.

۲. یک تقویت کننده ترانزیستوری اثر میدان سورس مشترک با SPICE شبیه‌سازی شده است الف. اگر $V_{gs} = -1\ V$ و $V_{ds} = 5\ V$ باشد، V_{gd} را پیدا کنید. ب. اگر $V_{ds} = 4\ V$ و $V_{gd} = 2.5\ V$ باشد، V_{sg} را به دست آورید.

۳. یک سیستم قدرت (توان) شش فاز به صورت بخشی از منبع تغذیه dc جریان بالا ساخته شده است. ولتاژهای فاز را برای (الف) ترتیب فاز مثبت (ب) ترتیب فاز منفی بنویسید.

۴. اگر $V_{xy} = 110\angle 20^\circ\ V$ و $V_{xz} = 160\angle -50^\circ\ V$ و $V_{ay} = 80\angle 130^\circ\ V$ باشد، مطلوب است (الف) V_{yz}، (ب) V_{az}، (ج) V_{zx} / V_{xy}.

۵. برای مداری خاص، می‌دانیم که $V_{12} = 100\angle 0^\circ$، $V_{45} = 60\angle 75^\circ$، $V_{42} = 80\angle 120^\circ$ و $V_{35} = -j120$ است. مطلوب است (الف) V_{25}، (ب) V_{13}.

۶. در یک سیستم ac خاص، $V_{12} = 9\angle 87^\circ\ V$ و $V_{23} = 8\angle 45^\circ\ V$ است. مطلوبست (الف) V_{21}، (ب) V_{32} و (ج) $V_{12} - V_{32}$

۷. یک سیستم قدرت دارای $V_{an} = 400\angle -45^\circ\ V$ و $V_{bn} = 400\angle 75^\circ\ V$ است. (الف) نمودار فیزوری شامل V_{cn} را ترسیم نمایید. (ب) آیا رشته فاز سیستم مثبت است یا منفی؟ توضیح دهید.

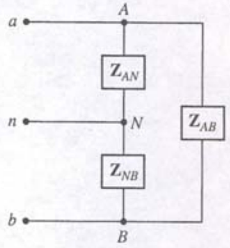
۸. با فرض $I_{12} = 33\angle 12^\circ\ A$ و $I_{23} = 40\angle 12^\circ\ A$ ، جریان I_{31} چند است؟

۹. اگر یک مدار ac دارای جریان‌های $I_{12} = 5\angle 55^\circ\ A$ و $I_{23} = 4\angle 33^\circ\ A$ باشد، I_{31} برای فرکانس 50 Hz چقدر است؟

۱۲-۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

۱۰. یک سیستم سه سیمه 230/460 V rms ، 60 Hz در شکل ۱۲-۲۹ دیده می‌شود که سه بار را تغذیه می‌کند: بار AN توان مختلط $10\angle 40^\circ$ kVA را می‌کشد، بار NB ، $8\angle 10^\circ$ kVA مصرف می‌کند و بار AB ، $4\angle -80^\circ$ را دریافت می‌نماید. دو جریان خط و جریان سیم خنثی را پیدا کنید.

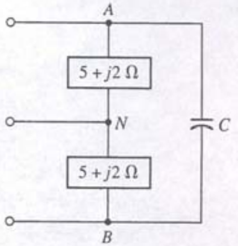
۱۱. یک سیستم یک فاز سه سیم بارهای $Z_{AN} = Z_{NB} = 10\ \Omega$ و بار $Z_{AB} = 16+J/2\ \Omega$ را دارد. فرض می‌شود که هر سه خط فاقد مقاومت باشد، فرض کنید $V_{an} = V_{nb} = 120\angle 0^\circ\ V$ باشد، مطلوب است (الف) I_{aA} و I_{nN} ، (ب) با اتصال یک مقاومت 10Ω دیگر که موازی Z است، سیستم از حالت تعادل خارج‌می‌شود. مطلوب است I_{aA} ، I_{bB} و I_{nN} .



شکل ۱۲-۲۹

۱۲. یک سیستم کم بازده تک‌فاز سه سیم دارای ولتاژهای منبع $V_{an} = V_{nb} = 720\angle 0^\circ$ V و مقاومت خط $R_{nN} = 10\ \Omega$ و بارهای $R_{aA} = R_{bB} = 1\ \Omega$، $Z_{AN} = 10 + J3\ \Omega$، $Z_{NB} = 8 + J2\ \Omega$ و $Z_{AB} = 18 + J0\ \Omega$ است. مطلوب است (الف) I_{aA}، (ب) I_{nN}، (ج) $P_{\text{کل سیم‌ها}}$، (د) $P_{\text{کل بارها}}$.

۱۳. در یک سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲-۳۰، $V_{AN} = 220$ V در 60 Hz است. (الف) سایز C چه باید باشد تا ضریب توان بار واحد گردد؟ (ب) C چند k VA را تحمل می‌کند.

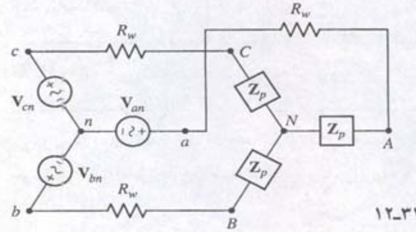


شکل ۱۲-۳۰

۱۴. سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲-۲۹ دارای ولتاژهای منبع $V_{an} = V_{nb} = 200\angle 0^\circ$ V مقاومت خط و خنثی صفر، بارهای $Z_{AN} = Z_{NB} = 12 + J3\ \Omega$ است. مطلوب است Z_{AB} به نحوی که (الف) $X_{AB}=0$ و $I_{aA}=30$ A rms، (ب) $R_{AB}=0$ و زاویه $I_{aA}=0^\circ$ است.

۱۲-۳ اتصال سه فاز Y-Y

۱۵. شکل ۱۲-۳۱ یک سیستم سه‌فاز سه‌سیمه متعادل را با ترتیب فاز مثبت نشان می‌دهد. اجازه بدهید $V_{BC} = 120\angle 60^\circ$ V و $R_w = 0.6\ \Omega$ باشد. اگر بار کل (شامل مقاومت سیم) مقدار 5 k VA را در PF = 0.8 پسفاز دریافت کند (الف) توان کلی در مقاومت خط را پیدا کنید و (ب) V_{an}.



شکل ۱۲-۳۱

۱۶. فرض‌کنید در سیستم متعادل شکل ۱۲-۳۱ مقدار $V_{an} = 2300\angle 0^\circ$ V و $R_w = 2\ \Omega$ باشد. اگر برای منبعی که توان مختلط کل $S = 100 + J30$ k VA را فراهم می‌کند، ترتیب مثبت فاز اختیار شود (الف) I_{aA} را به دست آورید، (ب) V_{AN}، (ج) Z_P، (د) بازده انتقال را مشخص نمایید.

۱۷. در سیستم سه فاز متعادل (شکل ۱۲-۳۱) فرض کنید $Z_P = 12 + J5\ \Omega$ و $I_{bB} = 20\angle 0^\circ$ A با ترتیب فاز مثبت باشد. اگر منبع با ضریب توان 0.935 کار کند. مطلوب است (الف) R_w، (ب) V_{bn}، (ج) V_{AB}، (د) توان مختلط تولیدی به وسیله منبع.

۱۸. یک سیستم سه فاز سه سیمه به بار متعادل Y با مقاومت 75 Ω، القاگر 125 mH و خازن 55 μF به طور سری از هر خط به نقطه خنثی وصل است. با فرض ترتیب فاز مثبت و $V_P = 125$ V در 60 Hz، جریان خط را به دست آورید. توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید و ضریب توان بار را معین کنید.

۱۹. یک سیم خنثی بدون اتلاف سیمی بین دو گره n و N در سیستم سه فاز شکل ۱۲-۳۱ دیده می‌شود. سیستم را متعادل با ترتیب فاز مثبت تصور کنید، ولی بارها نامتعادل می‌باشند. $Z_{AN} = 8 + J6\ \Omega$، $Z_{BN} = 12 - J16\ \Omega$ و $Z_{CN} = 5\ \Omega$ است. اگر $V_{an} = 120\angle 0^\circ$ V و $R_w = 0.5\ \Omega$ باشد، I_{nN} را پیداکنید.

۲۰. برای مدار بالانس شکل ۱۲-۳۱، $V_{an} = 40\angle 0^\circ$ V است (با فاز مثبت) مطلوب است جریان خط و توان کل تحویلی به بار اگر امپدانس فاز $Z_P = 5 + J10\ \Omega$ و R_w برابر با (الف) 0 Ω (ب) 3 Ω باشد.

۲۱. امپدانس فاز Z_P در سیستم شکل ۱۲-۳۱ متشکل از یک امپدانس $75\angle 25^\circ\ \Omega$ موازی با خازن 25 μF است. $V_{an} = 240\angle 0^\circ$ V در فرکانس 60 Hz و $R_w = 2\ \Omega$ است. (الف) I_{aA} را پیدا کنید، (ب) $P_{\text{سیم‌ها}}$، (ج) $P_{\text{بار}}$، (د) ضریب توان منبع را پیداکنید.

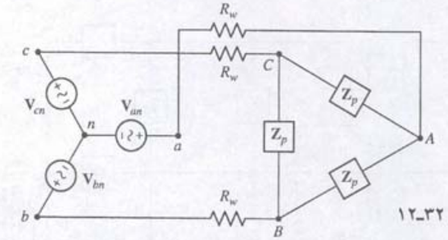
۲۲. هر بار در مدار شکل ۱۲-۳۱ متشکل از یک امپدانس القایی $100\angle 28^\circ\ \Omega$ موازی با یک خازن 500 nF است، مقاومت $R_w = 1\ \Omega$ است. با ترتیب فاز مثبت و $V_{ab} = 240\ \ 0^\circ$ V در f = 50 Hz، جریان rms خط را به دست آورید، توان کل حمل شده به بار را مشخص کنید، توان تلف شده در سیم‌ها را بیابید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی مناسبی روی PSpice تست نمایید.

۲۳. سیستم سه فاز سه سیمه متعادل شکل ۱۲-۳۱ دارای $R_w = 0$ و $Z_P = 10 + J5\ \Omega$ در هر فاز است. (الف) منبع در چه ضریب توانی کار می‌کند؟ (ب) با فرض f = 60 Hz چه خازنی باید موازی با امپدانس هر فاز قرار داد تا ضریب به 0.93 پسفاز افزایش یابد؟ (ج) چقدر توان راکتیو به وسیله هر خازن کشیده می‌شود به شرطی که ولتاژ خط در بار 440 V باشد.

۲۴. هر بار در شکل ۱۲-۳۱ متشکل از یک القاگر 1.5 H موازی با یک خازن 100 μF و یک مقاومت 1 kΩ است. مقاومت $R_w = 0\ \Omega$ می‌باشد. با استفاده از فاز مثبت و $V_{ab} = 115\angle 0^\circ$ V در f = 60 Hz، جریان rms خط و توان کل حمل شده به بار را معین کنید. پاسخ را با شبیه‌ساز PSpice تست کنید.

۱۲-۴ اتصال مثلث یا (دلتا) Δ

۲۵. شکل ۱۲-۳۲ یک مدار سه فاز سه سیمه متعادل را نشان می‌دهد. فرض کنید $R_w = 0$ و $V_{an} = 200\ \angle 60^\circ$ V باشد، هر فاز از بار یک بار مختلط به اندازه $S_P = 2 - J1$k VA را جذب می‌کند. اگر ترتیب فاز (+) را اختیار کنیم. مطلوب است (الف) V_{bc}، (ب) Z_P، (ج) I_{aA}.



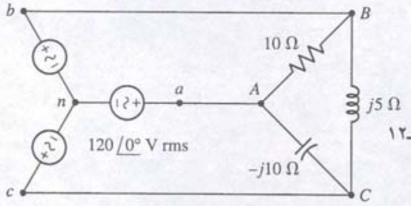
شکل ۱۲-۳۲

۲۶. یک بار متعادل Δ از شکل ۱۲-۳۲ به توان 15 kVA در PF = 0.8 پسفاز نیاز دارد. فرض کنید ترتیب فاز (+) و $V_{BC} = 180\angle 30^\circ$ V باشد. اگر $R_w = 0.75\ \Omega$ باشد، مطلوب است (الف) V_{bc}، (ب) توان مختلط کل تولید به وسیله منبع.

۲۷. بار در سیستم متعادل شکل ۱۲-۳۲ توان مختلط کل $3 + J1.8$ kVA را می‌کشد، در حالی که منبع $3.46 + J1.8$ kVA را تولید می‌نماید. اگر $R_w = 5\ \Omega$ باشد، مطلوب است (الف) I_{aA}، (ب) I_{AB}، (ج) V_{an}.

۲۸. بار Δ در مدار شکل ۱۲-۳۲ توان 1800 W را با PF = $\sqrt{2}/2$ پسفاز می‌کشد. توان تلف شده در مقاومت سیم 240 W و $R_w = 2.3\ \Omega$ است. ولتاژ فاز rms منبع و rms جریان بار را به دست آورید.

۲۹. منبع شکل ۱۲-۳۳ متعادل و دارای ترتیب فاز مثبت است (الف) I_{aA}، (ب) I_{bB}، (ج) I_{cC} و (د) کل توان مختلطی راکه منبع تأمین می‌کند، به دست آورید.

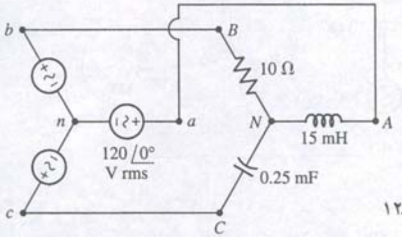


شکل ۱۲-۳۳

۳۰. برای مدار شکل ۱۲-۳۲، $V_{AB} = 200\angle 0^\circ$ V با ترتیب فاز (+)، $R_w = 200$ m Ω و امپدانس فاز Z_P متشکل از یک مقاومت موازی با یک راکتانس 30 Ω می‌باشد. توان کل تهیه شده به وسیله منبع، ضریب توان آن و بازده انتقال را پیداکنید.

۳۱. منبع Y سه فاز بالانس در شکل ۱۲-۳۲ دارای $V_{an} = 140\angle 0^\circ$ V با ترتیب فاز مثبت است. فرض کنید $R_w = 0$ است. بار سه فاز متعادل 15 kW و +9 kVAR را می‌کشد، مطلوب است (الف) V_{AB}، (ب) I_{AB}، (ج) I_{aA}.

۳۲. برای سیستم سه فاز شکل ۱۲-۳۴، یک منبع متعادل با ترتیب فاز (+) را در نظر بگیرید. اگر فرکانس کاری 60 Hz باشد، اندازه (الف) V_{AN}، (ب) V_{BN}، (ج) V_{CN} را به دست آورید. پاسخ خود را با یک شبیه‌سازی مناسب در PSpice آزمایش کنید.



شکل ۱۲-۳۴

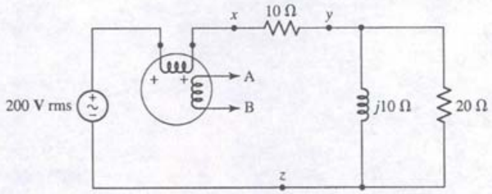
۳۳. (الف) در هر یک از خطوط شکل ۱۲-۳۳ یک مقاومت 1Ω وارد کنید و دوباره تمرین ۲۹ را تکرار نمایید. (ب) حل خود را با PSpice تست کنید.

۳۴. یک سیستم سه فاز که دارای ولتاژ خط 240 V rms است حاوی یک بار Δ از $12 + Jk\Omega$ در هر فاز و نیز یک بار $5 + J3k\Omega$ در هر فاز است. جریان خط، توان دریافتی به وسیله بار ترکیبی و ضریب توان بار را معین کنید.

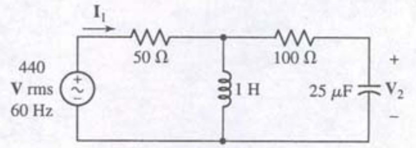
۱۲-۵ اندازه گیری توان در سیستم‌های سه فاز

۳۵. مقدار قرائت شده به وسیله وات‌متر در مدار شکل ۱۲-۳۵ را معین کنید. به شرطی که پایانه‌های A و B به ترتیب (الف) x و y، (ب) x و z، (ج) y و z وصل باشد.

۳۶. یک وات‌متر در مدار شکل ۱۲-۳۶ وصل است به نحوی که I_1 وارد پایانه (+) سیم‌پیچ جریان می‌گردد، در حالی که V_2 ولتاژ دو سر سیم‌پیچ پتانسیل است. وات‌متر چه چیزی را اندازه می‌گیرد. پاسخ خود را با شبیه سازی مناسب با PSpice آزمایش کنید.

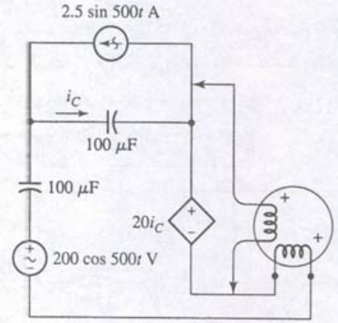


شکل ۱۲-۳۵



شکل ۱۲-۳۶

۳۷. وات‌متر متصل به مدار شکل ۱۲.۳۷ چقدر می‌خواند.



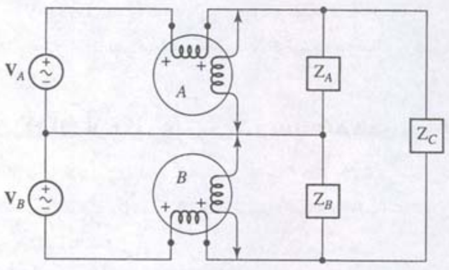
شکل ۱۲.۳۷

۳۸. (الف) دو وات‌متر در شکل ۱۲.۳۸ چه می‌خوانند. به شرطی که

$V_B = 50\angle 90°$ Vrms و $V_A = 100\angle 0°$ Vrms

$Z_C = 30 + J10\ \Omega$ و $Z_B = 8 + J6\ \Omega$ ، $Z_A = 10 - J10\Omega$

باشد، پاسخ خود را با PSpice آزمایش نمایید.



شکل ۱۲.۳۸

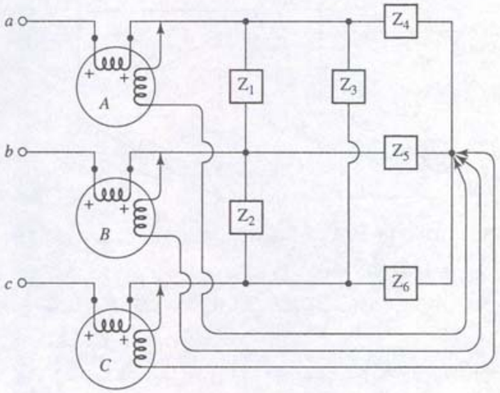
۳۹. مقدار مدار شکل ۱۲.۳۹ عبارتند از: $V_{ab} = 200\angle 0°$ ، $V_{ca} = 200\angle 240°$ Vrms و $V_{bc} = 200\angle 120°$ Vrms

$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50\angle -60°\ \Omega$ ، $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 25\angle 30°\ \Omega$

هر وات‌متر چه می‌خواند.

۴۰. برای مدار شکل ۱۲.۳۲ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر است (ب) دو وات‌متر است.

۴۱. برای مدار شکل ۱۲.۳۱ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار چگونه قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر (ب) دو وات‌متر است.



شکل ۱۲.۳۹

فصل سیزدهم

مدار با کوپل مغناطیسی

مفاهیم کلیدی

- القای متقابل
- خودالقایی
- قرارداد نقطه
- امپدانس منعکسه
- شبکه‌های معادل T و π
- ترانس ایده‌آل
- نسبت دور یک ترانس ایده‌آل
- تطبیق امپدانس
- تحلیل PSpice مدارهای ترانس‌دار

مقدمه

هر وقت که جریان ac یا dc در رسانایی جاری شود، یک میدان مغناطیسی حول آن تولید می‌گردد. در مدارها غالباً به شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه سیمی اشاره می‌شود و درواقع متوسط مؤلفه عمودی میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ضربدر سطح حلقه است. وقتی یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان به وسیله یک حلقه تولید شود در حلقه دوم نفوذ می‌کند و ولتاژهای بین دو انتهای سیم دوم القا می‌گردد. برای این‌که این پدیده را از القا تمیز دهیم، اولی را خودالقا می‌نامیم. دومین پدیده بنابراین، **القای متقابل** است.

وسیله‌ای به‌عنوان القاگر متقابل وجود ندارد، ولی اصول این پدیده مبنای وسیلهٔ مهمی به نام ترانسفورماتور یا ساده‌تر بگوییم ترانس است. یک ترانس از دو سیم‌پیچ که با فاصله‌ای کم از یکدیگر جدا شده‌اند، تشکیل شده است و معمولاً بسته به کاربرد برای تبدیل ولتاژهای ac به مقادیر بیشتر یا کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر وسیله الکتریکی که برای کار به جریان dc نیاز دارد، برای وصل به پریز از ترانس استفاده می‌نماید تا قبل از یکسوسازی سطح ولتاژ را تنظیم نماید. عمل یکسوسازی معمولاً با کمک دیودها صورت می‌گیرد و در هر کتاب الکترونیک پایه نیز توصیف شده است.

۱۳-۱ القای متقابل

در فصل ۷ القاکنایی را با معرفی رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان تعریف کردیم.

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

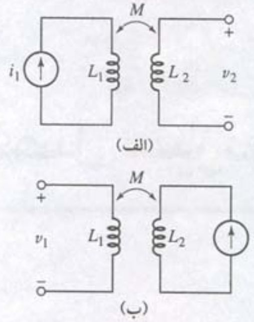
که در آن قرارداد علامت عنصر غیرفعال رعایت شد. مبنای فیزیکی این مشخصه جریان – ولتاژ بر دو مورد متکی است.

۱. تولید شار مغناطیسی به وسیله جریان، که در آن شار در القاگرهای خطی متناسب با جریان است.

۲. تولید ولتاژ با میدان مغناطیسی متغیر با زمان، که در آن ولتاژ متناسب با تغییر زمانی میدان مغناطیسی یا شار مغناطیسی است.

ضریب القای متقابل

القای متقابل حاصل تعمیم بحث فوق است. جریانی که در یک سیم‌پیچ جاری می‌شود، حول آن سیم‌پیچ و سیم‌پیچ دیگری در آن حوالی، میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. شار متغیر با زمان که سیم‌پیچ دوم را احاطه کرده است ولتاژی در دو سر آن تولید می‌نماید. این ولتاژ



شکل ۱-۱۳ (الف) جریان i_1 در L_1 ولتاژ مدار باز v_2 را در L_2 به‌وجود می‌آورد. (ب) جریان i_2 در L_2 ولتاژ مدار باز v_1 را در L_1 ایجاد می‌کند.

ساده‌ای از دو سیم‌پیچ L_1 و L_2 را نشان می‌دهد که به اندازه کافی به هم نزدیک می‌باشند، به نحوی که شار تولیدی به وسیله جریان $i_1(t)$ در L_1 یک ولتاژ مدار باز $v_2(t)$ را در دو سر L_2 ایجاد می‌نماید. در این‌جا بدون تأکید بر علامت صحیح جبری برای این ارتباط، ضریب القای متقابل یا ساده‌تر القای متقابل M_{21} را چنین تعریف می‌کنیم:

$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \qquad (1)$$

ترتیب زیرنویس به این معنی است که پاسخ ولتاژ حاصل در L_2 به وسیله منبع جریانی در L_1 تولید شده است. اگر سیستم معکوس گردد، آنگاه طبق شکل ۱-۱۳(ب) داریم:

$$v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \qquad (2)$$

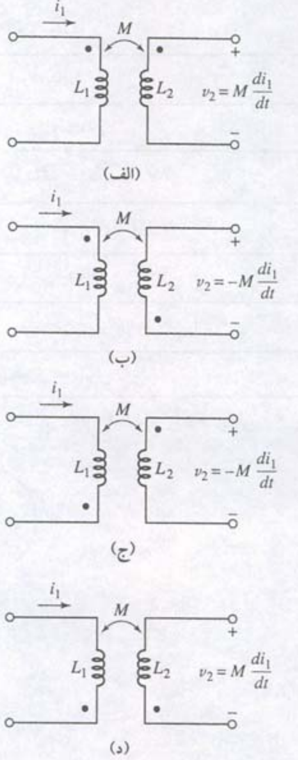
در هر صورت دو ضریب القای متقابل لزومی ندارند. بعداً با به‌کارگیری روابط انرژی ثابت، خواهیم دید که M_{12} و M_{21} برابر هم می‌باشند. پس $M_{12} = M_{21} = M$. وجود کوپل یا تزویج متقابل بین دو سیم‌پیچ با یک پیکان دوسر نشان داده می‌شود (شکل ۱-۱۳(الف و ب)). القای متقابل برحسب هنری اندازه‌گیری می‌شود و مانند مقاومت، القاکنایی و ظرفیت، کمیتی مثبت است. البته القای متقابل را به صراحت نمی‌توان مثبت فرض کرد. خصوصاً بهتر است وقتی که سه یا چند سیم‌پیچ در کنار هم هستند هر یک علامت خود را داشته باشد و با سیم‌پیچ‌های دیگر واکنش نماید. ما در ادامه، بحث خود را به دو سیم‌پیچ محدود می‌کنیم. در هر صورت ولتاژ $M\,di/dt$ بسته به افزایش یا کاهش جریان در هر لحظه از زمان ممکن است مثبت یا منفی تصور شود.

قرارداد نقطه

القاگر عنصری دو پایانه است و به همین دلیل مجازیم از قرارداد علامت عنصر غیرفعال برای آن استفاده کنیم و علامت صحیحی برای ولتاژ $L\,di/dt$ یا $j\omega LI$ برگزینیم. اگر جریان وارد پایانه مثبت ولتاژ گردد، آنگاه قرارداد مثبت به کار رفته است. با این وجود القای متقابل را نمی‌توان به طریقی مشابه بررسی کرد، زیرا چهار پایانه دارد. گزینش علامت صحیح را به چند طریق می‌توان انجام داد، از آن جمله **"قرارداد نقطه"** یا بررسی روش خاصی که طی آن جهت سیم‌پیچ مشخص می‌شود. در این‌جا فقط قرارداد نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم و به شکل فیزیکی سیم‌پیچ‌ها هم نگاه مختصری می‌اندازیم. وقتی با دو سیم‌پیچ کوپل شده سروکار داریم، استفاده از دیگر نمادهای خاص لزومی ندارد.

در قرارداد نقطه‌ای، در هر سمت سیم‌پیچ‌هایی که القاکنایی متقابل دارند، یک نقطه بزرگ گذاشته می‌شود. علامت ولتاژ حاصل از القای متقابل را چنین تعریف می‌کنیم:

> جریانی که وارد پایانه نقطه‌دار یکی از سیم‌پیچ‌ها شود، ولتاژ مدار بازی را به وجود می‌آورد که مرجع مثبت آن در پایانه نقطه‌دار سیم‌پیچ دوم است.



شکل ۲-۱۳ جریان وارده به پایانه نقطه‌دار یک سیم‌پیچ ولتاژی ایجاد می‌کند که علامت مثبت آن در سمت نقطه‌دار است. جریانی که وارد پایانه بی‌نقطه یک سیم می‌شود، مثبت ولتاژ در سیم‌پیچ ۲ در سمت بی‌نقطه است.

به این ترتیب در شکل ۲-۱۳ (الف)، i_1 وارد پایانه نقطه‌دار L_1 می‌شود و v_2 به صورت مثبت در پایانه نقطه‌دار L_2 حس می‌گردد، یعنی $v_2 = M\,di_1/dt$ خواهد بود. قبلاً ملاحظه شد که همواره نمی‌توان جریان‌ها و ولتاژها را در سرتاسر مدار طوری انتخاب کرد که قرارداد علامت عناصر غیرفعال تأیید شود. مورد مشابهی برای کوپل متقابل هم وجود دارد. مثلاً در شکل ۲-۱۳ (ب) بهتر است v_2 را با مرجع مثبت واقع در پایانه بدون نقطه نشان داد. در این صورت $v_2 = -M\,di_1/dt$ خواهد بود. ممکن است جریان‌ها هم همیشه وارد پایانه‌های نقطه‌دار نشوند، مثل شکل ۲-۱۳ (ج) و (د). آنگاه می‌گوییم:

> جریانی که وارد پایانه بدون نقطه یک سیم‌پیچ می‌شود، ولتاژی ایجاد می‌کند که علامت مثبت آن در پایانه بدون نقطه سیم‌پیچ دوم قرار دارد.

توجه کنید که در بحث‌های قبلی نقشی برای خودالقایی در ولتاژ در نظر گرفته نشده است، که اگر i_2 غیر صفر باشد، قطعاً اثرگذار خواهد بود. ما این وضعیت مهم را به‌طور مشروح بحث می‌کنیم ولی ابتدا مثالی سریع مناسب‌تر است.

مثال ۱-۱۳

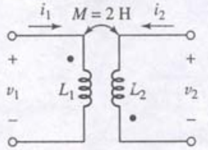
در مدار شکل ۳-۱۳، (الف) اگر $i_2 = 5 \sin 45t$ A و $i_1 = 0$ A باشد، v_1 را تعیین کنید. (ب) اگر $i_1 = -8e^{-t}$ A و $i_2 = 0$ باشد، v_2 را به دست آورید.

(الف) چون جریان i_2 وارد پایانه بی‌نقطه سیم‌پیچ سمت راست می‌شود، مرجع مثبت برای ولتاژ القا شده در سیم‌پیچ چپ، پایانه بدون نقطه است. پس ولتاژ مدار باز چنین است:

$$v_1 = -(2)(45)(5\cos 45t) = -450\cos 45t \text{ V}$$

که به علت شار مغناطیسی متغیر با زمان حاصل از جریان i_2 در پایانه سمت راست ولتاژ فوق در دو سر پایانه‌های سمت چپ ظاهر می‌گردد. چون هیچ جریانی از سیم‌پیچ سمت چپ عبور نمی‌کند، در v_1 موضوع خود القا هیچ نقشی ندارد. (ب) اکنون جریانی داریم که وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود، ولی v_2 در پایانه بدون نقطه مثبت است. پس:

$$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t}\text{V}$$



شکل ۳-۱۳ قرارداد نقطه رابطه‌ای بین پایانه‌ای که جریان در آن وارد یک سیم‌پیچ می‌شود با ولتاژ مثبت در پایانه سیم‌پیچ دیگر را فراهم می‌سازد.

تمرین

۱-۱۳ با فرض $M = 10$ H و $i_1 = -2e^{-5t}$ A، ولتاژ v_2 را برای (الف) شکل ۲-۱۳(الف)، (ب) شکل ۲-۱۳ (ب) به دست آورید.

جواب: $-100e^{-5t}$ V، $100e^{-5t}$ V.

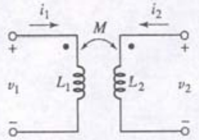
ترکیبی از ولتاژ القاء متقابل و خودالقا

تا این‌جا فقط ولتاژ متقابل موجود در دو سر یک سیم‌پیچ مدار باز را ملاحظه کردیم. به‌طور کلی جریان می‌تواند از هر دو سیم‌پیچ بگذرد و روی هر سیم‌پیچ یک ولتاژ ناشی از عبور جریان در سیم‌پیچ دیگر به‌وجود آید. این ولتاژ متقابل مستقل و علاوه بر هر ولتاژ خودالقا است. به بیان دیگر، ولتاژ دوسر پایانه‌های L_1 متشکل از دو جمله است: $L_1\,di_1/dt$ و $M\,di_2/dt$ که هر یک بسته به جهت جریان، جهت فرض شده برای ولتاژها و محل قرارگرفتن نقطه‌ها علامت می‌گیرند. در بخشی از مدار شکل ۴-۱۳، جریان‌های i_1 و i_2 نشان داده شده‌اند. فرض بر این است که هر کدام به پایانه نقطه‌دار وارد می‌شوند. بنابراین ولتاژ دوسر L_1 از دو بخش تشکیل شده است

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

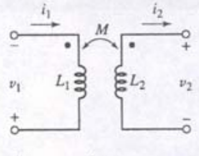
و ولتاژ دوسر L_2 چنین است:

$$v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$



شکل ۴-۱۳ چون جفت‌های v_1 و i_1 و v_2 و i_2 قرارداد علامت عناصر غیرفعال را تأیید می‌کنند هر دو ولتاژ خود القاء مثبت‌اند. چون i_1 و i_2 هر دو وارد پایانه‌های نقطه‌دار می‌شوند و چون v_1 و v_2 هر دو مثبت احساس می‌شوند ولتاژ القاء متقابل نیز مثبت است.

در شکل ۵-۱۳ ولتاژها و جریان‌ها طوری انتخاب نشده‌اند تا همه جملات v_1 و v_2 مثبت باشند. با بررسی v_1 و i_1 می‌بینیم که قرارداد علامت عناصر غیرفعال رعایت نشده و بنابراین $L_1\,di_1/dt$ باید منفی باشد. برای جمله $L_2\,di_2/dt$ هم به نتیجه مشابهی می‌توان رسید. جمله



شکل ۵-۱۳ چون v_1 و i_1 و v_2 و i_2 طبق قرارداد علامت عناصر غیرفعال نیستند ولتاژهای خود القاء هر دو منفی‌اند. چون i_1 وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود و ولتاژ v_2 به‌طور مثبت در پایانه نقطه‌دار مثبت فرض می‌شوند، جمله متقابل v_2 مثبت است و چون i_2 وارد پایانه بی‌نقطه گشته و v_1 در پایانه بی‌نقطه مثبت حس می‌شود، جمله متقابل v_1 هم مثبت می‌باشد.

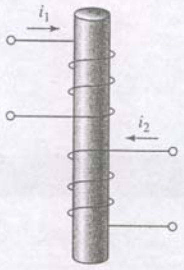
متقابل v_2 با بررسی جهت i_1 و v_2 علامت می‌گیرد، چون i_1 وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود و v_2 در پایانه 2 مثبت حس می‌گردد، علامت $M\,di_1/dt$ مثبت است. بالاخره i_2 وارد پایانه بی‌نقطه L_2 می‌گردد و بخش متقابل v_1 یعنی $M\,di_2/dt$ نیز باید مثبت باشد. پس داریم:

$$v_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

برای منبع سینوسی در همه فرکانس‌های ω نیز به انتخاب علامت مشابهی خواهیم رسید:

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1$$

مبنای فیزیکی قرارداد نقطه



شکل ۶-۱۳ ساختار فیزیکی سیم‌پیچ با کوپل متقابل. با ملاحظه جهت فلوی مغناطیسی تولیدی به‌وسیله هر سیم‌پیچ، می‌توان نقطه‌ها را در پایانه‌های بالا و پایین سیم‌پیچ قرار داد.

با نگاهی بر مبنای فیزیکی قرارداد نقطه می‌توان درک بهتری از آن به دست آورد. اکنون مفهوم نقطه‌ها را برحسب شار مغناطیسی تعبیر می‌کنیم. در شکل ۶-۱۳ دو سیم‌پیچ روی استوانه‌ای پیچیده شده و جهت هر سیم‌پیچ نیز مشخص است. فرض کنید که جریان i_1 مثبت و با زمان افزایش یابد. جهت شار مغناطیسی ناشی از i_1 را می‌توان به کمک قانون دست راست پیدا کرد. وقتی که دست راست حول سیم‌پیچ بسته شود، انگشت شست جهت شار داخل سیم‌پیچ را نشان می‌دهد. پس شار تولیدی به وسیله i_1 به سمت پایین است. چون جریان i_1 با زمان افزایش می‌یابد، شار که با i_1 متناسب است نیز با زمان افزایش پیدا می‌کند. اکنون به سیم‌پیچ دوم توجه می‌کنیم. بگذارید i_2 را هم‌جهت و افزاینده تصور کنیم. به‌کارگیری قاعده دست راست نشان می‌دهد که میدان حاصل از i_2 نیز به سمت پایین و افزاینده است. به بیان دیگر جریان‌های i_1 و i_2 شارهای جمع شونده تولید می‌کنند.

ولتاژ دو سر پایانه‌های هر سیم‌پیچ از تغییر زمانی شار در داخل سیم‌پیچ ناشی می‌شود. پس ولتاژ دو سر پایانه‌های اولین سیم‌پیچ هنگامی که i_2 وجود دارد، بزرگتر از زمانی است که $i_2 = 0$ است. پس ولتاژی که i_2 در سیم‌پیچ اول القا می‌کند، هم‌جهت با ولتاژ خودالقاکنایی در آن سیم‌پیچ است. علامت ولتاژ خودالقا از قرارداد علامت عناصر غیرفعال مشخص است، پس علامت ولتاژ القای متقابل هم به دست خواهد آمد.

قرارداد نقطهٔ زحمت بررسی ساختمان فیزیکی سیم‌پیچ‌ها را با دو نقطه از دوش ما برمی‌دارد. به‌نحوی که مطمئن خواهیم بود در صورت ورود جریان به آن‌ها، شارهای هم‌جهت و جمع شونده تولید می‌گردد. واضح است که دو امکان برای نقطه‌ها وجود دارد، زیرا ممکن است نقاط را برداشت و در انتهای دیگر سیم‌پیچ‌ها قرار داد و باز هم شارهای جمع‌شونده به دست آورد.

مثال ۲-۱۳

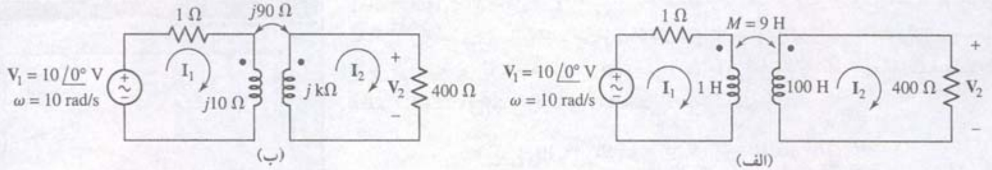
در مدار شکل ۷-۱۳ (الف)، نسبت ولتاژ خروجی دو سر مقاومت 400Ω را به ولتاژ منبع به دست آورید.

- اهداف مسئله را شناسایی کنید.

ما عبارتی را برای $\mathbf{V}_2$ لازم داریم که حاوی مقادیر معلوم باشد. آنگاه آن را بر $10\ \angle 0°$ V تقسیم خواهیم کرد.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

ما با جایگزینی H 1 و H 100 با امپدانس مربوط به آن‌ها یعنی J10 Ω و Jk Ω آغاز می‌کنیم (شکل ۷-۱۳(ب)). همچنین القای متقابل H 9 را هم با $J\omega M = J90\ \Omega$ عوض می‌نماییم.



شکل ۷-۱۳ (الف) مداری حاوی القاء متقابل که در آن نسبت $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ موردنظر است. (ب) القاهای متقابل و خودالقاء با امپدانس‌های متناظر جایگزین شده‌اند.

- ارائه طرح.

به‌نظر می‌رسد تکنیک مش روش خوبی باشد و ما نیز مداری با دو مش مشخص داریم.

- معادلات مناسب را بنویسید.

در حلقه سمت چپ علامت جمله متقابل با اعمال قرارداد نقطه معین می‌شود. چون $\mathbf{I}_2$ وارد پایانه بی‌نقطه L_2 می‌شود، ولتاژ متقابل در دوسر L_1 باید علامت مثبت را در پایانه بی‌نقطه داشته باشد. پس:

$$(1 + j10)\,\mathbf{I}_1 - j90\mathbf{I}_2 = 10\ \angle 0°$$

علامت جمله متقابل در حلقه دوم به طریقی مشابه حاصل می‌گردد. چون $\mathbf{I}_1$ وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود، جمله متقابل در حلقه سمت راست دارای مرجع مثبت خود در پایانه نقطه‌دار القاگر H 100 خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(400 + j1000)\mathbf{I}_2 - j90\mathbf{I}_1 = 0$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما دو معادله برای دو مجهول $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ داریم. به محض یافتن دو جریان، ولتاژ خروجی $\mathbf{V}_2$ از ضرب $\mathbf{I}_2$ در Ω 400 به دست می‌آید.

- اقدام به حل.

با حل دو معادلهٔ فوق به وسیله ماشین حساب می‌بینیم که

$$\mathbf{I}_2 = 0.172\angle -16.70°\ \text{A}$$

پس

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\,(0.172\angle -16.70°)}{10\angle 0°} = 6.880\angle -16.70°$$

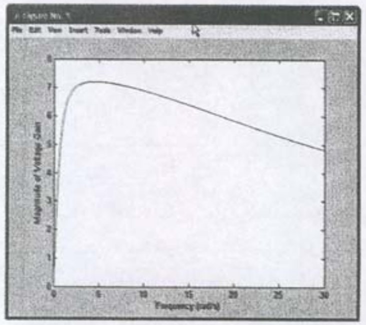
- صحت حل را تأیید کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

ملاحظه می‌شود که $\mathbf{V}_2$ از نظر اندازه بزرگتر از $\mathbf{V}_1$ است. آیا باید همیشه این انتظار را داشت؟ پاسخ منفی است. در بخش‌های بعد خواهیم دید که می‌توان ترانسفورماتورهایی ساخت که ولتاژ را هم افزایش و هم کاهش دهند. با این وجود می‌توان گمانه‌ای سریع زد و حداقل محدوده بالا و پایین را برای پاسخ به دست آورد. اگر مقاومت Ω 400 با یک مدار اتصال کوتاه جایگزین شود، آنگاه $\mathbf{V}_2 = 0$ خواهد شد. برعکس اگر مقاومت Ω 400 را با مدار باز جایگزین کنیم، آنگاه $\mathbf{I}_2 = 0$ خواهد بود و در نتیجه:

$$\mathbf{V}_1 = 1 + j\omega L_1\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1$$

از دو رابطه فوق می‌توان انتظار داشت که بزرگترین مقدار برای $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ برابر $8.955\ \angle 5.711°$ است. بنابراین جواب حداقل منطقی است.



شکل ۸ـ۱۳ بهره ولتاژ $|V_2/V_1|$ مدار شکل ۷ـ۱۳ (الف) به صورت تابعی از ω و برنامه متلب زیر ترسیم شده است.

```
>> w = linspace(0,30,1000);
>> num = j*w*3600;
>> for indx = 1:1000
den = 400 + j*500*w(indx) – 19*w(indx)*w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
>> plot(w, abs(gain));
>> xlabel('Frequency (rad/s)');
>> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

ولتاژ خروجی مدار شکل ۷-۱۳(الف) از لحاظ مقدار بزرگتر از ولتاژ ورودی است، به نحوی که افزایش ولتاژی را با این مدار می‌توان انتظار داشت. همچنین بررسی نسبت ولتاژ برحسب تابعی از ω نیز جالب توجه است. برای یافتن $\mathbf{I}_2(J\omega)$ در این مدار خاص، جملات معادلات حلقه را برحسب فرکانس زاویه‌ای نامشخص ω می‌نویسیم:

$$(1 + j\omega)\mathbf{I}_1 \qquad -j\omega\, 9\mathbf{I}_2 = 10 \angle 0^\circ$$

و

$$-j\omega 9\mathbf{I}_1 + (400 + j\omega 100)\mathbf{I}_2 = 0$$

از حل آن دو داریم:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

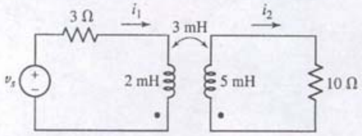
بنابراین نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی به صورت تابعی از فرکانس ω چنین خواهد شد:

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\mathbf{I}_2}{10} = \frac{j\omega 3600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

به این کسر گاهی **تابع تبدیل** مدار می‌گویند، در شکل ۸-۱۳ ترسیم و اندازه نقطهٔ اوج تقریباً 7 در فرکانس 4.6 rad/s می‌باشد. با این وجود در فرکانس‌های خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ، اندازه تابع تبدیل به کمتر از واحد می‌رسد.

مدار هنوز هم، به جز از برای منبع ولتاژ، غیرفعال است و تقویت (یا بهره) ولتاژ را نباید به اشتباه تقویت توان دانست. در $\omega = 10$ rad/s بهره ولتاژ 6.88 است ولی منبع ولتاژ ایده‌آل با ولتاژ پایانه 10 V، کلاً 8.07 W انرژی تولید می‌کند و از آن تنها 5.94 W به مقاومت 400 Ω انتقال می‌یابد. نسبت توان خروجی به توان منبع که آن را **بهره توان** می‌گویند، 0.736 است.

تمرین



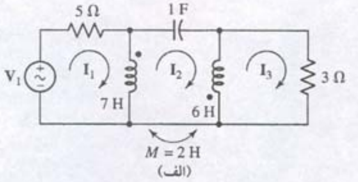
شکل ۹ـ۱۳

۲-۱۳ برای مدار شکل ۹-۱۳ معادلات حلقه را برای حلقه‌های چپ و راست بنویسید به‌شرطی که $V_s = 20e^{-1000t}V$ باشد.

جواب: $20e^{-1000t} = 3i_1 + 0.002di_1/dt - 0.003di_2/dt$؛ $10i_2 + 0.005di_2/dt - 0.003di_1/dt = 0$

مثال ۳ـ۱۳

مجموعه معادلات مناسبی برای مدار شکل ۱۰-۱۳(الف) بنویسید.



شکل ۱۰ـ۱۳ (الف) یک مدار سه‌حلقه با کوپل متقابل.

مدار حاوی سه مش یا حلقه بوده و سه جریان هم از قبل تخصیص یافته است. دوباره اولین گام ما جایگزینی هر دو القای متقابل و دو خودالقا با امپدانس‌های متناظر طبق شکل ۱۰-۱۳(ب) است. با اعمال قانون KVL به اولین حلقه و انتخاب $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2)$ به‌عنوان جریان در سیم‌پیچ دوم، علامت مثبتی برای جمله متقابل حاصل می‌گردد.

$$5\mathbf{I}_1 + 7j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}_1$$

یا

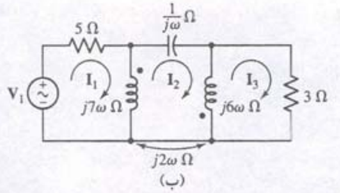
$$(5 + 7j\omega)\mathbf{I}_1 - 9j\omega\mathbf{I}_2 + 2j\omega\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1 \qquad (۳)$$

دومین حلقه دو جمله خودالقا و دو جمله القای متقابل دارد و نمی‌توان معادله را سرسری نوشت. داریم:

$$7j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + \frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_2 + 6j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

یا

$$-9j\omega\mathbf{I}_1 + \left(17j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)\mathbf{I}_2 - 8j\omega\mathbf{I}_3 = 0 \qquad (۴)$$



شکل ۱۰ـ۱۳ (ب) خازن 1F و القاهای متقابل و خودالقاء با امپدانس متناظر جایگزین شده‌اند.

(... ب)الاخره برای سومین حلقه

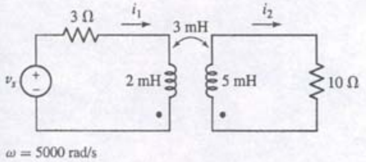
$$6j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3\mathbf{I}_3 = 0$$

یا

$$2j\omega\mathbf{I}_1 - 8j\omega\mathbf{I}_2 + (3 + 6j\omega)\mathbf{I}_2 = 0 \qquad (۵)$$

معادلات (۳) تا (۵) با هر روش مناسبی قابل حل می‌باشند.

تمرین



شکل ۱۱ـ۱۳

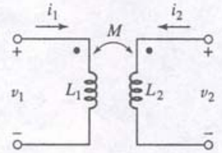
۳-۱۳ برای مدار شکل ۱۱-۱۳، معادله حلقه مناسبی را برحسب جریان‌های فیزوری $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ برای (الف) حلقه چپ، (ب) حلقه راست بنویسید.

جواب: $\mathbf{V}_s = (3 + J10)\mathbf{I}_1 - J15\mathbf{I}_2$، $0 = -J15\mathbf{I}_1 + (10 + J25)\mathbf{I}_2$.

۲-۱۳ ملاحظات انرژی

حال بیایید تا انرژی ذخیره شده در القاگرهای کوپل متقابل را بررسی کنیم. نتایج این مطالعه به دلایل متعددی مفید خواهد بود. ابتدا فرض $M_{12} = M_{21}$ را اثبات می‌کنیم و آن‌گاه حداکثر مقدار القاکنایی متقابل بین دو القاگر را معین خواهیم کرد.

برابری M_{21} و M_{12}



شکل ۱۲ـ۱۳ جفت سیم‌پیچ کوپل‌شده با یک القاکنایی متقابل $M_{12} = M_{21} = M$.

در هر دو سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۲-۱۳، جریان‌ها و ولتاژها و نقاط قطب مشخص شده‌اند. برای اثبات $M_{12} = M_{21}$ با صفر کردن همه جریان‌ها و ولتاژها آغاز می‌کنیم و به این ترتیب انرژی ذخیره شده اولیه در مدار صفر تصور خواهد شد.

سپس جفت پایانه‌های سمت راست را مدار باز کرده و جریان i_1 را از صفر تا مقدار ثابت I_1(dc) در زمان $t = t_1$ افزایش می‌دهیم. توان ورودی به شبکه از سمت چپ در هر لحظه از زمان برابر است با:

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

(و) توان ورودی از سمت راست برابر است با:

$$v_2 i_2 = 0$$

(پ)س انرژی ذخیره شده در شبکه هنگام $i_1 = I_1$ برابر است با:

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1\, dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

(ا)کنون i_1 را ثابت می‌گیریم، یعنی $i_1 = I_1$ و i_2 را از صفر در $t = t_1$ به مقدار ثابت I_2 در $t = t_2$ (م)ی‌رسانیم، پس انرژی انتقالی از منبع سمت راست چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2\, dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2\, di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

(د)ر هر صورت، به رغم ثابت بودن i_1، منبع سمت چپ در این فاصله زمانی مقداری انرژی به (م)دار تحویل خواهد داد:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1\, dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1\, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

(ان)رژی کل ذخیره شده در شبکه وقتی هر دو جریان i_1 و i_2 به مقادیر ثابتی برسند، برابر زیر است:

$$W_{total} = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

اکنون می‌توانیم جریان نهایی در این شبکه را با رساندن جریان‌ها به مقادیر نهایی‌شان ولی به ترتیب معکوس ایجاد کنیم، یعنی ابتدا i_2 را از صفر به I_2 برسانیم و سپس ضمن ثابت نگهداشتن آن، L_1 را از صفر تا I_2 افزایش دهیم، اگر باز هم انرژی ذخیره شده کل را برای آزمایش محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2$$

تنها اختلاف در دو رابطه انرژی کل تفاوت القاکنایی‌هایی متقابل M_{21} و M_{12} است. چون شرایط اولیه نهایی در شبکه یکسان است، بنابراین دو مقدار انرژی ذخیره شده باید برابر باشند. پس:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

و

$$W = \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 \qquad (۶)$$

اگر یکی از جریان‌ها وارد پایانه نقطه‌دار شود، در حالی که دیگری پایانه نقطه‌دار را ترک می‌کند، علامت جمله انرژی متقابل معکوس می‌گردد:

$$W = \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2 - MI_1I_2 \qquad (۷)$$

هر چند معادلات (۶) و (۷) با فرض مقادیر نهایی مثبت برای دو جریان به دست آمدند ولی واضح است که این مقادیر ثابت می‌توانند هر مقداری باشند. پس اگر به جای I_1 و I_2 مقادیر لحظه‌ای i_1 و i_2 را بگذاریم، باز هم این عبارت انرژی ذخیره شده در شبکه را به نحو صحیحی نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر می‌توانیم جریان‌های لحظه‌ای را هم در این معادله به کار ببریم.

$$w(t) = \tfrac{1}{2}L_1\,[i_1(t)]^2 + \tfrac{1}{2}L_2\,[i_2(t)]^2 \pm M\,[i_1(t)]\,[i_2(t)] \qquad (۸)$$

تنها شرطی که معادله (۸) بر آن متکی است، این است‌که به ازای صفر بودن هر دو جریان، انرژی ذخیره شده در شبکه صفر است.

ایجاد حد بالا برای M

اکنون به کمک معادله (۸) حد بالای M را پیدا می‌کنیم. چون $w(t)$ انرژی ذخیره شده در شبکه **غیرفعال** را نشان می‌دهد، در ازای مقادیر i_1، i_2، L_1 و L_2 یا M نمی‌تواند منفی باشد. بگذارید فرض کنیم که i_1 و i_2 هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است. از معادلهٔ (۸) تنها حالتی که انرژی ممکن است منفی باشد، عبارت است از:

$$w = \tfrac{1}{2}L_1i_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$w = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2\right)^2 + \sqrt{L_1L_2}i_1i_2 - Mi_1i_2$$

چون درواقع انرژی منفی نیست، سمت راست معادله فوق نمی‌تواند منفی گردد. البته اولین جمله ممکن است نزدیک به صفر باشد و به این ترتیب محدودیت ما این خواهد بود که دو جمله آخر نمی‌تواند منفی شود. پس

$$\sqrt{L_1L_2} \geq M$$

یا

$$M \leq \sqrt{L_1L_2} \qquad (۹)$$

بنابراین مقدار القاکنایی متقابل حد بالایی دارد. این القاکنایی متقابل نمی‌تواند از واسطه هندسی خودالقاکنایی سیم‌پیچ‌ها بیشتر شود. گرچه این برابری از فرض هم‌علامت بودن i_1 و i_2 حاصل شد ولی اگر i_1 و i_2 هم‌علامت نباشند، باز می‌توان نتیجه مشابهی به دست آورد و کافی است در معادله (۸) علامت مثبت را اختیار کنیم.

صحت نامساوی (۹) را با بررسی فیزیکی کوپل مغناطیسی هم می‌توان نشان داد. اگر i_2 را صفر بگیریم، i_1 در هر دو L_1 و L_2 شاری را می‌گذراند. واضح است که شار درون L_2 نمی‌تواند بزرگتر از L_1 باشد. زیرا شار کل از L_1 می‌گذرد. پس به طور کیفی، برای اندازه القاکنایی متقابل ممکن بین دو القاگر حد بالایی وجود دارد.

ضریب کوپل

سرعت نزدیک شدن M به مقدار ماکزیممش را ضریب کوپل می‌خوانیم و با رابطه زیر نشان می‌دهیم:

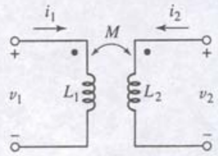
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \qquad (۱۰)$$

چون $M \leq \sqrt{L_1L_2}$

$$0 \leq k \leq 1$$

هر چقدر سیم‌پیچ‌ها به هم نزدیک‌تر باشند، ضریب کوپل بزرگتر حاصل می‌شود و نیز هر چه پیچش و جهت آن‌ها به تولید شار مغناطیسی کمک کند، ضریب کوپل یا تزویج بزرگتر خواهد بود. بالاخره برای داشتن ضریب کوپل بزرگتر می‌توان یک مسیر متمرکز ایجاد نموده و شار مغناطیسی را شدت بخشید. سیم‌پیچ‌هایی که ضریب کوپل نزدیک به واحد دارند، را **کوپل شدید** می‌گویند.

مثال ۴-۱۳



شکل ۱۳-۱۳ دو سیم‌پیچ با ضریب کوپل 0.6 . $L_1 = 0.4H$ و $L_2 = 2.5H$ است.

در شکل ۱۳-۱۳ فرض کنید $L_1 = 0.4$ H، $L_2 = 2.5$ H، $k = 0.6$ و $i_1 = 4i_2 = 20\cos(500\text{ t} - 20^\circ)$mA **باشد. کمیت‌های زیر را در** $t = 0$ **بیابید: (الف)** i_2 **(ب)** v_1 **(ج) انرژی کل ذخیره شده در سیستم.**

الف) $i_2(\text{t}) = 5\cos(500\text{t} - 20^\circ)$ mA پس $i_2(0) = 5\cos(-20^\circ) = 4.698$ mA

ب) برای تعیین مقدار v_1، باید نقش خودالقایی سیم‌پیچ 1 و القای متقابل سیم‌پیچ 2 را لحاظ کنیم. بنابراین با توجه به قرارداد نقطه داریم:

$$v_1(\text{t}) = L_1\frac{\text{d}i_1}{\text{dt}} + M\frac{\text{d}i_2}{\text{dt}}$$

برای محاسبه این کمیت، به M نیاز است. مقدار آن از معادله (۱۰) به دست می‌آید.

$$M = k\sqrt{L_1L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6\text{ H}$$

بنابراین

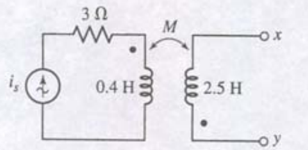
$$v_1(0) = 0.4\,[-10\,\sin(-20^\circ)] + 0.6\,[-2.5\,\sin(-20^\circ)] = 1.881\text{ V}$$

ج) انرژی کل از جمع انرژی ذخیره شده در هر القاگر به دست می‌آید. این انرژی سه جمله دارد، زیرا فرض شده است که دو سیم‌پیچ به طور مغناطیسی به هم کوپل شده‌اند. چون هر دو جریان وارد پایانه نقطه می‌شوند:

$$w(\text{t}) = \frac{1}{2}L_1\,[i_1(\text{t})]^2 + \frac{1}{2}L_2\,[i_2(\text{t})]^2 + \text{M}[i_1(\text{t})][i_2(\text{t})]$$

با توجه به بند (الف) که $i_2(0) = 4.698$ mA و $i_1(0) = 4i_2(0) = 18.79$ mA بود می‌بینیم که انرژی کل ذخیره شده در سیم‌پیچ در زمان $\text{t} = 0$ برابر $151.2\ \mu J$ است.

تمرین



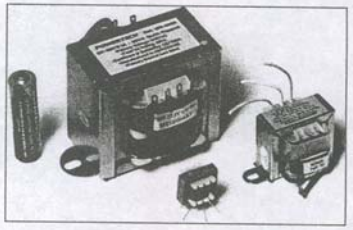
شکل ۱۴-۱۳

۱۳-۴ اگر در مدار شکل ۱۴-۱۳ جریان منبع $i_s = 2\cos 10t$ A باشد، انرژی کل ذخیره شده در شبکه غیرفعال را در $t = 0$ معین کنید به شرطی که $k = 0.6$ و پایانه‌های x و y (الف) باز رها شوند، (ب) اتصال کوتاه شوند.

جواب: 0.8 J ،0.512 J.

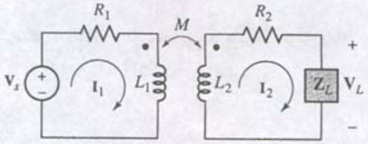
۱۳-۳ ترانسفورماتورهای خطی

اکنون آماده‌ایم تا دانش خود از کوپل مغناطیسی را در توصیف دو وسیله خاصی که هر یک مدلی حاوی القای متقابل است، پیاده کنیم. این دو وسیله **ترانسفورماتور** هستند، جمله‌ای که می‌توان آن را برای شبکه‌ای متشکل از دو یا چند سیم‌پیچ که به نحوی حساب شده کوپل شده‌اند، به کار برد (شکل ۱۵-۱۳). در این بخش ترانسفورماتورهای خطی را ملاحظه خواهیم کرد که مدل خوبی از ترانس‌های عملی به کار رفته در فرکانس‌های رادیویی و فرکانس‌های بالاتر است. در بخش بعد ترانس ایده‌آل را در نظر می‌گیریم که مدل ایده‌آلی از ترانس‌های عملی با ضریب کوپل واحد است.



شکل ۱۵-۱۳ گزینه‌ای از چند ترانس برای استفاده در الکترونیک باطری AA فقط به خاطر مقایسه آمده است.

در شکل ۱۶-۱۳ ترانسی با دو مش جریان دیده می‌شود. اولین حلقه که معمولاً حاوی منبع است، **اولیه** خوانده می‌شود در حالی که حلقه دوم معمولاً به بار وصل شده و **ثانویه** نام دارد. القاگرهای L_1 و L_2 را هم به ترتیب اولیه و ثانویه ترانس گویند. فرض بر این است که ترانس خطی باشد. این بدان معنی است که هیچ ماده مغناطیسی به کار نرفته است (این گونه مواد، ممکن است رابطه شار-جریان را غیرخطی کنند). البته در غیاب چنین موادی به سختی می‌توان به ضریب کوپلی بزرگتر از چند دهم نائل آمد. دو مقاومت نشان داده شده عبارتند از مقاومت سیم‌هایی که L_1 و L_2 از آن‌ها ساخته شده‌اند و نیز دیگر تلفات موجود.



شکل ۱۶-۱۳ یک ترانس خطی حاوی یک منبع در اولیه و یک بار در ثانویه. در هر دو بخش اولیه و ثانویه مقاومت هم لحاظ شده است.

امپدانس منعکسه

امپدانس ورودی را در پایانه‌های مدار اولیه ملاحظه کنید. معادلات دو تک‌حلقه عبارتند از:

$$\mathbf{V}_s = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad (۱۱)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \qquad (۱۲)$$

روابط فوق را با تعاریف زیر ساده می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$$

$$\mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

پس

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad (۱۳)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad (۱۴)$$

با حل معادله دوم برای یافتن $\mathbf{I}_2$ و جایگزینی نتیجه در معادله اول می‌توان امپدانس ورودی را به دست آورد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \qquad (۱۵)$$

$\mathbf{Z}_{in}$ امپدانسی است که از سیم‌پیچ اولیهٔ ترانسفورماتور دیده می‌شود.

قبل از دستکاری بیشتر این معادله می‌توان چند نتیجه جالب را از آن به دست آورد. اول اینکه این نتیجه مستقل از نقطه‌ها در روی هر یک از سیم‌پیچ‌ها است. اگر هر یک از نقطه‌های سیم‌پیچ

را جابه‌جا کنیم، تنها علامت M در معادلات (۱۱) الی (۱۴) تغییر می‌کند. پس می‌توان در عبارات فوق به جای M، $(-M)$ گذاشت و این تغییر علامت تأثیری بر معادله (۱۵) ندارد. همچنین توجه کنید که در معادله (۱۵) امپدانس ورودی به شرطی $\mathbf{Z}_{11}$ است که جمله تزویج یا کوپل به صفر کاهش یابد. با افزایش کوپلاژ، امپدانس ورودی با $\mathbf{Z}_{11}$ به اندازه $\omega^2 M^2 / \mathbf{Z}_{22}$ تغییر می‌یابد. جمله اخیر، **امپدانس منعکسه** خوانده می‌شود. طبیعت و نقش این تغییر امپدانس با بسط عبارت آشکارتر می‌گردد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

$\mathbf{Z}_{in}$ امپدانسی است که از سیم‌پیچ اولیه ترانس دیده می‌شود.

امپدانس منعکسه را گویا می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

چون $\omega^2 M^2 R_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$ مثبت است، واضح است که وجود ثانویه، تلفات را در اولیه افزایش می‌دهد. به بیان دیگر، وجود ثانویه در اولیه با افزایش مقاومت R_1 خود را نشان می‌دهد و نیز رآکتانسی که ثانویه در مدار اولیه ایجاد می‌کند، دارای علامت مخالف با X_{22}، یعنی رآکتانس خالص حلقه دوم است. رآکتانس X_{22} مجموع ωL_2 و X_L می‌باشد. علامت X_{22} برای بارهای القایی، مثبت و برای بارهای خازنی بسته به اندازه رآکتانس بار، مثبت یا منفی است.

تمرین

۱۳-۵ مقادیر عناصر برای یک ترانس خطی عبارتند از $R_1 = 3\ \Omega$، $R_2 = 6\ \Omega$، $L_1 = 2$ mH، $L_2 = 10$ mH و $M = 4$ mH. اگر $\omega = 5000$ rad/s باشد، $\mathbf{Z}_{in}$ را در ازای $\mathbf{Z}_L$ (الف) $10\ \Omega$، (ب) $J20\ \Omega$ (ج) $10 + J20\ \Omega$ (د) $-J20\ \Omega$ به دست آورید.

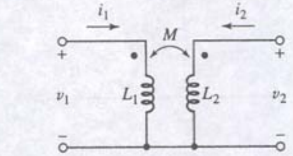
جواب: $5.32 + j2.74\ \Omega$؛ $3.49 + j4.33\ \Omega$؛ $4.24 + j4.57\ \Omega$؛ $5.56 - j2.82\ \Omega$.

شبکه‌های معادل T و Π

غالباً جایگزینی یک ترانس با یک شبکه معادل فرم T و یا Π مفید است. اگر مقاومت‌های اولیه و ثانویه را از ترانس جدا کنیم تنها القاگرهای متقابل باقی می‌مانند (شکل ۱۷-۱۳). دقت کنید دو پایانه پایین ترانس به یکدیگر وصل می‌باشند تا یک شبکه سه پایانه به وجود آید. این کار را به این علت انجام می‌دهیم که هر دو شبکه معادل حاصل شبکه‌های سه پایانه‌اند. معادلات دیفرانسیل توصیف کننده این مدار عبارتند از:

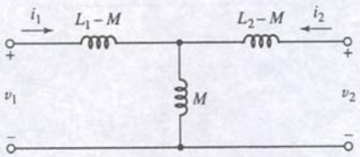
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad (۱۶)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (۱۷)$$



شکل ۱۷-۱۳ یک ترانس مفروض که با یک مدار T یا Π جایگزین می‌شود.

شکل این دو معادله آشنا به نظر می‌رسد و به آسانی می‌توان آن‌ها را با تحلیل مش تفسیر کرد. اکنون i_1 را در جهت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) و i_2 را در خلاف آن در نظر می‌گیریم تا دقیقاً با جریان‌های شکل ۱۷-۱۳ یکی باشند. جمله $M\ di_2/dt$ در معادله (۱۶) و $M\ di_1/dt$ در معادله (۱۷) نشان می‌دهند که دو مش باید یک خود القای مشترک M داشته باشند. چون خودالقای کل حول مش سمت چپ L_1 است، یک خودالقای $L_1 - M$ باید در مش اول در نظر گرفته شود ولی نه در مش دوم. به همین طریق خودالقای $L_2 - M$ در مش دوم لازم است ولی نه در مش اول. شبکهٔ معادلِ حاصل در شکل ۱۸-۱۳ نشان داده شده است. یکسان بودن روابط v_1، v_2، i_1 و i_2 برای دو شبکه معادل بودن آن‌ها را تضمین می‌کند.



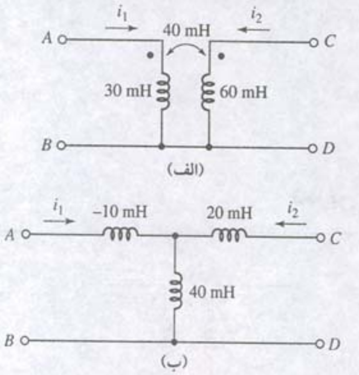
شکل ۱۸-۱۳ معادل T ترانس شکل ۱۷-۱۳.

اگر یکی از نقطه‌های ترانس داده شده در پایانه دیگر سیم‌پیچ قرار داشته باشد، علامت جمله‌های متقابل در معادلات (۱۶) و (۱۷) منفی می‌گردد. این به معنی تعویض M با $(-M)$ است و انجام این عمل در شبکه معادل شکل ۱۸-۱۳، منجر به شبکه معادل صحیحی خواهد شد. مقدار سه القاکنایی جدید، $L_1 + M$، $-M$ و $L_2 + M$ هستند.

تمام القاکنایی‌ها در معادل T، همگی خودالقا می‌باشند و در این شبکه القاکنایی متقابل وجود ندارد. ممکن است القاکنایی این مدار معادل منفی شود، ولی اگر هدف تحلیل ریاضی است، منفی بودن آن اصلاً مهم نیست. البته در صورت منفی بودن القاکنایی ساخت چنین مدار معادلی در شبکه ممکن نخواهد بود. با این وجود مواردی وجود دارد که در سنتز شبکه‌ها به دست آوردن تابع تبدیل منجر به پیدایش شبکه T با القاکنایی منفی می‌گردد. در این حالت، باید با یک ترانسفورماتور خطی مناسب چنین شبکه‌ای را ساخت.

مثال ۵-۱۳

معادل T در ترانس خطی شکل ۱۹-۱۳ (الف) را پیدا کنید.



شکل ۱۹-۱۳ (الف) مثالی از ترانس خطی. (ب) شبکه تونن ترانس.

می‌بینیم که $L_1 = 30$ mH، $L_2 = 60$ mH و $M = 40$ mH است. هر دو نقطه در پایانه‌های بالایی شکل ۱۷-۱۳ قرار دارند. پس در بازوی بالای چپ $L_1 - M = -10$ mH در بالای سمت راست $L_2 - M = 20$ mH و بخش وسط هم $M = 40$ mH می‌باشد. معادل کامل T در شکل ۱۹-۱۳(ب) ملاحظه می‌گردد.

برای نمایش هم‌ارزی این دو، بگذارید پایانه‌های C و D را مدار باز فرض کنیم و $v_{AB} = 10\cos 100t$ V را به ورودی شکل ۱۹-۱۳(الف) اعمال نماییم. پس:

$$i_1 = \frac{1}{30\times10^{-3}}\int 10\cos(100t)\,dt = 3.33\sin 100t \text{ A}$$

و

$$v_{CD} = M\frac{di}{dt} = 40\times10^{-3}\times3.33\times100\cos 100t = 13.33\cos 100t \text{ V}$$

با اعمال همان ولتاژ در معادل T داریم:

$$i_1 = \frac{1}{(-10+40)10^{-3}}\int 10\cos(100t)\,dt = 3.33\sin 100t \quad \text{A}$$

که همان مقدار قبلی است. همچنین ولتاژ در C و D برابر با ولتاژ دوسر القاگر 40 mH می‌گردد. پس:

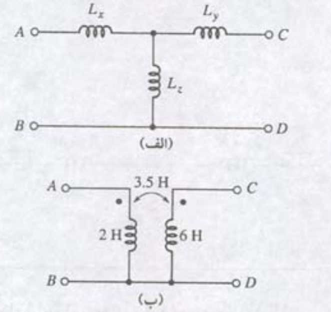
$$v_{CD} = 40\times10^{-3}\times3.33\times100\cos 100t = 13.33\cos 100t \text{ V}$$

و دو شبکه نتیجه یکسانی می‌دهند.

تمرین

۶-۱۳ (الف) اگر دو شبکه شکل ۲۰-۱۳ معادل باشند، مقادیر L_x، L_y و L_z را مشخص کنید. (ب) اگر نقطه در ثانویه شکل ۲۰-۱۳ (ب) در پایین سیم‌پیچ باشد، محاسبه را تکرار کنید.

جواب: 1.5-، 2.5 و 3.5 H؛ 5.5، 9.5 و -3.5 H.



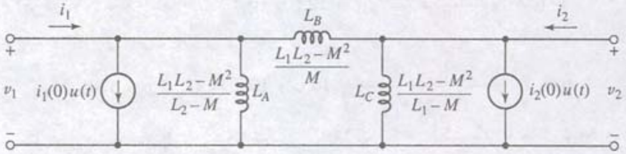
شکل ۲۰-۱۳

شبکه Π معادل به سادگی به دست نمی‌آید. این شبکه بسیار پیچیده‌تر است و آن‌قدر هم کاربرد ندارد. برای یافتن آن باید معادله (۱۷) را برای di_2/dt حل و نتیجه را در معادله (۱۶) قرار داد:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

یا

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}v_2$$



شکل ۲۱-۱۳ شبکه Π معادل ترانسفورماتور شکل ۱۷-۱۳.

اکنون اگر از ۰ تا t انتگرال بگیریم، داریم:

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,dt - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,dt \qquad (۱۸)$$

به طریقی مشابه داریم:

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,dt + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,dt \qquad (۱۹)$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) را می‌توان به عنوان جفت معادلات گره تصور کرد، برای تهیه مقادیر اولیه مناسب باید یک منبع جریان پله را در هر گره نصب نمود. ضرایب هر انتگرال فرم کلی عکس القاکنایی‌های معادل معینی را دارند. بنابراین ضریب دوم در معادله (۱۸)، یعنی $M/(L_1L_2 - M^2)$ برابر $1/L_B$ یا عکس القاکنایی بین گره‌های 1 و 2 در معادل Π طبق شکل ۲۱-۱۳ می‌باشد. پس:

$$L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

اولین ضریب در معادله (۱۸) یعنی $L_2/(L_1L_2 - M^2)$ برابر $1/L_A + 1/L_B$ است. پس:

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

یا

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

سرانجام:

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

در شبکه معادل Π هیچ کوپل مغناطیسی بین القاگرها وجود ندارد و جریان‌های اولیه در سه خود القاگر صفر می‌باشند.

برای جبران اثر جابه‌جاشدن هریک از نقطه‌های ترانس، کافی است علامت M را در شبکه معادل منفی کنیم. در این‌جا هم همچون شبکه T، ممکن است در شبکه Π مقدار خودالقا منفی باشد.

مثال ۶-۱۳

شبکه معادل Π ترانس در شکل ۱۹-۱۳(الف) را پیدا کنید.

جریان‌های اولیه صفر می‌شوند. چون جمله $L_1L_2 - M^2$ بین L_A، L_B و L_C مشترک است، اول آن را محاسبه می‌کنیم:

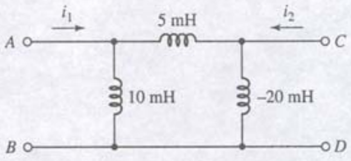
$$30\times10^{-3}\times60\times10^{-3} - (40\times10^{-3})^2 = 2\times10^{-4} \text{ H}^2$$

بنابراین

$$L_A = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2\times10^{-4}}{(20\times10^{-3})} = 10 \text{ mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20 \text{ mH}$$

و $L_B = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{M} = 5$ mH. شبکه Π معادل در شکل ۲۲-۱۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۲۲-۱۳ معادل Π ترانس خطی شکل ۱۹-۱۳ (الف). فرض بر این است که $i_1(0) = 0$ و $i_2(0) = 0$ باشد.

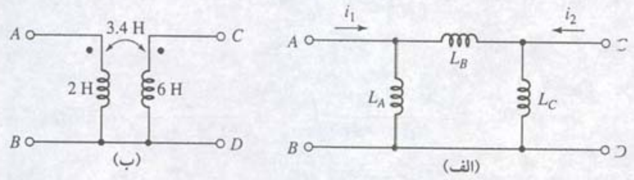
اگر دوباره نتیجه را با فرض $v_{AB} = 10 \cos 100t$ V تست کنیم و پایانه‌های C - D را باز بگذاریم، ولتاژ خروجی به راحتی از تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$v_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}}\, 10 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

که مثل قبل است. بنابراین شبکه شکل ۲۲–۱۳ به لحاظ الکتریکی معادل شبکه‌های شکل ۱۹–۱۳ (الف) و (ب) می‌باشد.

تمرین

۷–۱۳ اگر شبکه‌های شکل ۲۳–۱۳ معادل باشند، مقادیر L_A، L_B و L_C را مشخص کنید (به mH).



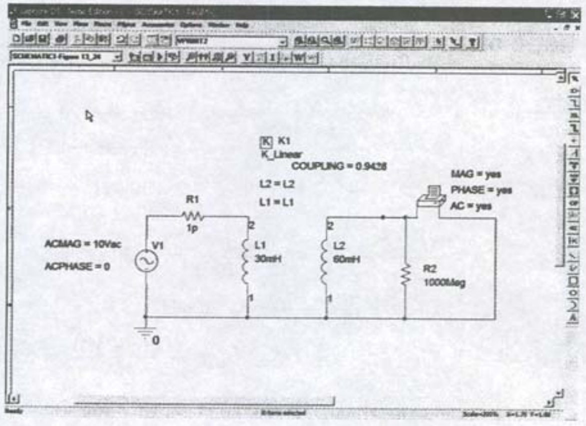
شکل ۲۳–۱۳

جواب: $L_A = 169.2$ mH، $L_B = 129.4$ mH و $L_C = -314.3$ mH.

تحلیل کامپیوتری

توانمندی در شبیه‌سازی مدارهایی که حاوی القاکنایی کوپل مغناطیسی‌اند، خصوصاً با کاهش روزافزون ابعاد مدارهای مدرن، مهارتی مفید است. با نزدیک شدن حلقه‌ها و یا بخش‌هایی از رساناها به واسطه میدان‌های پراکنده با یکدیگر کوپل می‌گردند و با هم واکنش نشان می‌دهند. PSpice اجازه می‌دهد تا با جعبه اجزای K_Linear این اثر را بررسی کنیم. این مؤلفه جهت القاگرها را در شماتیک با ضریب k به هم مرتبط می‌سازد و $0 \leq k \leq 1$ است.

مثلاً فرض کنید که مدار شکل ۱۹–۱۳(الف) را که از دو سیم‌پیچ تشکیل و کوپل آن با القای متقابل $M = 40$ mH توصیف شده است، بخواهیم شبیه‌سازی کنیم. این کمیت متناظر با ضریب کوپل $k = 0.9428$ است. مدار مبنای مربوطه در شکل ۲۴–۱۳ ملاحظه می‌شود. می‌بینید که هیچ نقطه‌ای در کنار سمبل القاگر وجود ندارد. وقتی که القاگر افقی روی شماتیک قرار گیرد، پایانه نقطه‌دار در سمت چپ است. این پایه‌ای است که نماد حول آن می‌چرخد و دقت کنید که جعبه محاوره K_Linear به طور دلخواه هر جایی می‌تواند باشد. دو القاگر کوپل شده L_1 و L_2 همراه با ضریب کوپل در کادر محاوره اجزا داده شده‌اند.



شکل ۲۴–۱۳ شماتیک مداری که باید شبیه‌سازی شود.

مدار به یک منبع ولتاژ سینوسی 100 rad/s (15.92 Hz) وصل است. همچنین لازم است تا دو مقاومت را به شماتیک بیفزاییم تا PSpice بدون تولید هر پیام خطایی کار کند. ابتدا یک مقاومت کوچک بین منبع ولتاژ و L_1 قرار داده می‌شود. برای حداقل کردن اثر آن مقاومت 1 pΩ انتخاب شده است. دوم، یک مقاومت 1000 MΩ (در واقع بینهایت) به L_2 وصل است. خروجی شبیه‌سازی، یک ولتاژ با اندازهٔ 13.33 V و زاویهٔ فاز -3.819×10^{-8} درجه (تقریباً صفر) است که با محاسبه دستی تجانس دارد.

PSpice دو مدل ترانس دیگر نیز دارد، یکی ترانس خطی XFRM_LINEAR و دیگری ترانس ایده‌آل XFRM_NONLINEAR که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند. در ترانس خطی مقادیر ضریب کوپل برای هر دو القاکنایی سیم‌پیچ باید معلوم باشد. ترانس ایده‌آل همان‌طور که خواهیم دید، نیاز به ضریب کوپل دارد ولی در ترانس ایده‌آل مقدار القاکنایی بینهایت یا نزدیک به بینهایت است. بنابراین پارامتر لازم برای بخش XFRM_NONLINEAR تعداد دور هر سیم‌پیچ است.

۴–۱۳ ترانسفورماتور ایده‌آل

یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی از یک ترانس باکوپل یا تزویج بالا است و در آن ضریب کوپلاژ تقریباً برابر یک، و راکتانس القاگرهای اولیه و ثانویه در مقایسه با امپدانس‌های متصل به اولیه و ثانویه بسیار بزرگ است. برای دستیابی به این ویژگی در محدوده‌ای از فرکانس‌ها از هسته آهنی استفاده می‌شود. می‌توان ترانس هسته آهنی را به‌سادگی با جایگزینی ترانس با ترانس ایده‌آل تحلیل کرد. ترانس ایده‌آل مدل مرتبه اولی از ترانس هسته آهنی است.

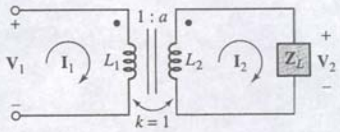
نسبت دور در یک ترانس ایده‌آل

در مورد ترانس ایده‌آل با مفهوم جدیدی به نام **نسبت دور** a سروکار خواهیم داشت. خودالقای یک سیم‌پیچ متناسب با مربع تعداد دور سیمی است که سیم‌پیچ را می‌سازد. این رابطه به شرطی معتبر است که شار ناشی از جریان در سیم‌پیچ از تمام دورها بگذرد. برای ایجاد رابطه‌ای کمّی لازم است، مفاهیم الکترومغناطیسی را به کار ببریم. این کار در بحث تحلیل مدار ماگنجانده نشده است. با این وجود یک بحث کیفی هم می‌تواند کافی باشد. اگر جریان i در یک سیم‌پیچ N دور جاری شود، شار حاصل N برابر شار ناشی از یک دور سیم‌پیچ است. اگر N دور را همزمان تصور کنیم، آنگاه همه شار قطعاً همه دورها را در برمی‌گیرد. با تغییر زمانی جریان و شار، ولتاژی در سیم‌پیچ القا می‌شود مسلماً ولتاژ القایی در سیم‌پیچ N دوری باید N برابر ولتاژ یک دور باشد. به این دلیل، تناسب بین القاکنایی و مربع تعداد دورها از این‌جا ناشی می‌شود. پس:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \qquad (۲۰)$$

یا

$$\boxed{a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (۲۱)$$



شکل ۲۵–۱۳ یک ترانسفورماتور ایده‌آل با بار Z_L در ثانویهٔ آن.

شکل ۲۵–۱۳ یک ترانس ایده‌آل را که بار به ثانویه آن وصل است، نشان می‌دهد. طبیعت ایده‌آل در ترانس به چند طریق نشان داده شده است: یکی این‌که بین دو سیم‌پیچ خطوط موازی

عمدی رسم شده تا نمایشگر ورق‌های آهنی در هسته ترانس باشد. ضریب کوپل 1 و نیز علامت a : 1 نسبت دور N_1 به N_2 را نشان می‌دهد.

بگذارید این ترانس را در حالت ماندگار سینوسی تحلیل کنیم تا فرضیات خود را در ساده‌ترین فرم ببینیم. دو معادله حلقه وجود دارد:

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad (۳۲)$$

$$0 = j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \qquad (۳۳)$$

ابتدا امپدانس ورودی را تعیین می‌کنیم. با حل معادله (۲۳) برای یافتن $\mathbf{I}_2$ و جایگزینی آن در معادله (۲۲) داریم:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

و

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

چون $k = 1$، $M^2 = L_1L_2$ است، پس:

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

در کنار ضریب کوپل واحد، دیگر مشخصه یک ترانس ایده‌آل وجود امپدانس خیلی بالا در اولیه و ثانویه سیم‌پیچ‌ها است که از فرکانس کار هم مستقل می‌باشد. این خصوصیت بیان می‌کند که حالت ایده‌آل برای L_1 و L_2 گرایش آن‌ها به سمت بینهایت است. با این وجود، نسبت آن‌ها باید معین باقی بماند که با نسبت دورها مشخص می‌شود. پس:

$$L_2 = a^2 L_1$$

و

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1}$$

اکنون اگر L_1 بینهایت شود، هر دو جمله در سمت راست عبارت فوق بینهایت خواهد شد و حاصل نامعین است. پس لازم است ابتدا دو جمله را ترکیب کنیم.

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} \qquad (۳۴)$$

یا

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L/j\omega L_1 + a^2} \qquad (۳۵)$$

اکنون با $L_1 \to \infty$ می‌بینیم که

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} \qquad (۳۶)$$

در قبال $\mathbf{Z}_L$ معین است.

این نتیجه چند نکته جالب در بردارد، که حداقل یکی از آن‌ها با مشخصات ترانس خطی متناقض است. امپدانس ورودی یک ترانس ایده‌آل متناسب با امپدانس بار است و ثابت تناسب هم عکس مربع نسبت دورها است. به بیان دیگر، اگر امپدانس بار از نوع امپدانس خازنی باشد، آنگاه امپدانس ورودی از نوع خازنی است. در ترانس خطی، با این وجود، امپدانس منعکسه تغییر علامت می‌داد و بار خازنی به صورت القایی در اولیه ظاهر می‌شد. علت را چنین می‌توان تفسیر کرد که اولاً $\mathbf{Z}_L / a^2$ امپدانس منعکسه نیست، گرچه به اشتباه آن

را به این نام می‌خوانند. در ترانس ایده‌آل امپدانس منعکسه واقعی بینهایت است وگرنه امپدانس بینهایت القاگر اولیه حذف نمی‌شد. این عمل حذف در صورت معادله (۲۴) رخ می‌دهد. امپدانس $\mathbf{Z}_L / a^2$ جمله کوچکی است که به دلیل عدم حذف کامل باقی می‌ماند. قسمت رآکتیو امپدانس منعکسه واقعی ترانس ایده‌آل هم تغییر علامت می‌دهد. با این وجود، اثر رآکتانس بینهایت سیم‌پیچ اولیه و رآکتانس منعکسه بینهایت ولی با علامت منفی ثانویه حذف می‌گردد.

بنابراین مهمترین مشخصه ترانس ایده‌آل قابلیت تغییر اندازه امپدانس یا بهتر بگوییم تغییر سطح امپدانس است. ترانس ایده‌آل اولیه‌ای که 100 دور سیم‌پیچ اولیه و 10000 دور سیم‌پیچ ثانویه دارد، نسبت دور آن 10000/100 یا 100 خواهد بود. سپس هر امپدانسی که به دو سر ثانویه نصب گردد، با ضریب 100^2 یا 10000 کاهش می‌یابد. درواقع یک مقاومت 20000Ω، تنها $2\ \Omega$ و هر القاگر 200 mH همچون $20\ \mu H$ و هر خازن 100 PF به مقدار $1\ \mu F$ به نظر خواهد رسید. اگر محل سیم‌پیچ اولیه و ثانویه تعویض شود، آنگاه $a = 0.01$ بوده و امپدانس بار بزرگ می‌شود. در عمل، همیشه این تغییراندازه رخ نمی‌دهد، زیرا به یاد داریم که در قدم آخر محاسبه امپدانس ورودی و میل L_1 در معادله (۲۵) به سمت بینهایت، لازم شد که $\mathbf{Z}_L$ را در مقایسه با $j\omega L_1$ نادیده بگیریم. چون L_2 هرگز بینهایت نمی‌شود، اگر امپدانس بار خیلی بزرگ باشد، مدل ترانس ایده‌آل هرگز معتبر نیست.

استفاده از ترانس‌ها برای تطبیق امپدانس

مثالی عملی از کاربرد یک ترانس آهنی به عنوان تغییر دهنده سطح امپدانس، اتصال یک تقویت کننده صوتی لامپی متصل به بلندگو است. برای دستیابی به حداکثر توان انتقالی می‌دانیم که مقاومت بار باید برابر با مقاومت داخلی منبع باشد. معمولاً بلندگو مقاومتی در حد چند اهم (و اغلب از جنس اهمی) دارد، در حالی که تقویت کننده توان، مقاومتی چند هزار اهمی را از خود به نمایش می‌گذارد. پس ترانسی با $N_2 < N_1$ لازم است. مثلاً اگر تقویت کننده (یا ژنراتور) امپدانس داخلی $4000\ \Omega$ داشته ولی مقاومت بلندگو $8\ \Omega$ باشد، آنگاه:

$$\mathbf{Z}_g = 4000 = \frac{\mathbf{Z}}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

یا

$$a = \frac{1}{22.4}$$

خواهد بود. پس:

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

بین جریان‌های اولیه و ثانویه $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ در ترانس ارتباط ساده‌ای وجود دارد. از معادله (۲۳) داریم:

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

اجازه می‌دهیم تا L_2 بینهایت شود و بنابراین:

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

یا

$$\boxed{\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a}} \qquad (۳۷)$$

بنابراین نسبت جریان‌های اولیه و ثانویه همان نسبت دورها است. اگر $N_2 > N_1$ باشد، آنگاه $a > 1$ است و آشکار است که جریان بیشتر در تعداد دور کمتر وجود خواهد داشت. به بیان دیگر:

$$N_1 \mathbf{I}_1 = N_2 \mathbf{I}_2$$

اگر هر یک از دو جریان معکوس شود و یا محل نقطه ترانس عوض گردد، نسبت جریان‌ها منفی نسبت دورها خواهد بود.

در مثالی که ارائه شد و در آن یک ترانس ایده‌آل برای تغییر سطح امپدانس و تطبیق بلندگوی تقویت کننده به کار رفت، جریان 50 mA rms با فرکانس 1000 Hz در اولیه موجب تولید جریان 1.12 A با فرکانس 1000 Hz در ثانویه شده توان انتقالی به بلندگو $(1.12)^2 8$ یا 10 W می‌گردد و توان انتقال یافته به تقویت کننده هم همان $(0.05)^2 4000$ یا 10 W است. پاسخ مورد تأیید است زیرا یک ترانس ایده‌آل نه حاوی بار فعال است تا تولید توان کند و نه مقاومتی دارد تا توان را جذب نماید.

استفاده از ترانس در تنظیم سطح ولتاژ

چون توان حمل شده به ترانس ایده‌آل مثل توان انتقالی به یک بار است ولی جریان‌های اولیه و ثانویه با نسبت دور مناسب می‌باشند، منطقی است که ولتاژهای اولیه و ثانویه به نسبت دورها باشند. اگر ولتاژ ثانویه یا ولتاژ بار را با رابطه زیر تعریف کنیم:

$$V_2 = I_2 Z_L$$

و ولتاژ اولیه در دو سر L_1 باشد، آنگاه:

$$V_1 = I_1 Z_{in} = I_1 \frac{Z_L}{a^2}$$

در این صورت نسبت دو ولتاژ چنین است:

$$\frac{V_2}{V_1} = a^2 \frac{I_2}{I_1}$$

یا

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (۲۸)$$

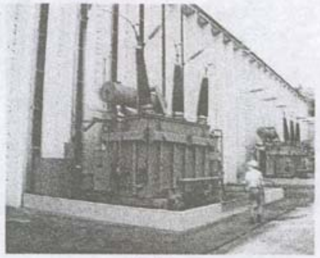
بنابراین نسبت ولتاژ ثانویه به ولتاژ اولیه برابر نسبت دورها است. باید توجه کرد که این معادله عکس معادله (۲۷) است و این خود منشأ اشتباه برای بسیاری از دانشجویان می‌باشد. این نسبت می‌تواند با معکوس کردن ولتاژ یا تغییر محل نقطه منفی گردد.

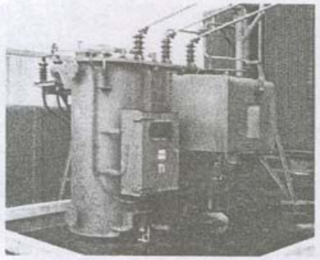
به این ترتیب با انتخاب هر نسبت دوری می‌توان هر ولتاژ ac را به هر ولتاژ ac دیگر تبدیل کرد. اگر $a > 1$ باشد، ولتاژ ثانویه بیشتر از اولیه است و چیزی را که به آن امروزه **ترانس افزاینده** می‌گویند خواهیم داشت. اگر $a < 1$ باشد، ولتاژ ثانویه کوچکتر از اولیه می‌باشد و به آن **ترانس کاهنده** می‌گوییم. شرکت‌های تولید برق معمولاً ولتاژ را بین 12 kV تا 25 kV تولید می‌کنند. گرچه این سطح ولتاژ بالا است ولی تلفات انتقال در فواصل طولانی را با افزایش سطح ولتاژ به حدود چند صد هزار ولت توسط ترانس افزاینده می‌توان کاهش داد (شکل ۲۶-۱۳ (الف)). سپس این ولتاژ به وسیله ترانس کاهنده به چند ده کیلووات در پست‌های محلی توزیع کاهش می‌یابد (شکل ۲۶-۱۳(ب)). ترانس‌های کاهنده بیشتر که در خارج ساختمان نصب می‌شوند می‌توانند ولتاژ را به سطح 110 یا 220 V که مورد استفاده است برسانند (شکل ۲۶-۱۳(ج)). از ترکیب معادلات (۲۷) و (۲۸) داریم:

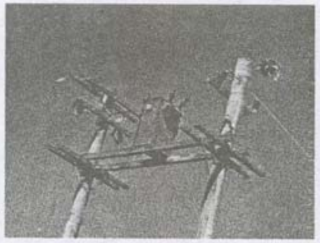
$$V_2 I_2 = V_1 I_1$$

ملاحظه می‌شود که ولت آمپرهای اولیه - ثانویه برابرند. اندازه این حاصل‌ضرب معمولاً به‌عنوان حداکثر مجاز ترانس‌های قدرت شناخته می‌شوند. اگر بار دارای زاویه فاز θ باشد، یعنی:

$$Z_L = |Z_L| \angle \theta$$


(الف)


(ب)


(ج)

شکل ۲۶-۱۳ (الف) ترانس افزاینده که در افزایش ولتاژ خروجی برای ارسال به خط انتقال به‌کاررفته است. (ب) پست‌های ترانس به‌کاررفته برای کاهش ولتاژ از سطح 220 kV به چند ده کیلوولت جهت توزیع محلی. (ج) ترانس‌های کاهنده برای کاهش سطح ولتاژ توزیع به 240 V جهت مصارف انرژی خانگی.

آنگاه V_2 از I_2 به اندازه θ پیشفاز است. به‌علاوه امپدانس Z_L / a^2 بوده و V_1 نیز از I_1 به اندازه θ. اگر جریان و ولتاژ با مقدار rms نمایش داده شوند، آنگاه $|V_2|\,|I_2|\cos\theta$ باید برابر با $|V_1|\,|I_1|\cos\theta$ باشد و در این هنگام همه توان انتقالی به پایانه‌های اولیه به بار منتقل می‌گردد و هیچ انرژی انتقالی به یک ترانس ایده‌آل، جذب آن نمی‌شود. مشخصه ترانس ایده‌آلی را که به دست آوردیم با تحلیل فیزوری هم قابل دستیابی‌اند. البته این مشخصه‌ها در پاسخ حالت ماندگار سینوسی صحیح‌اند ولی دلیلی بر صحت آن‌ها در پاسخ کامل وجود ندارد. درواقع این مشخصات در حالت کلی هم معتبرند. این مطلب را به راحتی می‌توان با استفاده از حوزه فرکانسی نشان داد. در هر حال تحلیل ما حاوی تقریب‌هایی است که باید در مدل‌های ترانس‌های واقعی اعمال شود تا ترانس ایده‌آل به دست آید. مثلاً دیدیم که راکتانس ثانویه باید از بزرگترین امپدانسی که به آن متصل می‌گردد، خیلی بزرگتر باشد. بنابراین شرایطی را به دست آوردیم که تحت آن یک ترانس به جز آن، به صورت ایده‌آل عمل نمی‌کرد.

مثال ۷-۱۳

برای مدار شکل ۲۷-۱۳ توان متوسط مصرفی را در مقاومت 10 kΩ معین کنید.

توان متوسط مصرفی در مقاومت 10 kΩ برابر است با

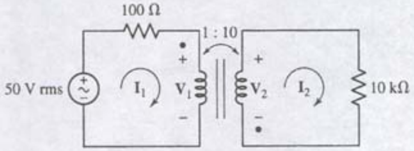
$$P = 10000\,|I_2|^2$$

منبع 50 V rms امپدانس ورودی ترانس را Z_L / a^2 یا 100 Ω حس می‌کند. بنابراین:

$$I_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

از معادله (۲۷) داریم $I_2 = (1/a) I_1 = 25$ mA rms. بنابراین درمی‌یابیم که مقاومت 10 kΩ، 6.25 W توان مصرف می‌کند.

در این مثال از زوایای فاز صرفنظر شده است زیرا در محاسبه توان متوسط تلف شده در یک مقاومت بار خالص اهمی نقشی ندارند.



شکل ۲۷-۱۳ یک مدار ساده با ترانسی ایده‌آل.

تمرین

۸-۱۳ مثال ۷-۱۳ را با استفاده از ولتاژها برای یافتن توان تلف شده تکرار کنید.

جواب: 6.25 W

رابطه ولتاژ در حوزه زمان

اکنون ببینیم که کمیت‌های حوزه زمان v_1 و v_2 چگونه در یک ترانس ایده‌آل با هم مرتبط‌اند. با مراجعه به شکل ۱۷-۱۳ با ملاحظه دو معادله (۱۶) و (۱۷) که این ارتباط را بیان می‌کنند و حل di_2/dt در معادله دوم و جایگزینی در معادله اول داریم:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

با این وجود برای ضریب کوپل واحد، $M^2 = L_1 L_2$ بوده و خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{M}{L_2} v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\, v_2 = \frac{1}{a} v_2$$

پس رابطه بین ولتاژ اولیه و ثانویه در پاسخ کامل حوزه زمان هم صدق می‌کند.

عبارتی برای ارتباط جریان اولیه و ثانویه در حوزه زمان از تقسیم طرفین معادله (۱۶) بر L_1 خیلی سریع‌تر حاصل می‌گردد.

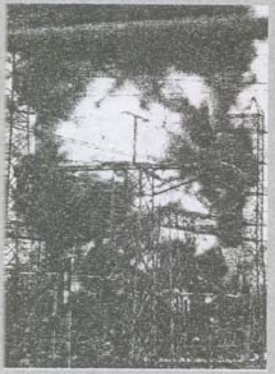
دو طرف معادله (۱۶) را بر L_1 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a \frac{di_2}{dt}$$

کاربرد عملی

ترانسفورماتورهای ابررسانا

در بسیاری از موارد، از انواع تلفاتی که ممکن است در یک ترانس خاص صورت گیرد، صرفنظر کردیم. با این وجود، هنگام بررسی ترانس‌های قدرت باید به این تلفات توجه خاصی نمود حتی اگر بازده آن‌ها ۹۷٪ یا بالاتر باشد. گرچه چنین راندمانی ممکن است عدد تقریباً ایده‌آلی به نظر برسد ولی در جریان‌های چند هزار آمپری، این بازده مقدار قابل توجهی تلفات انرژی دارد. مثلاً وقتی جریانی از سیم‌پیچی بگذرد، مقاومت منجر به تلفات i^2R می‌گردد و به این معنی است که توان جذب شده به وسیلهٔ سیم‌ها با مربع جریان ارتباط دارد و به صورت گرما تلف می‌گردد. با افزایش دما، مقاومت هم بالا می‌رود و لذا توان تلف شده i^2R نیز در سیم اضافه خواهد شد. همچنین دمای بالا سبب تخریب عایق سیم و بنابراین کوتاه شدن عمر ترانس می‌شود. در نتیجه بسیاری از ترانس‌های قدرت مدرن به نشت روغن مایع برای دفع گرمای تولیدی مجهزند. با این وجود این روش چند عیب دارد. زنگ‌زدگی ناشی از عمر طولانی و عوارضی از این قبیل اغلب سبب نشتی ترانس و لذا اثرات مخرب محیطی می‌گردد. استفاده از روغن‌های قابل اشتعال هم خطر آتش‌سوزی داشته و مبارزه با آتش در پست‌های ولتاژ بالا کاری خطرناک می‌باشد (شکل ۲۸-۱۳).



شکل ۲۸ـ۱۳

یک روش ممکن برای اصلاح رفتار چنین ترانس‌ها استفاده از سیم‌های ابررسانا (سوپرکنداکت) و جایگزینی آن با سیم‌پیچ‌های مقاومتی است. مواد ابررسانا در دمای بالا مقاومت دارند ولی در دمای بحرانی در برابر جریان بی‌مقاومت می‌شوند. برای بسیاری از مواد این دمای بحرانی تنها چند درجه از صفر مطلق بیشتر است. بنابراین نیاز به مایع هلیوم برای خنک شدن دارند. با این وجود با پیدایش ابررساناهای سرامیک دمای بالا در سال ۱۹۸۰ مواد در دماهای 90 K (‎-180°C) و بالاتر ساخته شدند و جایگزینی تجهیزات مبتنی بر هلیوم با سیستم‌های نیتروژنی امکان‌پذیر شد. این مواد به میزان قابل ترجیهی از لحاظ ساخت و کار ارزان‌تر تمام می‌شوند. شکل ۲۹-۱۳ یک ترانس 630 - KVA ابررسانا را که به وسیله کمپانی ABB ساخته شده نشان می‌دهد که برای شبکه برق شهر ژنو سویس در مارس ۱۹۹۷ ساخته شده است.

تغییر خط مشی طراحی و جایگزینی سیم‌های ابررسانا به جای سیم‌پیچ‌های مقاومتی مزایای متعددی دارد. اول این که اندازه ترانس با توان یکسان به یک سوم کاهش یافته است. دوم این‌که استفاده از خنک کننده نیتروژنی خطر آتش‌سوزی روغن را از بین برده است و نیز چون مایع نیتروژن به گاز نیتروژن تبدیل می‌گردد، از قبل محیط محصور شده و نشتی هم موجب آلودگی آب‌های زیرزمینی نمی‌گردد. سوم ولی شاید مهمتر از همه، حذف تلفات مقاومتی موجب بالا رفتن بازده ترانس می‌شود و به این ترتیب توان مورد تقاضا از ژنراتور کاهش یافته و صرفه‌جویی قابل ترجیهی به دنبال دارد.

در هر صورت هر طرحی معایبی دارد که باید در برابر مزایای آن ارزیابی گردد و ترانس‌های ابررسانا هم مستثنا نیستند. یکی از مهمترین موانع، هزینه بالای ساخت سیم‌های ابررسانای چند کیلومتری در مقایسه با سیم مسی است. این سیم‌ها معمولاً در داخل غلافی از نقره ساخته می‌شوند و در نتیجه در هنگام گرم شدن مسیر جریانی ایجاد خواهد شد (مادامی که سیم درونی ابررسانا باشد، جریانی از نقره عبور نمی‌کند زیرا در دمای نیتروژن مایع دارای مقومت است) به کارگیری نقره بر قیمت سیم می‌افزاید با این وجود استفاده از ماده ارزانتر مس انتخاب خوبی در این کاربرد نیست، زیرا این ماده مایل به واکنش با مواد ابررسانا است، خلاصه این که گرچه ترانس ابررسانا قادر است در هزینه تولید کننده در درازمدت صرفه‌جویی کند (بسیاری از ترانس‌ها ممکن است تا ۳۰ سال سرویس بدهند) ولی هزینه اولیه آن خیلی بالاتر از ترانس‌های مقاومتی قدیمی است. در حال حاضر بسیاری از کمپانی‌ها و تولید کنندگان انرژی الکتریکی هزینه‌های کوتاه‌مدت را در نظر می‌گیرند و به سرمایه‌گذاری برای منابع درازمدت مایل نیستند.

شکل ۲۹ـ۱۳ ترانس ابررسانای 15 kVA.

سپس یکی از مفروضات مربوط به ترانس ایده‌آل را به کار می‌گیریم. L_1 بینهایت است. اگر فرض شود که v_1 بینهایت نیست، باید داشته باشیم:

$$\frac{di_1}{dt} = -a\,\frac{di_2}{dt}$$

با گرفتن انتگرال از طرفین داریم:

$$i_1 = -ai_2 + A$$

که در آن A ثابتی از انتگرال‌گیری است که برحسب زمان تغییر نمی‌کند. لذا اگر از جریان dc اولیه و ثانویه صرف‌نظر کنیم و توجه خود را فقط به بخشی از پاسخ معطوف داریم که برحسب زمان تغییر می‌کند، خواهیم داشت:

$$i_1 = -ai_2$$

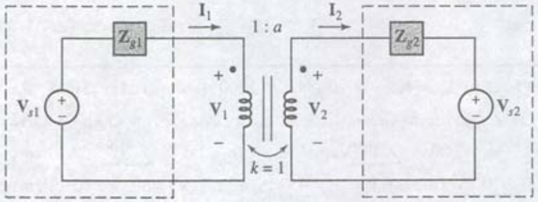
علامت منفی ناشی از محل نقطه بر روی ترانس و انتخاب جهت جریان‌ها در شکل ۱۷-۱۳ است.

بنابراین همان رابطه جریان -ولتاژی در حوزه زمان به دست آمد که قبلاً در حوزه فرکانس به دست آمده بود، با این شرط که مؤلفه‌های dc چشم‌پوشی شوند. نتایج حاصله در حوزه زمان عمومی‌ترند ولی روش به دست آوردنشان واضح نیست. به کمک مشخصات ترانس ایده‌آل می‌توان مدارهای ترانس را ساده کرد. برای نشان دادن این مطلب اجازه بدهید فرض کنیم که به جای تمام مدارهای سمت چپ اولیه، معادل تونن آن را گذاشته‌ایم و همین کار را در مورد شبکه سمت راست ثانویه هم انجام می‌دهیم. بنابراین مدار شکل ۳۰-۱۳ را خواهیم داشت. فرکانس منبع محرک ω فرض شده است.

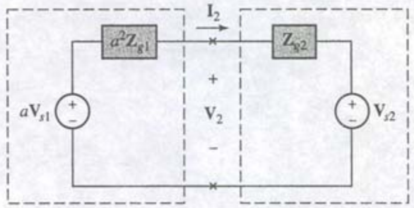
مدارهای معادل

اکنون قضایای تونن و نورتن را برای دستیابی به مدار معادلی که حاوی ترانس است پیاده می‌کنیم. مثلاً بیایید ابتدا معادل تونن سمت چپ پایانه‌های ثانویه را معین کنیم. با بازکردن مدار ثانویه $\mathbf{I}_2 = 0$ و لذا $\mathbf{I}_1 = 0$ می‌گردد (L_1 را بینهایت در نظر بگیرید). هیچ ولتاژی دو سر $\mathbf{Z}_{g1}$ ظاهر نمی‌شود و بنابراین $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{s1}$ و $V_{2oc} = a\mathbf{V}_{s1}$ خواهد بود. امپدانس تونن با کشتن $\mathbf{V}_{s1}$ و استفاده از مربع نسبت دورو در واقع عکس این نسبت به دست می‌آید، چون ما از پایانه‌های ثانویه به اولیه نگاه می‌کنیم، بنابراین، $\mathbf{Z}_{th2} = \mathbf{Z}_{g1}a^2$. به منظور تست بگذارید جریان ثانویه مدار باز $\mathbf{I}_{2sc}$ را معین کنیم. با اتصال کوتاه ثانویه، مولد موجود در اولیه امپدانس $\mathbf{Z}_{g1}$ را در مقابل خود می‌بینید، پس $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_{s1} / \mathbf{Z}_{g1}$ و $\mathbf{I}_{2sc} = \mathbf{V}_{s1} / a\mathbf{Z}_{g1}$. نسبت ولتاژ مدار باز به جریان اتصال کوتاه برابر $a^2\mathbf{Z}_{g1}$ است که باید هم باشد. معادل تونن ترانس و مدار اولیه در مدار شکل ۳۱-۱۳ مشاهده می‌شود.

بنابراین هر ولتاژ اولیه‌ای در نسبت دور ضرب می‌شود و هر جریان اولیه‌ای بر نسبت دور تقسیم می‌گردد، و هر امپدانس اولیه‌ای در مربع نسبت دورها ضرب می‌شود. آن‌گاه این مقادیر جایگزین ولتاژ، جریان، امپدانس و نهایتاً ترانس می‌گردند. اگر هر یک از نقاط روی پایانه‌ها تغییر مکان دهند، می‌توان معادل را با تعویض علامت نسبت دور به دست آورد.



شکل ۳۰ـ۱۳ شبکه متصل به پایانه‌های اولیه و ثانویه ترانس ایده‌آل با معادل تونن نشان داده شده است.



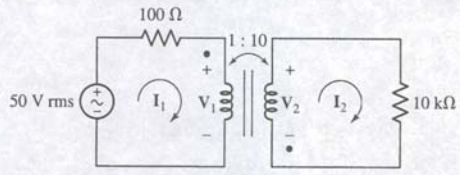
شکل ۳۱-۱۳ معادل تونن شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه در شکل ۳۰-۱۳ که برای ساده‌کردن مدار به‌کاررفته است.

معادل‌های فوق‌الذکر طبق شکل ۳۱-۱۳ هنگامی امکان‌پذیرند که شبکه متصل به دو پایانه اولیه و متصل به دو پایانه ثانویه قابل جایگزینی با معادل‌های تونن باشند. یعنی هر یک باید یک شبکه دو پایانه باشند. مثلاً اگر ما دو سیم اولیه را از محل ترانس قطع کنیم، مدار باید به دو بخش تقسیم گردد و نباید عنصر یا شبکه‌ای بین اولیه و ثانویه ترانس پل بزند.

تحلیل مشابهی از ترانس و شبکه ثانویه نشان می‌دهد که هر چیزی در سمت راست پایه‌های اولیه با یک شبکه معادل بدون لحاظ ترانس قابل جایگزینی است و در آن هر ولتاژی بر a تقسیم، هر جریانی ضربدر a و هر امپدانسی بر a^2 تقسیم می‌شود. تعویض هر سیم‌پیچ با دیگری ضریب نسبت دور $-a$ را به دست می‌دهد.

مثال ۸-۱۳

برای مدار شکل ۳۲-۱۳ مدار معادل ترانس و ثانویه و نیز معادل ترانس و مدار اولیه را به‌دست‌آورید.



شکل ۳۲-۱۳ مدار ساده‌ای که بار مقاومتی با امپدانس منبع با روش ترانس معادل تطابق دارد.

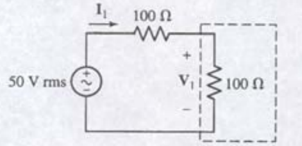
این همان مدار مثال ۷-۱۳ است. مثل قبل، امپدانس ورودی $10000/(10)^2$ یا $100\ \Omega$ و بنابراین $|I_1| = 25$ mA rms است. می‌توان ولتاژ دو سر سیم‌پیچ اولیه را هم حساب کرد.

$$|V_1| = |50 - 100I_1| = 25 \text{ V rms}$$

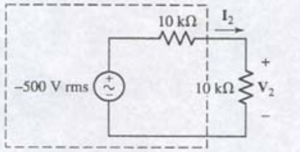
و بنابراین می‌توان دریافت که منبع توان $(50)(25 \times 10^{-3}) = 12.5\text{W}$ را به مدار منتقل می‌کند که از آن $(25 \times 10^{-3})^2(100) = 6.25\text{W}$ در مقاومت داخلی منبع تلف شده و $12.5 - 6.25 = 6.25\text{W}$ نیز به بار منتقل می‌گردد.

اگر مدار ثانویه و ترانس ایده‌آل با معادل تونن جایگزین گردد، منبع 50 V و مقاومت 100Ω، امپدانس 100 Ω را نظاره خواهد کرد و به این ترتیب مدار ساده شده ۳۳-۱۳(الف) به دست می‌آید و لذا جریان و ولتاژ اولیه مشخص است.

اگر این بار، شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه با معادل تونن جایگزین شود، خواهیم داشت: $V_{th} = -10(50) = -500$ V rms و $Z_{th} = (-10)^2(100) = 10\ \text{k}\Omega$. مدار حاصل در شکل ۳۳-۱۳(ب) ملاحظه می‌گردد.



(الف)



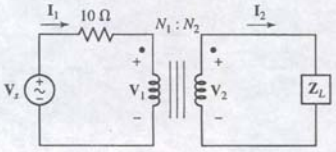
(ب)

شکل ۳۳-۱۳ (الف) مدار شکل ۳۲-۱۳ با جایگزینی (الف) ترانس و ثانویه با معادل تونن یا (ب) ترانس اولیه با معادل تونن، ساده شده است.

تمرین

۹-۱۳ فرض کنید در یک ترانس ایده‌آل $N_1 = 1000$ و $N_2 = 5000$ باشد (شکل ۳۴-۱۳). اگر $Z_L = 500 - J400\Omega$ باشد، متوسط توان حمل شده به Z_L را برای (الف) $V_2 = 900\angle 40^\circ$ Vrms، (ب) $I_2 = 1.4\angle 20^\circ$ A rms، (ج) $V_1 = 80\angle 110^\circ$ Vrms، (د) $I_1 = 6\angle 45^\circ$ Arms، (ه) $V_s = 200\angle 0^\circ$ V rms تعیین کنید.

جواب: 980 W، 988 W، 195.1 W، 720 W و 692 W.



شکل ۳۴-۱۳

۵-۱۳ خلاصه فصل و مرور

- القای متقابل، ولتاژ القایی را در دو سر یک سیم‌پیچ به علت میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم‌پیچ دوم توصیف می‌کند.
- قرارداد نقطه، علامت را به جمله القای متقابل تخصیص می‌دهد.
- برطبق قرارداد نقطه، جریان وارده به پایانه نقطه‌دار یک سیم‌پیچ، ولتاژ مدار بازی را با مرجع ولتاژ مثبت در پایانه نقطه‌دار سیم‌پیچ دوم تولید می‌کند.
- انرژی کل ذخیره شده در جهت سیم‌پیچ کوپل شده سه جمله دارد: انرژی ذخیره شده در هر خودالقا ($\frac{1}{2}Li^2$) و انرژی ذخیره شده در القاکنایی متقابل (Mi_1i_2).
- ضریب کوپلاژ با رابطه $k = M/\sqrt{L_1L_2}$ داده می‌شود و محدود به مقداری بین 0 و 1 است.
- یک ترانس خطی از دو سیم‌پیچ کوپل شده تشکیل شده است: یکی سیم‌پیچ اولیه و دیگری سیم‌پیچ ثانویه.
- یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی برای ترانس‌های هسته آهنی است. ضریب کوپل برابر واحد و القاکنایی بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود.
- نسبت دور $a = N_2/N_1$ یک ترانس ایده‌آل ولتاژهای سیم‌پیچ اولیه را به ثانویه ارتباط می‌دهند: $V_2 = aV_1$.
- نسبت دور a، جریان‌های اولیه و ثانویه را در سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه مرتبط می‌کند: $I_1 = aI_2$.

۶-۱۳ خواندنی‌های کمکی

Almost everything you ever wanted to know about transformers can be found in

M. Heathcote, *J&P Transformer Book,* 12th ed. Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998.

Another comprehensive transformer title is

W.T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook,* 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004.

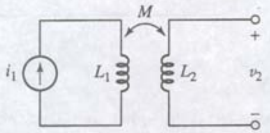
A good transformer book with a strong economic focus is

B.K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers.* New York: McGraw-Hill, 1998.

مسائل

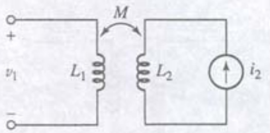
۱-۱۳ القای متقابل

۱. مدار شکل ۳۵-۱۳ را ملاحظه کنید. اگر $i_1(t) = 400 \cos 120\pi t$ A باشد و حداکثر مقدار $v_2(t)$ برابر 100 V باشد، مقدار القای متقابل بین L_1 و L_2 چیست؟



شکل ۳۵-۱۳

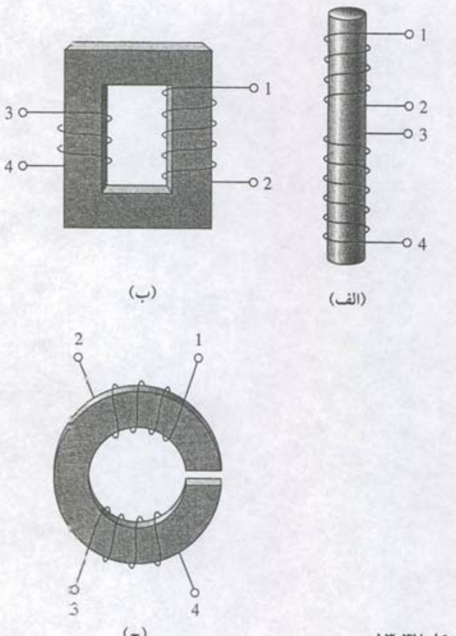
۲. در مدار شکل ۳۶-۱۰، ولتاژ v_1 برابر $115\sqrt{2}\cos(120\pi t - 16^\circ)$ V است. اگر مقدار پیک برابر 45 A اندازه‌گیری شود، مقدار القای متقابل دو القاگر L_1 و L_2 چیست؟



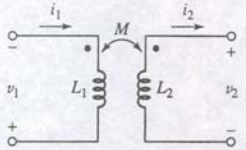
شکل ۳۶-۱۳

۳. ساختار فیزیکی سه جفت سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۳۷-۱۳ دیده می‌شود. روی سیم‌پیچ هر یک از آن‌ها محل نقطه را مشخص کنید.

۴. دو القاگر کوپل‌شده شکل ۳۸-۱۳ در مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل‌اند. $L_1 = 1$ H، $L_2 = 3$ H و $M = 0.5$ H. اگر $i_1 = 30 \sin 80t$ A و $i_2 = 30 \cos 80t$ A باشد مطلوبست (الف) v_1 و (ب) v_2.

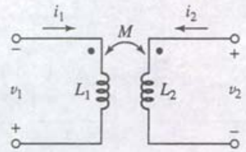


شکل ۱۳-۳۷



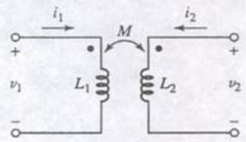
شکل ۱۳-۳۸

۵. دو القاگر کوپل‌شده شکل ۱۳-۳۹ در مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل‌اند. اگر $L_1 = 22\,\mu H$، $L_2 = 15\,\mu H$ و $M = 5\,\mu H$. اگر $i_1 = 3\cos 800t$ nA و $i_2 = 2\cos 800t$ nA باشد مطلوبست (الف) v_1 و (ب) v_2.



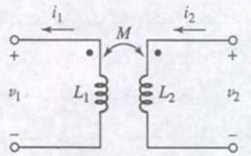
شکل ۱۳-۳۹

۶. با ارجاع به شکل ۱۳-۴۰، فرض کنید $v_1 = 5e^{-t}$ V و $v_2 = 3e^{-2t}$ V باشد. اگر $L_1 = L_2 = 8$ H و $M = 0.4$ H باشد، مطلوبست (الف) di_1/dt، (ب) di_2/dt و (ج) $i_1(t)$ اگر در $t = 0$ انرژی ذخیره نشده باشد.



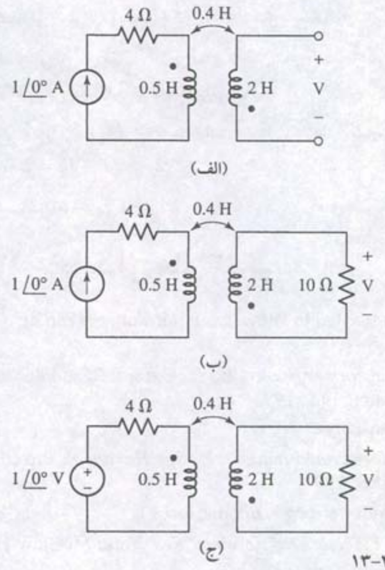
شکل ۱۳-۴۰

۷. با ارجاع به شکل ۱۳-۴۱، فرض کنید $v_1 = 2e^{-t}$ V و $v_2 = 4e^{-3t}$ V باشد. اگر $L_1 = L_2 = 2$ mH و $M = 1.5$ H باشد، مطلوبست (الف) di_1/dt، (ب) di_2/dt و (ج) $i_1(t)$ اگر در $t = 0$ انرژی ذخیره نشده باشد.



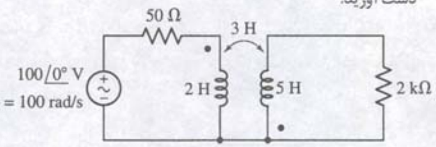
شکل ۱۳-۴۱

۸. برای هر شبکه در شکل ۱۳-۴۲، $v(t)$ را به دست آورید به شرطی که $f = 50$ Hz باشد.



شکل ۱۳-۴۲

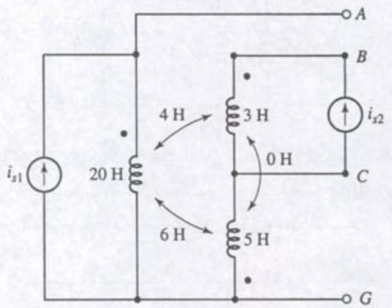
۹. در مدار شکل ۱۳-۴۳، توان متوسط جذب شده با (الف) منبع، (ب) هر یک از دو مقاومت، (ج) هر یک از دو القاگر، (د) اندوکتانس متقابل را به دست آورید.



شکل ۱۱-۴۳

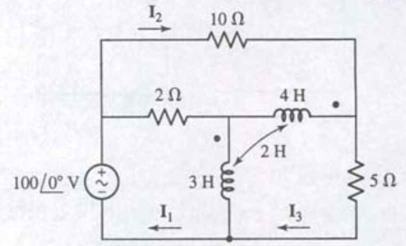
۱۰. در مدار شکل ۱۳-۴۴ فرض کنید $i_{s1}(t) = 4t$ A و $i_{s2}(t) = 10t$ A باشد، مطلوب است (الف) v_{AG}، (ب) v_{CG} و (ج) v_{BG}.

۱۱. (الف) مطلوب است شبکه معادل تونن نظاره شده با مقاومت 2 kΩ در مدار مسئله ۹. (ب) حداکثر توان متوسطی که از شبکه توسط مقدار بهینه Z_L کشیده می‌شود (به جای مقاومت 2 kΩ) چقدر است؟



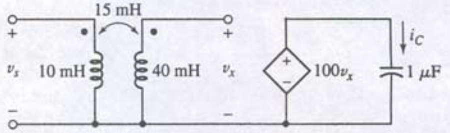
شکل ۱۳-۴۴

۱۲. برای مدار شکل ۱۳-۴۵، جریان‌های $i_1(t)$، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را بیابید به شرطی که $f = 50$ Hz باشد.



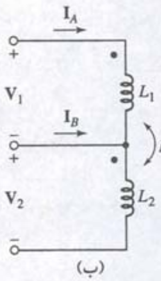
شکل ۱۳-۴۵

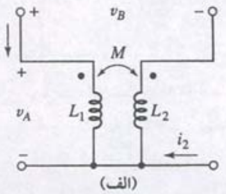
۱۳. عبارتی برای $i_C(t)$ در $t > 0$ در مدار شکل ۱۳-۴۶ بنویسید، به شرطی که $v_s(t) = 10t^2u(t)/(t^2 + 0.01)$ V باشد.



شکل ۱۳-۴۶

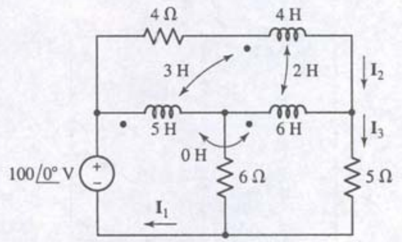
۱۴. (الف) برای شبکه ۱۳-۴۷ (الف) دو معادله برای $v_A(t)$ و $v_B(t)$ برحسب $i_1(t)$ و $i_2(t)$ بنویسید، (ب) دو معادله برای $V_1(j\omega)$ و $V_2(j\omega)$ به صورت تابعی از $I_A(j\omega)$ و $I_B(j\omega)$ برای شبکه ۱۳-۴۷(ب) بنویسید.





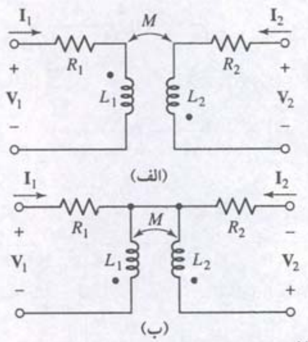
شکل ۱۳-۴۷

۱۵. توجه کنید که در شکل ۱۳-۴۸ بین القاگرهای 5 H و 6 H القای متقابلی وجود ندارد. (الف) دسته‌ای از معادلات را برحسب $I_1(j\omega)$، $I_2(j\omega)$ و $I_3(j\omega)$ بنویسید، (ب) اگر $\omega = 2$ rad/s باشد، $I_3(j\omega)$ را پیدا کنید.



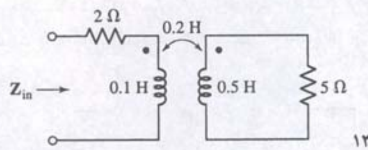
شکل ۱۳-۴۸

۱۶. برای هر مدار در شکل ۱۳-۴۹ مقدار $V_1(j\omega)$ و $V_2(j\omega)$ را برحسب $I_1(j\omega)$ و $I_2(j\omega)$ به دست آورید.



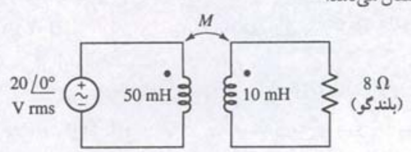
شکل ۱۳-۴۹

۱۷. (الف) برای شبکه شکل ۱۳-۵۰ مقدار $Z_{in}(j\omega)$ را بیابید، (ب) Z_{in} را در فاصله فرکانس $0 \le \omega \le 1000$ rad/s رسم کنید، (ج) برای $\omega = 50$ rad/s مقدار Z_{in} چقدر است؟



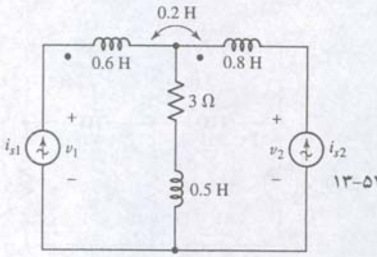
شکل ۱۳-۵۰

۱۸. با توجه به شکل ۱۳-۵۱، بگویید چه مقدار از M دقیقاً 3.2 W توان متوسط را به مقاومت 8 Ω یک بلندگو در فرکانس صوتی 160 Hz انتقال می‌دهد.



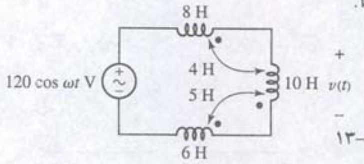
شکل ۱۳-۵۱

۱۹. در شکل ۵۲-۱۳ فرض کنید $i_{s1}(t) = 2\cos 10t$ A و $i_{s2}(t) = 1.2\cos 10t$ A باشد. (الف) $v_1(t)$ را پیداکنید. (ب) $v_2(t)$ را بیابید، (ج) توان متوسط تأمین شده به وسیله هر منبع چقدر است؟



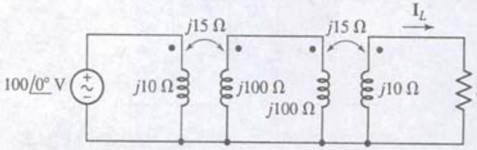
شکل ۵۲-۱۳

۲۰. می‌توان سه سیم‌پیچ را به لحاظ فیزیکی طوری کنار هم قرار داد تا بین A و B، B و C یک کوپل القای متقابل وجود داشته ولی بین A و C چنین چیزی نباشد. این آرایش در شکل ۵۳-۱۳ دیده می‌شود. مطلوب است $v(t)$.



شکل ۵۳-۱۳

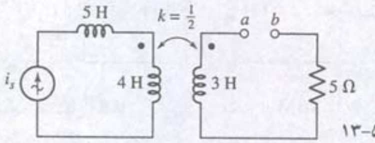
۲۱. در مدار شکل ۵۴-۱۳ مقدار I_L را بیابید.



شکل ۵۴-۱۳

۲-۱۳ ملاحظات انرژی

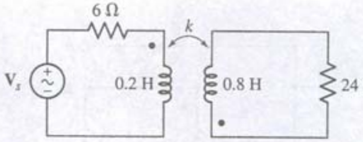
۲۲. در مدار شکل ۵۵-۱۳ جریان $i = 2\cos 10t$ A است. انرژی کل ذخیره شده در $t = 0$ اگر (الف) a - b باز باشد، (ب) a - b اتصال کوتاه باشد.



شکل ۵۵-۱۳

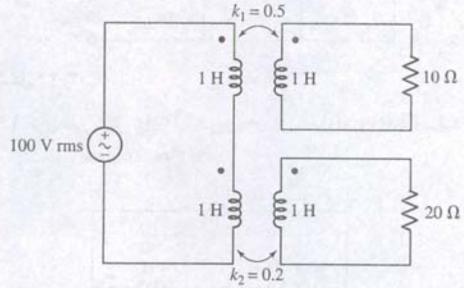
۲۳. فرض کنید در ترانس خطی شکل ۵۶-۱۳، $V_s = 12 \angle 0^\circ$ V است. $\omega = 100$ rad/s، توان متوسط تولیدی برای مقاومت 24 Ω به صورت توانی از k چقدر است.

۲۴. دو سیم‌پیچ با کوپل متقابل با $L_1 = 2\,\mu H$، $L_2 = 80\,\mu H$ و $k = 1$ دارای بار $Z_L = 2 + j10\ \Omega$ متصل به دو سر L_2اند. اگر $\omega = 250$ rad/s باشد، Z_{in} را در پایانه‌های L_1 به دست آورید.



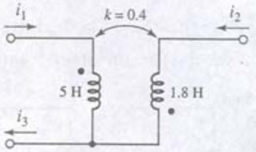
شکل ۵۶-۱۳

۲۵. اگر در شکل ۵۷-۱۳، $\omega = 100$ rad/s باشد، توان متوسط را برای موارد زیر به‌دست آورید: (الف) توان تحلیلی به بار 10 Ω (ب) توان تحویلی به مقاومت 20 Ω (ج) توان تولیدی به وسیله منبع.



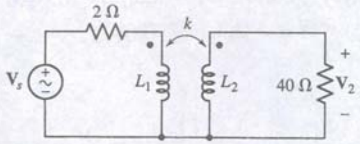
شکل ۵۷-۱۳

۲۶. برای سیم‌پیچهای کوپل شده شکل ۵۸-۱۳ فرض می‌شود $i_1(t) = 4e^{-t/10}$A و $i_3(t) = 5e^{-t/5}$A است. مطلوب است (الف) M، (ب) $i_2(t)$ و (ج) انرژی کل ذخیره شده در سیستم در $t = 0$.



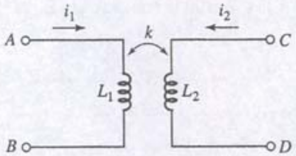
شکل ۵۸-۱۳

۲۷. در شکل ۵۹-۱۳ فرض کنید $\omega = 1000$ rad/s باشد، مطلوب است (الف) مقدار نسبت V_2 / V_s به شرطی که $L_1 = 1$ mH، $L_2 = 25$ mH و $k = 1$ می‌باشد، (ب) $L_1 = 1$ H، $L_2 = 25$ H و $k = 0.99$، (ج) $L_1 = 1$ H، $L_2 = 25$ H و $k = 1$.



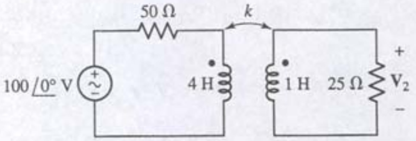
شکل ۵۹-۱۳

۲۸. (الف) یک پل القایی روی سیم‌پیچهای کوپل شده در شکل ۶۰-۱۳ ایجاد شده و مقادیر زیر تحت شرایط اتصال کوتاه و یا مدار باز اندازه‌گیری شده است: $L_{AB.CD.oc} = 10$ mH، $L_{CD.AB.oc} = 5$ mH و $L_{AB.CD.sc} = 8$ mA، k را پیداکنید، (ب) اگر نقطه‌ها در A و D و $i_1 = 5$A باشد، i_2 چه باید باشد تا 100mj انرژی در سیستم ذخیره گردد.



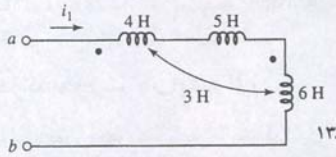
شکل ۶۰-۱۳

۲۹. برای مدار شکل ۶۱-۱۳، $f = 60$ Hz است. V_2 را به صورت تابعی از k رسم کنید و $|V_2|$ را در برابر k ترسیم نمایید.



شکل ۶۱-۱۳

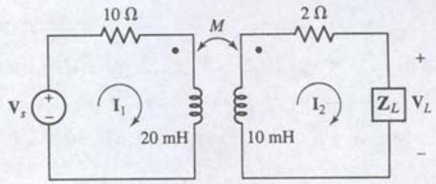
۳۰. اگر در شکل ۶۲-۱۳، $i_1 = 2\cos 500t$ A باشد، حداکثر انرژی ذخیره شده در شبکه چقدر است؟



شکل ۶۲-۱۳

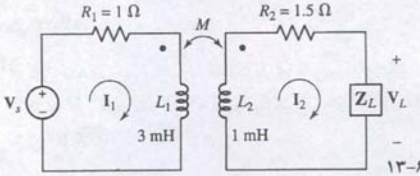
۳-۱۳ ترانسفورماتورهای خطی

۳۱. بار امپدانسی Z_L مدار شکل ۶۳-۱۳ برابر $7 \angle 32^\circ\ \Omega$ در فرکانس 50 Hz فرض شده است. القای متقابل سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه مقدار 800 nH دارد. مطلوبست (الف) امپدانس منعکسه و (ب) امپدانس ورودی از دید V_s.



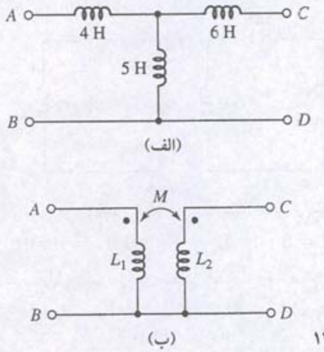
شکل ۶۳-۱۳

۳۲. اگر مدار شکل ۶۴-۱۳ در فرکانس 60 Hz کار کند و $\mathrm{Re}\{Z_L\} = 2\ \Omega$ باشد، چه راکتانس Z_L برای امپدانس منعکسه لازم است تا برابر Z_{11} شود اگر $M = 1$ mH باشد؟ $(Z_{11} \triangleq R_1 + j\omega L_1)$ ؟$M = 1$ mH.



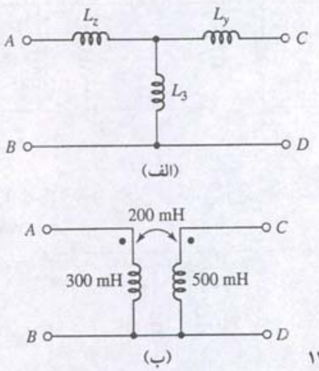
شکل ۶۴-۱۳

۳۳. شبکه‌های شکل ۶۵-۱۳ برابرند. مقادیر L_1، L_2 و M را به دست آورید.



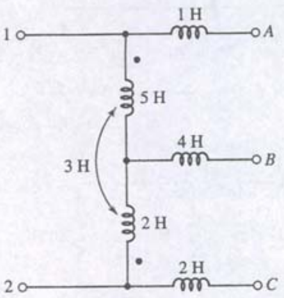
شکل ۶۵-۱۳

۳۴. چه مقادیری برای L_z، L_y و L_3 لازم‌اند اگر دو شبکه شکل ۶۶-۱۳ معادل باشند.



شکل ۶۶-۱۳

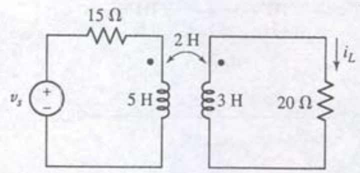
۳۵. در شبکه شکل ۶۷-۱۳ اگر پایانه‌های زیر به هم وصل باشند، اندوکتانس نظاره شده از پایانه‌های 1 و 2 را پیداکنید. (الف) هیچ‌کدام، (ب) A به B، (ج) B به C، (د) A به C.



شکل ۶۷-۱۳

۳۶. به شکل ۶۸-۱۳ توجه کنید. (الف) برای یافتن نسبت $I_L(j\omega) / V_s(j\omega)$ از معادل T کمک بگیرید، (ب) فرض کنید $v_s(t) = 100\,u(t)$ V باشد، $i_L(t)$ را به دست آورید. (راهنمایی:

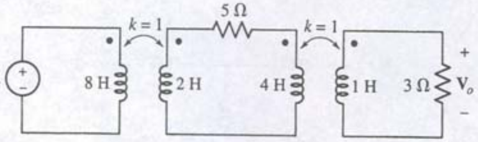
می‌توانید دو معادله دیفرانسیل برای کمک به یافتن di_L/dt در $t = 0^+$ بنویسید.



شکل ۱۳-۶۸

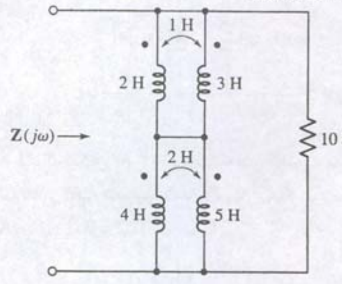
۳۷. معادل T را برای هر دو محل نقطه در یک ترانس خطی بی‌تلفات بنویسید که در آن $L_1 = 4$ mH، $L_2 = 18$ mH و $M = 8$ mH است. از T برای یافتن سه امپدانس ورودی معادل استفاده کنید که در آن ثانویه (الف) مدار باز است، (ب) اتصال کوتاه است، (ج) به اولیه به طور موازی وصل است.

۳۸. برای مدار شکل ۱۳-۶۹، $H(j\omega) = V_0 / V_s$ را به دست آورید.



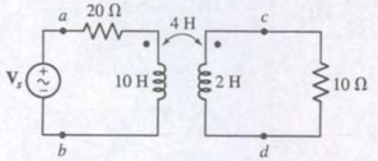
شکل ۱۳-۶۹

۳۹. معادل T را در کمک به یافتن امپدانس ورودی $Z(j\omega)$ برای شبکه شکل ۱۳-۷۰ به کار ببرید.



شکل ۱۳-۷۰

۴۰. در شکل ۱۳-۷۱، $V_s = 100 \angle 0^\circ$ V و $\omega = 100$ rad/s است. معادل تونن شبکه (الف) سمت راست پایانه‌های a و b (ب) سمت چپ پایانه‌های c و d را به دست آورید.



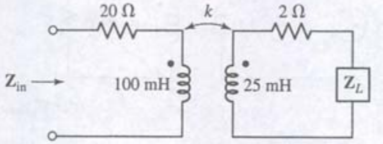
شکل ۱۳-۷۱

۴۱. Z_L به‌دوسر ثانویه یک ترانس خطی با القاکنایی $L_1 = 1$H و $L_2 = 4$H و ضریب کوپل واحد وصل است. اگر $\omega = 1000$ rad/s باشد، شبکه سری معادل (C, L, R) که از پایانه‌های ورودی نظاره شود را پیدا کنید.

به شرطی که Z_L برابر باشد (الف) 100 Ω، (ب) 0.1 H، (ج) 10 μF.

۴۲. یک ترانس خطی دارای $L_1 = 6$ H، $L_2 = 12$ H و $M = 5$ H است. هشت مقدار مختلف L_{in} را برای هشت روش مختلف تعیین شبکه دو پایانه به دست آورید. (تک القاکنایی، ترکیب سری و موازی ترانس‌های اتصال کوتاه، ترکیبات مختلف نقطه‌ها). برای هر شبکه مقدار L_{in} را معین کنید.

۴۳. در مدار شکل ۱۳-۷۲، فرض کنید بار Z_L، خازنی با ظرفیت 100 μF و امپدانس J31.83- Ω باشد. Z_{in} را در شرایط زیر به‌دست‌آورید. k برابر است با (الف) 0، (ب) 0.5، (ج) 0.9، (د) 1. با PSpice صحت را تحقیق کنید.

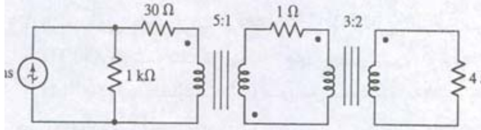


شکل ۱۳-۷۲

۴۴. مسئله ۴۱ را اگر L_1 به 125 H، L_2 به 20 H افزایش یابد و M طوری اضافه شود که k = 1 باشد، تکرار نمایید. با PSpice کار خود را تست کنید.

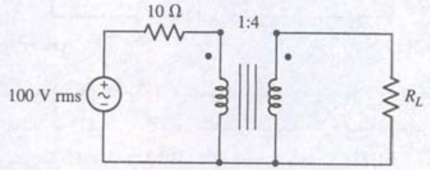
۱۳-۴ ترانسفورماتور ایده‌آل

۴۵. توان متوسط تحویلی به هر یک از چهار مقاومت در شکل ۱۳-۷۳ را به دست آورید. کار خود را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.



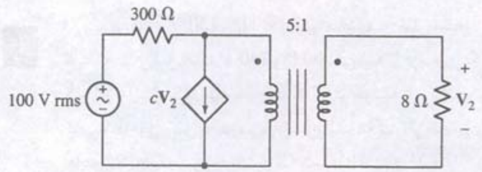
شکل ۱۳-۷۳

۴۶. (الف) حداکثر توان متوسطی که در مدار شکل ۱۳-۷۴ به R_L منتقل می‌شود، چقدر است. (ب) اگر $R_L = 100$ Ω باشد و مقاومت 40 Ω بین دو پایانه بالایی اولیه و ثانویه وصل کنیم، P_L را معین کنید.



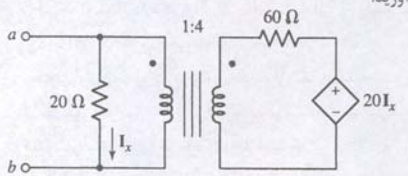
شکل ۱۳-۷۴

۴۷. توان متوسط حمل شده به مقاومت بار 8 Ω را در شکل ۱۳-۷۵ به دست آورید. به شرطی که C برابر باشد با (الف) 0، (ب) 0.04 S (ج) -0.04 S.



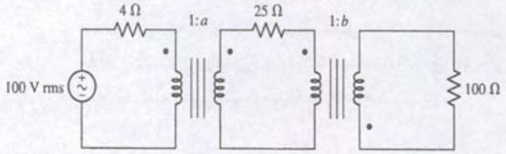
شکل ۱۳-۷۵

۴۸. معادل تونن را در پایانه‌های a و b برای شبکه شکل ۱۳-۷۶ به دست آورید.



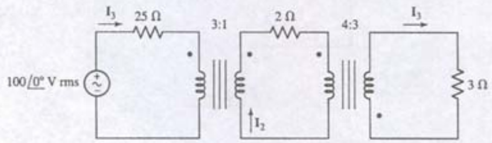
شکل ۱۳-۷۶

۴۹. مقادیر a و b را در شکل ۱۳-۷۷ طوری برگزینید که منبع ایده‌آل توان 1000 W تولید کند، و نصف آن هم به بار 100 Ω منتقل گردد.



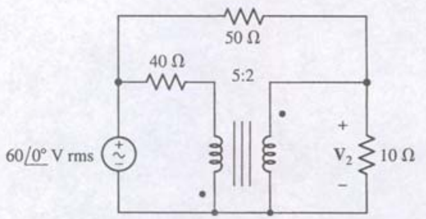
شکل ۱۳-۷۷

۵۰. برای شکل ۱۳-۷۸، (الف) I_1، (ب) I_2، (ج) I_3، (د) $P_{25\,\Omega}$، (ه) $P_{2\,\Omega}$، (و) $P_{3\,\Omega}$ را به دست آورید.



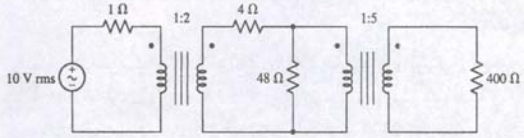
شکل ۱۳-۷۸

۵۱. V_2 را در شکل ۱۳-۷۹ به دست آورید.



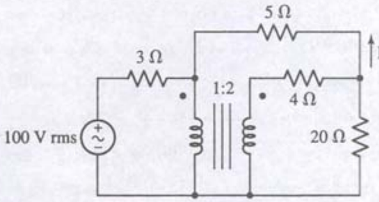
شکل ۱۳-۷۹

۵۲. توان تلف شده را در هر مقاومت در مدار شکل ۱۳-۸۰ پیدا کنید.



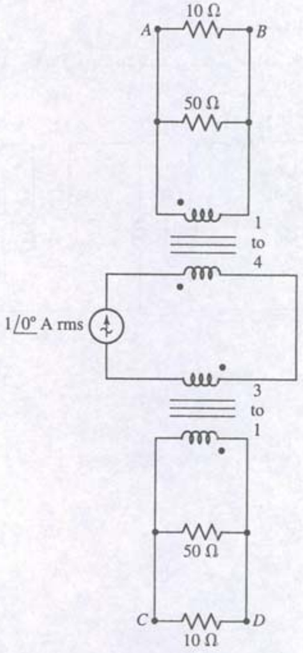
شکل ۱۳-۸۰

۵۳. I_x را در شکل ۱۳-۸۱ بیابید.



شکل ۱۳-۸۱

۵۴. (الف) متوسط توان تحویلی به هر مقاومت در مدار شکل ۱۳-۸۲ را به دست آورید، (ب) پس از اتصال A به C و B به D، حل را تکرار کنید.



شکل ۱۳-۸۲

۵۵. بگویید چگونه می‌توان از دو ترانس ایده‌آل برای تطبیق یک ژنراتور با امپدانس خروجی 4 + j0 KΩ به باری متشکل از یک بلندگوی

8 Ω و یک 10 Ω استفاده کرد. به طوری که بلندگوی 8 Ω دوبرابر توان متوسط 10 Ω جذب کند. مدار مربوط را بکشید و نسبت دورها را معین کنید.

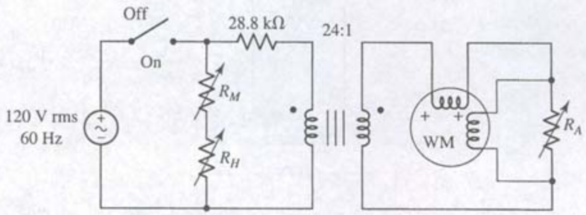
۵۶. یک ترانس با 25 kVA و 2300 / 230 با ولتاژهای اولیه و ثانویه 2300 V rms و 230 V rms در حال کار است و می‌تواند 25 kVA را در ثانویه خود تولید کند. اگر این ترانس با 2300 V rms تغذیه شود و به بار ثانویه‌ای با مشخصات 8 kW با PF واحد و 15 kVA به ضریب توان $PF = 0.8$ پسفاز وصل شود، (الف) جریان اولیه چیست؟ (ب) چند کیلووات دیگر ترانس می‌تواند به باری در $PF = 0.95$ پسفاز تحویل دهد، (ج) پاسخ خود را با PSpice تست نمایید.

۵۷. اواخر شب، یک آگهی روی TV وسیله‌ای را به $19.95 تبلیغ می‌کرد تا IQ شما را اندازه بگیرد. در طول هفته سفارشی می‌دهید و 4 الی 6 هفته بعد آن را دریافت می‌کنید. به شما گفته می‌شود برای اندازه‌گیری قد خود پیچ R_H را بچرخانید (cm) وزن خود را با چرخاندن R_M، (kg) و سومین پیچ R_A، (years) برای سن شماست. با انزجار از عدد روی صفحه‌نمایش آن را روی زمین پرت می‌کنید در جعبه باز می‌شود و مدار شکل ۱۳-۸۳ را می‌بینید. می‌فهمید که kg ، cm و سن همگی با اهم اندازه‌گیری می‌شوند و توان اندازه‌گیری شده به وسیله وات‌متر برحسب mw به‌عنوان IQ نمایش داده می‌شود. (الف) برای هم اطاقی شما، IQ چقدر است؟ ، (ب) چه کسی بیشترین IQ را دارد؟ ، (ج) چقدر ضرر کردید؟

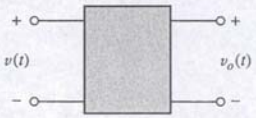
۵۸. کمپانی که برای آن کار می‌کنید از شما می‌خواهد تا از کالیفرنیا که در آن برق در 120 V rms و 60 Hz تولید می‌شود به آلمان مسافرت کنید که در آن برق 240 V rms و 50 Hz می‌باشد تا در برپایی یک کارخانه تولید قطعات نیمه هادی کمک کنید. خوشبختانه کامپیوتر کیفی شما قابل وصل به هر دو پریز می‌باشد، به شرطی که دارای آداپتور باشید. با این وجود رایتر CD شما فقط در 120 V ac کار می‌کند. مداری طراحی کنید که به وسیلهٔ آن CD شما در آلمان هم کار کند، به شرطی که فرکانس 50 Hz باشد. ترانس‌هایی که در 60 Hz کار می‌کنند، نسبت به 50 Hz دارای وزن کمتری هستند، در نتیجه احتمال دارد در 50 Hz داغ کنند. با این وجود بسیاری از آن‌ها با 50/60 علامت خورده‌اند.

۵۹. به‌عنوان اولین مأموریت در شغل جدید، از شما خواسته شده تا یک کمپرسور طراحی شده در آمریکا را در استرالیا به‌کار اندازید. کمپرسور متشکل از یک موتور سه‌فاز است که در هر فاز از ولتاژ خط 208 V جریان 10 A rms را می‌کشد. تنها انرژی سه فاز موجود در استرالیا، 400 V rms است. مدار لازم را طراحی کنید.

۶۰. شبکه شکل ۸۴-۱۳ دارای خاصیتی است. به این ترتیب که ولتاژ مثبت $v(t)$ اجازه خروج دارند. مقادیر منفی خروجی $v_0(t) = 0$ را می دهند. (الف) اگر ولتاژ خروجی $v_0(t)$ با پیک 5 V موردتقاضا باشد، با منبع 115 V rms و شبکه شکل ۸۴-۱۳ مدار مناسبی طراحی کنید. خروجی طرح خود را بکشید. (ب) اگر یک خروجی صاف بخواهیم (بدون تموج) مدار خود را اصلاح کنید.



شکل ۱۳-۸۳



شکل ۱۳-۸۴

فصل چهاردهم

فرکانس مختلط و تبدیل لاپلاس

مقدمه

مفاهیم کلیدی

- فرکانس نپر
- فرکانس مختلط
- تبدیل لاپلاس
- استفاده از جداول تبدیل
- روش باقیمانده
- استفاده از مثلث برای تعیین باقیمانده توابع گویا
- قضیه مقدار اولیه
- قضیه مقدار نهایی

اکنون آماده‌ایم که چهارمین قسمت اصلی تحلیل مدار یعنی مبحث فرکانس مختلط را مطالعه کنیم. خواهیم دید که فرکانس مختلط خاصیت یکپارچه‌سازی را دارد و همه تکنیک‌های تحلیلی را که قبلاً آموختیم به هم گره می‌زند. تحلیل مدارهای مقاومتی، تحلیل سینوسی حالت ماندگار، تحلیل گذرا، پاسخ وا داشته، پاسخ کامل و تحلیل مدارهای تحریک شده با توابع تحریک نمایی و سینوسی میرای نمایی، همگی حالات خاصی از تکنیک کلی تحلیل با استفاده ز مفهوم فرکانس مختلط هستند.

روشی رایج برای این عنوان مراجعه‌ای سریع به انتگرال تبدیل لاپلاس است، ولی این کار به درک واقعی کمکی نمی‌کند. بنابراین ما ابتدا مفهوم پایه فرکانس مختلط و ارتباط با تحلیل مدار را بررسی می‌کنیم. سپس تبدیل لاپلاس را به عنوان راهکاری برای برخورد با مدارهایی که منابع معرفی می‌کنیم و چگونگی به‌دست‌آوردن عکس تبدیل لاپلاس برای یافتن پاسخ‌های حوزه زمان خواهیم آموخت، تا خصوصیات کلیدی توابع در حوزه فرکانس به دست آید. این تکنیک‌ها در فصل ۱۵ گسترش خواهند یافت تا محدوده وسیعی از موارد تحلیل را پوشش دهد.

۱-۱۴ فرکانس مختلط

با معرفی "فرکانس مختلط" را با بررسی تابع سینوسی میرای نمایی مانند ولتاژ زیر آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

که در آن σ (سیگما) کمیتی حقیقی و معمولاً منفی است. هر چند ما این تابع را میرا می‌خوانیم ولی در صورت مثبت‌بودن σ، تابع سینوسی افزایش می‌یابد. در عمل غالباً با حالت میرا سروکار داریم. همچنین تجربه بررسی پاسخ طبیعی مدار RLC هم نشان می‌دهد که σ منفی ضریب میرایی نمایی است.

می توان با صفر کردن σ و ω در معادله (۱) یک ولتاژ ثابت به دست آورد:

$$v(t) = V_m \cos\theta = V_0 \qquad (2)$$

گر فقط $\sigma = 0$ باشد، آنگاه ولتاژ سینوسی خواهیم داشت:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \qquad (3)$$

اگر $\omega = 0$ باشد، ولتاژ نمایی را داریم:

$$v(t) = V_m \cos\theta\, e^{\sigma t} = V_0\, e^{\sigma t} \qquad (4)$$

پس معادله میرای (۱) شامل حالات خاص dc در معادله (۲) است. از مقایسه تابع نمایی (۴) با نمایش مختلط یک تابع سینوسی که زاویه فاز صفر درجه دارد، یعنی:

$$v(\mathrm{t}) = V_0\, \mathrm{e}^{j\omega \mathrm{t}} \qquad (۵)$$

می‌توانیم دید دقیق‌تری نسبت به σ پیدا کنیم. واضح است که دو تابع (۴) و (۵) اشتراک‌های فراوانی دارند. تنها تفاوت این‌است‌که نما در معادله (۴) حقیقی و در معادله (۵) موهومی است. بر تشابه بین دو تابع هنگامی تأکید بیشتری می‌شود که σ را فرکانس بنامیم. این انتخاب به طور مشروح در بخش‌های بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت، ولی فعلاً فقط می‌گوییم که σ **قسمت حقیقی** فرکانس مختلط است. البته نباید آن را فرکانس حقیقی بخوانیم، زیرا این نام برای f مناسب‌تر است (یا برای ω). به σ **فرکانس نپر** هم می‌گویند. این نام براساس بی‌بعدبودن نمای e انتخاب شده است. بنابراین در $\mathrm{e}^{7\mathrm{t}}$، بعد 7t، **نپر** (NP) می‌باشد و 7 فرکانس نپری و واحد آن نیز نپر بر ثانیه می‌باشد.

نام نپر از شخص نپر و سیستم لگاریتم نپری اخذ **شده است و معلوم نیست که** نام او را Napier می‌نوشته‌اند یا چیز دیگری می‌نگاشته‌اند!

فرم عمومی

پاسخ وا داشته یک شبکه به یک تابع تحریک کلی به فرم معادله (۱) به سادگی با استفاده از روشی شبیه به فیزور به دست می‌آید. به محض یافتن پاسخ واداشته به این سینوس میرا باید بدانیم که پاسخ به ولتاژ dc، ولتاژ نمایی و ولتاژ سینوسی را هم یافته‌ایم. اکنون بیایید ببینیم چگونه σ و ω را به‌عنوان بخش‌های حقیقی و موهومی یک فرکانس مختلط می‌شناسیم.

بگذارید با مفهوم ریاضی فرکانس مختلط آغاز کنیم و به تدریج با پیشروی فصل آن را تفسیر فیزیکی نماییم. هر تابعی که بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathbf{K}\mathrm{e}^{\mathrm{st}} \qquad (۶)$$

که در آن **K** و **s** دو ثابت مختلط‌اند (مستقل از زمان) و این یکی با **فرکانس مختلط s** مشخص می‌گردد. بنابراین فرکانس مختلط چیزی جز ضریب t در این تابع نمایی مختلط نیست. تا زمانی که فرکانس مختلط یک تابع را به دست آوریم، لازم است تابع را به فرم معادله (۶) بنویسیم.

حالت DC

ابتدا این تعریف را در مورد توابع تحریک آشنا اعمال می‌کنیم. مثلاً یک ولتاژ ثابت

$$v(\mathrm{t}) = V_0$$

را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$v(\mathrm{t}) = V_0\, \mathrm{e}^{(0)\mathrm{t}}$$

پس فرکانس مختلط یک ولتاژ یا جریان dc صفر است (یعنی $\mathbf{s} = 0$).

حالت نمایی

حالت ساده دیگر تابع نمایی است.

$$v(\mathrm{t}) = V_0\, \mathrm{e}^{\sigma \mathrm{t}}$$

که خود شکل موردنظر را داراست. فرکانس مختلط این ولتاژ σ است (یعنی $\mathbf{s} = \sigma + \mathrm{j}0$).

حالت سینوسی

اکنون بیایید یک ولتاژ سینوسی را در نظر بگیریم، تابعی که کمی تعجب‌آور است. با فرض

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

می‌خواهیم عبارتی معادل برحسب نمای مختلط به دست آوردیم، بنابراین با توجه به تجربه قبلی از اتحاد اولر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{2}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

و

$$v(t) = \tfrac{1}{2}V_m[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta}\right) e^{j\omega t} + \left(\tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta}\right) e^{-j\omega t}$$

یا

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}$$

اکنون مجموع دو تابع نمایی مختلط و دو فرکانس داریم که هر کدام به یک جمله متعلق است. فرکانس مختلط اولین جمله $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 = j\omega$ است و دومی نیز $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2 = -j\omega$ می‌باشد، این دو مقدار را **مزدوج** یکدیگر گویند و با $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^*$ نشان می‌دهند. دو مقدار **K** نیز مزدوج‌اند: یعنی $\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$ و $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^* = \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$. بنابراین کل جمله اول مزدوج کل جمله دوم است. البته چنین انتظاری را داشتیم زیرا مجموع دو جمله یعنی $v(\mathrm{t})$ می‌باید حقیقی باشد.

مزدوج مختلط هر عدد با جایگزینی همه لها به J- به دست می‌آید. مفهوم از انتخاب دلخواه $\mathrm{j} = +\sqrt{-1}$ حاصل می‌شود. با این وجود ریشه منفی به این ترتیب معتبر است و ما را به تعریف مزدوج مختلط هدایت می‌کند.

حالت سینوسی میرای نمایی

بالاخره بیایید فرکانس یا فرکانس‌های مختلط مربوط به تابع سینوسی میرای نمایی، معادله (۱) را معین کنیم. دوباره از اتحاد اولر استفاده می‌کنیم تا نمایشی نمایی و مختلط حاصل شود.

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$$
$$= \tfrac{1}{2}V_m e^{\sigma t}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

و بنابراین

$$v(t) = \tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta} e^{j(\sigma+j\omega)t} + \tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta} e^{j(\sigma-j\omega)t}$$

می‌بینیم که برای توصیف یک تابع سینوسی میرای نمایی به دو فرکانس مختلط همچون $\mathbf{s}_1 = \sigma + j\omega$ و $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* = \sigma - j\omega$ نیازداریم. به‌طورکلی نه σ صفر است و نه ω. حالت موج سینوسی با ضریب نمایی مختلط حالت کلی‌است و حالات ثابت، سینوس و نمایی حالات خاص می‌باشند.

رابطه s و حقیقی بودن

یک مقدار مثبت حقیقی از **s**، مثل $\mathbf{s} = 5 + \mathrm{j}0$ یک تابع نمایی فزاینده چون $\mathbf{K}\mathrm{e}^{+5\mathrm{t}}$ را مشخص می‌کند و اگر تابع فیزیکی باشد، باید **K** هم حقیقی باشد. یک مقدار حقیقی منفی برای **s** مانند $\mathbf{s} = -5 + \mathrm{j}0$ یک تابع نمایی کاهشی را تداعی می‌نماید.

اگر **s** کاملاً موهومی باشد، مثل j10، هرگز با یک کمیت حقیقی سروکار نداریم. فرم تابعی آن $\mathbf{K}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10\mathrm{t}}$ است که می‌توان آن را به شکل $\mathbf{K}(\cos 10\mathrm{t} + \mathrm{j}\sin 10\mathrm{t})$ نیز نوشت، که هر دو بخش حقیقی و موهومی سینوسی را دارد. برای ایجاد یک تابع حقیقی، لازم است مزدوج مقدار **s**، یعنی $\mathbf{s}_{1,2} = \pm\mathrm{j}10$ را ملاحظه کنیم. **K** مربوط به این دو فرکانس هم باید مزدوج باشد. با این وجود تا حدی می‌توان برای هر یک از فرکانس‌های مختلط $\mathbf{s}_1 = +\mathrm{j}10$ یا $\mathbf{s}_2 = -\mathrm{j}10$، یک ولتاژ سینوسی را با فرکانس 10 rad/s در نظر گرفت و در این صورت وجود فرکانس مختلط مزدوج را درک خواهیم کرد. دامنه و زاویه فاز ولتاژ سینوسی به **K** مربوط و به هر دو فرکانس بستگی دارد. پس با انتخاب $\mathbf{s}_1 = \mathrm{j}10$ و $\mathbf{K}_1 = 6 - \mathrm{j}8$ و در نظر گرفتنِ

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t} \quad ، \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* \quad و \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^*$$

تابع سینوسی واقعی $20\cos(10\mathrm{t} - 53.1^\circ)$ را به دست آوریم.

توجه کنید که $|6 - \mathrm{j}8| = 10$، بنابراین $V_\mathrm{m} = 2|\mathbf{K}| = 20$. درنتیجه زاویه $(6 - \mathrm{j}8) = -53.13^\circ$.

با روشی مشابه یک مقدار کلی برای s، مثل $-3-j5$ هم به شرطی یک کمیت حقیقی را نشان می‌دهد که به همراه مزدوج خود، یعنی $-3+j5$ باشد. دوباره با احتیاط توابع متناظر با هر یک از فرکانس فوق را تابع سینوسی فزاینده در نظر می‌گیریم. در این‌جا نیز دامنه و فاز به مقدار مزدوج مختلط **K** بستگی دارد.

تا این‌جا باید طبیعت فیزیکی فرکانس مختلط s را تا حدی درک کرده باشید. در حالت کلی این فرکانس یک موج سینوسی با ضریب نمایی متغیر را نشان می‌دهد. بخش حقیقی s مرتبط با بخش نمایی است. اگر این بخش حقیقی منفی باشد، تابع با افزایش t میرا می‌شود. اگر مثبت باشد، تابع فزاینده است و اگر صفر باشد، دامنه سینوس ثابت می‌باشد. هر چه اندازه بخش حقیقی s بزرگتر باشد، سرعت افزایش یا کاهش بخش نمایی بیشتر است. بخش موهومی تغییرات سینوسی را بیان می‌کند و درواقع همان فرکانس زاویه‌ای است. مقادیر بزرگ بخش موهومی s بیانگر تغییرات سریع تابع نمایی است.

پس هرچه قسمت حقیقی یا قسمت موهومی یا دامنهٔ s بزرگتر باشد، تغییر تابع سریعتر است.

مرسوم است که از حرف σ برای ذکر بخش حقیقی s و ω را برای بخش موهومی استفاده کنند، یعنی

$$s = \sigma + j\omega \tag{۷}$$

گاهی فرکانس زاویه‌ای را "فرکانس حقیقی" می‌خوانند، ولی این نام می‌تواند عامل اشتباه شود، زیرا در این صورت باید بگوییم که فرکانس حقیقی، بخش موهومی فرکانس مختلط است! هر وقت بخواهیم دقیق صحبت کنیم، s را فرکانس مختلط، σ را فرکانس نپری، ω را فرکانس زاویه، $f = \omega/2\pi$ را فرکانس تناوبی می‌خوانیم. هر جا احتمال اشتباه نیست هر چهار کمیت را فرکانس خواهیم خواند. فرکانس نپری بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود، **فرکانس زاویه‌ای** برحسب رادیان بر ثانیه و **فرکانس مختلط** گاهی **نپر مختلط بر ثانیه** و گاهی **رادیان مختلط بر ثانیه** گفته می‌شود.

تمرین

۱۴ـ۱ تمام فرکانس‌های مختلط موجود در توابع حقیقی زیر را مشخص کنید.
(الف) $(2e^{-100t} + e^{-200t}) \sin 2000\,t$، (ب) $(2 - e^{-10t}) \cos (4t + \phi)$، (ج) $e^{-10t} \cos 10t \sin 40t$.

۱۴ـ۲ با استفاده از ثابت‌های حقیقی A، B، C، ϕ و غیره، فرم کلی یک تابع حقیقی زمانی را بنویسید که جریانی با فرکانس‌های زیر را داشته باشد: (الف) 0، 10، $-10\ s^{-1}$، (ب) -5، J8، $-5\text{-}J8\ s^{-1}$، (ج) -20، 20، $-20+j20$، $20\text{-}j20\ s^{-1}$.

جواب (۱۴ـ۱): $-100+j2000$، $-100-j2000$، $-200+j2000$، $-200-j2000\ s^{-1}$، j4، $-j4$، $-10+j4$، $-10-j4\ s^{-1}$، $-10+j30$، $-10-j30$، $-10+j50$، $-10-j50\ s^{-1}$.

جواب (۱۴ـ۲):
$A + Be^{10t} + Ce^{-10t}$، $Ae^{-5t} + B\cos(8t + \phi_1) + Ce^{-5t}\cos(8t + \phi_2)$، $Ae^{-20t} + Be^{20t} + Ce^{-20t}\cos(20t + \phi_1) + De^{20t}\cos(20t + \phi_2)$

۱۴ـ۲ تابع تحریک سینوسی میرا

به نظر می‌رسد به قدر کافی در تعریف و تفسیر مقدماتی فرکانس مختلط وقت صرف کرده‌ایم. اکنون وقت آن فرا رسیده است تا این مفهوم را به کار بگیریم و ببینیم چگونه عمل می‌کند و یا به کار برده می‌شود.

شکل کلی یک تابع سینوس نمایی که در حال حاضر آن را ولتاژ در نظر می‌گیریم، به صورت کلی زیر است:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \tag{۸}$$

که با استفاده از اتحاد اولر می‌توان آن را به شکل زیر در آورد.

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}\} \tag{۹}$$

یا

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t - \theta)}\} \tag{۱۰}$$

هر یک از دو نمایش فوق مناسب‌اند و این نکته را به یادمان می‌آورد که هر تابع سینوسی، یا سینوس میرا، دو فرکانس مختلط مزدوج دارد. رابطه معادله (۹) با تابع سینوسی میرای فوق مستقیم‌تر است و به این دلایل هم از آن بیشتر استفاده خواهیم کرد. با جایگزینی $s = \sigma + j\omega$ در

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}\}$$

داریم

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\} \tag{۱۱}$$

قبل از اعمال تابع تحریکی به شکل فوق به هر مداری شباهت آن را با نمایش تابع سینوسی زیر میرای فصل ۱۰ بررسی می‌کنیم:

$$\text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

تنها تفاوت در این است که در این‌جا به جای $j\omega$، s را داریم. به جای محدود شدن به توابع سینوسی و فرکانس زاویه‌ای، نماد تعمیم‌یافته و توابع سینوسی میرا و فرکانس مختلط لحاظ شده است. در این بخش و بخش‌های بعد جای تعجب نخواهد بود که حوزه فرکانسی از توابع میرای نمایی درست مثل سینوس برپا کنیم و در آن بخش { }Re را حذف و e^{st} را دور بیندازیم.

حال آماده‌ایم تابع سینوسی میرای داده شده در معادله (۸)، (۹)، (۱۰) یا (۱۱) را به یک شبکه الکتریکی اعمال کنیم که در آن پاسخی مثل جریانی در یک شاخه از شبکه، مورد تقاضاست. چون پاسخ واداشته فرم تابع تحریک، انتگرال و مشتقات آن را دارد، می‌توان آن را به صورت زیر تصور کرد:

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

یا

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{st}\}$$

که در آن فرکانس مختلط منبع و پاسخ باید یکسان باشد.

اکنون به خاطر می‌آوریم که قسمت حقیقی تابع تحریک، قسمت حقیقی پاسخ و قسمت موهومی آن، قسمت موهومی پاسخ را به وجود می‌آورد. پس در این‌جا هم دوباره به سمت اعمال تابع مختلط به مدار سوق داده می‌شویم. در این صورت پاسخ مختلطی خواهیم یافت که قسمت حقیقی آن پاسخ حقیقی مطلوب است. درواقع ما بخش { }Re را حذف می‌کنیم ولی یادمان می‌ماند که می‌توانیم زمانی آن را دوباره وارد کنیم و در آخر که می‌خواهیم پاسخ را در حوزه زمان به دست آوریم دوباره { }Re را اضافه خواهیم کرد. پس به جای تابع تحریک

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\}$$

تابع مختلط تحریک $V_m e^{j\theta} e^{st}$ را اعمال می‌کنیم و پاسخ واداشته $I_m e^{j\phi} e^{st}$ را که مختلط

است و قسمت حقیقی آن پاسخ مطلوب می‌باشد را به دست آوریم:

$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{st}\}$$

برای حل مسئله باید دامنه پاسخ I_m و زاویه فاز ϕ را به دست آوریم.

قبل از طرح جزئیات تحلیل مسئله و ملاحظه شباهت‌های این روش و روش تحلیل سینوسی بهتر است مراحل اصلی آن را بررسی کنیم.

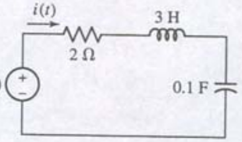
- ابتدا مدار را با مجموعه‌ای از معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی حلقه‌ای یا گرهی مشخص می‌کنیم.
- توابع **تحریک** منفردی به **شکل مختلط** و **پاسخ‌های واداشته** باز هم به فرم **مختلط** را **در** آن می‌گذاریم و مشتق‌ها و انتگرال‌ها را می‌گیریم.
- همه جملات در هر معادله حاوی ضریب e^{st} اند. بنابراین طرفین هر معادله را بر e^{st} تقسیم می‌نماییم. ضمناً به خاطر می‌سپاریم که اگر توصیف حوزه زمان موردنظر باشد دوباره آن را باز خواهیم گرداند.

با حذف {}Re و e^{st} ما همه ولتاژها و جریان‌ها را از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال داده‌ایم. معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل شده‌اند و حل آن‌ها هم به همان راحتی حل حالت ماندگار سینوسی است. اکنون برای تشریح اساس روش به مثالی عددی می‌پردازیم.

مثال ۱ـ۱۴

تابع تحریک $v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10^\circ)$ V را به مدار RLC سری شکل ۱ـ۱۴ اعمال کنید و پاسخ واداشته را با تعیین I_m و ϕ عبارت حوزهٔ زمان زیر بیان نمایید:

$$i(t) = I_m e^{-2t}\cos(4t + \phi)$$



شکل ۱ـ۱۴ یک مدار RLC سری که در آن تابع تبدیل سینوسی میرا به‌کارگرفته شده است. حل حوزه فرکانس $i(t)$ مورد تقاضا است.

ما ابتدا تابع تحریک را به فرم {}Re بیان می‌کنیم:

$$v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10^\circ) = \mathrm{Re}\{60e^{-2t} e^{j(4t + 10^\circ)}\}$$
$$= \mathrm{Re}\{60e^{j10^\circ} e^{(-2+j4)t}\}$$

یا

$$v(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}e^{st}\}$$

که

$$\mathbf{V} = 60 \angle 10^\circ \quad و \quad \mathbf{s} = -2 + j4$$

پس از حذف {}Re تابع تحریک مختلط زیر باقی می‌ماند.

$$60\angle 10^\circ e^{st}$$

به‌همین ترتیب، یک تابع مجهول را با کمیت مختلط $\mathbf{I}e^{st}$ نشان‌می‌دهیم که در‌آن $\mathbf{I}=I_m \angle \phi$ است گام بعدی نوشتن معادله انتگرالی - دیفرانسیلی برای مدار است. از قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$v(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 2i + 3\frac{di}{dt} + 10\int i\,dt$$

که در این‌جا تابع تحریک مختلط و پاسخ مفروض را در آن جایگزین کرده و به دست می‌آوریم:

$$60\angle 10^\circ e^{st} = 2\mathbf{I}e^{st} + 3\mathbf{s}\mathbf{I}e^{st} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}e^{st}$$

در گام بعدی ضریب مشترک e^{st} را حذف می‌کنیم:

$$60\angle 10^\circ = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{s}\mathbf{I} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}$$

و بنابراین

$$\mathbf{I} = \frac{60\angle 10^\circ}{2 + 3\mathbf{s} + 10/\mathbf{s}}$$

اکنون قرار می‌دهیم $\mathbf{s} = -2 + j4$ و جریان مختلط $\mathbf{I}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{I} = \frac{60\angle 10^\circ}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

پس از کمی دستکاری با اعداد مختلط داریم:

$$\mathbf{I} = 5.37\angle -106.6^\circ$$

پس I_m برابر با 5.37 A و ϕ برابر با -106.6° به دست می‌آید و لذا پاسخ واداشته به صورت زیر است:

$$i(t) = 5.37e^{-2t}\cos(4t - 106.6^\circ)\ \mathrm{A}$$

به این ترتیب مسئله را با کاهش عبارات انتگرالی - دیفرانسیلی به عبارات جبری حل کردیم. این تنها ذکر کوچکی از توان فوق‌العاده تکنیکی است که در آغاز مطالعه آن هستیم.

تمرین

۱۴ـ۳ فیزور جریان هم‌ارز با جریان‌های حوزه زمان زیر را به دست آورید:
(الف) $24\sin(90t + 60^\circ)$ A، (ب) $24e^{-10t}\cos(90t + 60^\circ)$ A، (ج) $24e^{-10t}\cos 60^\circ \times \cos 90t$ A، اگر $\mathbf{V} = 12\angle 35^\circ$ V باشد، $v(t)$ را برای $\mathbf{s}$ برابر با (د) 0، (هـ) $-20\ \mathrm{s}^{-1}$، (و) $-20+j5\ \mathrm{s}^{-1}$.

جواب: $24\angle -30^\circ$ A، $24\angle 60^\circ$ A، $12\angle 0^\circ$ A، 9.83 V، $9.83e^{-20t}$ V، $12e^{-20t}\cos(5t + 35^\circ)$ V.

۱۴ـ۳ تعریف تبدیل لاپلاس

تاکنون هدف مداوم ما یکی از تحلیل‌های زیر بوده است: فرض یک تابع تحریک در یک نقطه از مدار خطی، تعیین پاسخ در نقطه‌ای دیگر. در چند فصل اول، ما تنها با توابع تحریک dc و پاسخ‌هایی به شکل $V_0 e^0$ بازی کردیم. با این وجود، پس از معرفی القاگر و خازن، تحریک dc ناگهانی در یک مدار RL یا RC ساده، پاسخ‌های نمایی متغیر با زمان یعنی $V_0 e^{\sigma t}$ به وجود آورد. در بررسی مدار RLC، پاسخ‌ها فرم نمایی سینوسی $V_0 e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$ را به خود گرفتند. همه این کارها در حوزه زمان بود و dc تنها تابع تحریکی بود که ملاحظه شد.

هنگام استفاده از تابع تحریک سینوسی، پیچیدگی حل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی موجب شد تا به دنبال راه‌حل‌های ساده‌تری بگردیم. حاصل آن تبدیل فیزور بود و باید به خاطر بیاوریم که وارد بحث توابع تحریک مختلط به فرم $V_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$ شدیم. پس از درک عدم نیاز به ضرایب t آن را کنار گذاشتیم و فیزور $V_0 e^{j\theta}$ برایمان ماند و در واقع وارد **حوزه فرکانس** گشتیم.

اکنون کمی کشش فکری ما را به کاربرد یک تابع تحریک به فرم $V_0 e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}$ سوق داده است که منجر به یافتن فرکانس مختلط $\mathbf{s}$ گردید و همه حالات خاص یعنی dc$(\mathbf{s} = 0)$، نمایی $(\mathbf{s} = \sigma)$، سینوسی $(\mathbf{s} = j\omega)$ و سینوسی نمایی $(\mathbf{s} = \sigma + j\omega)$ را در بر می‌گرفت. به‌طور مشابه، از تجربه قبلی ما در فیزورها، می‌بینیم که در این حالات ممکن است فاکتورهای t را ندیده بگیریم و یک بار دیگر حل را در حوزه فرکانس به دست آوریم.

تبدیل لاپلاس دوسویه

می‌دانیم که توابع تحریک سینوسی، پاسخ‌های سینوسی و نیز توابع تحریک نمایی هم پاسخ نمایی تولید می‌کند. با این وجود، ضمن بررسی با امواج بسیاری برمی‌خوریم که نه سینوسی‌اند و نه نمایی. از آن جمله می‌توان از امواج مربعی، دندان اره‌ای و پالس‌هایی نام برد که در یک لحظه دلخواهی از زمان شروع می‌شوند. وقتی که چنین توابعی به یک مدار خطی اعمال می‌شوند، می‌بینیم که پاسخ‌ها به فرم محرک و یا نمایی نیستند. درنتیجه، قادر نیستیم جملات حاوی t را حذف و فرم پاسخ در حوزه فرکانسی را به دست آوریم. خوب البته این چندان خوشایند نیست زیرا کار در حوزه فرکانس می‌باید بیش از این‌ها راهگشا باشد.

با این وجود، راه‌حلی وجود دارد تا با استفاده از تکنیکی، هر تابعی به مجموعه‌ای از امواج نمایی تبدیل شود و هر یک فرکانس مختلط خاص خود را داشته باشد. چون ما مدارهای خطی را بررسی می‌کنیم، می‌دانیم که پاسخ کل مدار با جمع پاسخ‌های جزئی به موج نمایی حاصل می‌گردد و ضمن بررسی هر موج نمایی ممکن است از جملات شامل t چشم بپوشیم و در عوض در فضای **فرکانس** کار کنیم. متأسفانه برای دستیابی به فرم دقیق‌تر تابع زمانی کلی، تعداد جملات نمایی بینهایت می‌شود و لذا انتخاب روشی غیرمعقول و اعمال اصل تجمیع برای سری‌های نمایی تا حدی جنون‌آمیز است. درعوض این جملات را با انتگرال‌گیری جمع کرده و به تابعی در حوزه فرکانس تبدیل می‌کنیم.

ما این روش را با استفاده از آن‌چه که آن را **تبدیل لاپلاس** برای یک تابع فرم کلی f(t) مطابق تعریف زیر است، فرموله می‌کنیم:

$$\mathbf{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \qquad (۱۲)$$

حل این عمل انتگرال به طریقی ریاضی لازم می‌دارد تا سری فوریه و تبدیل فوریه را که در فصل‌های بعد ملاحظه خواهد شد بدانیم. با این وجود مفهوم اصلی تبدیل لاپلاس بر بحث پاسخ فرکانس و تجربه قبلی ما در فیزورها و تبدیل‌های متوالی بین حوزه زمان و حوزه فرکانس مبتنی است. درواقع این دقیقاً همان چیزی است که تبدیل لاپلاس انجام می‌دهد. این روش تابع حوزه زمان کلی f(t) را به نمایش حوزه فرکانس خود، یعنی **F(s)** تبدیل می‌نماید.

عکس تبدیل لاپلاس دوسویه

معادله (۱۲) یک تبدیل لاپلاس دوسویه یا دوجهته‌ای را برای f(t) تعریف می‌کند. جمله دوسویه به منظور تأکید بر این واقعیت به کار رفته است که هر دو مقدار مثبت و منفی t در محدوده انتگرال‌گیری قرار گرفته است. عمل عکس را که غالباً عکس تبدیل لاپلاس می‌گویند، به صورت عبارت انتگرالی زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}\mathbf{F}(s)\,ds \qquad (۱۳)$$

که در آن عدد ثابت حقیقی σ_0 در حد بالا و پایین انتگرال لحاظ شده تا این انتگرال همگرا شود. دو معادله (۱۲) و (۱۳) جفت تبدیل لاپلاس دوسویه را تشکیل می‌دهند. خبر خوش این که در همین تحلیل مدار ما هرگز نیازی به استفاده از معادله (۱۳) نداریم: روشی سریع در پیش رو است.

تبدیل لاپلاس یک سویه

در بسیاری از مسائلی که تحلیل می‌کنیم، توابع تحریک و پاسخ از لحاظ زمانی از دیرباز وجود نداشته‌اند، بلکه از یک لحظهٔ مشخصی از زمان که معمولاً آن را $t = 0$ می‌نامیم، شروع

می‌شوند. بنابراین برای توابع زمانی که در $t < 0$ وجود ندارند و یا آن‌هایی که رفتارشان در $t < 0$ مورد توجه نیست، توصیف حوزه زمانی را می‌توان به شکل $f(t)\,u(t)$ تصور کرد. انتگرال تبدیل با حد پایین $t = 0$ تعریف می‌شود تا اثر هر گسستگی در $t = 0$، مانند ضربه یا یکتای مرتبه بالاتر لحاظ شود. پس تبدیل لاپلاس چنین است.

$$\mathbf{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)u(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

این رابطه یک تبدیل لاپلاس یک سو را برای f(t) تعریف می‌کند. عکس تبدیل بی‌تغییر می‌ماند ولی هنگام ارزیابی فقط در $t > 0$ معتبر است. پس زوج تبدیل لاپلاسی را که از این پس در نظر می‌گیریم به قرار زیر است:

$$\boxed{\mathbf{F}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt} \qquad (۱۴)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}\mathbf{F}(s)\,ds \\ f(t) &\Leftrightarrow \mathbf{F}(s) \end{aligned}} \qquad (۱۵)$$

نماد $\mathcal{L}$ را هم می‌توان برای ذکر تبدیل لاپلاس و عکس آن به کار برد:

$$\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{و} \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s)\}$$

مثال ۲ـ۱۴

تبدیل لاپلاس تابع $f(t) + 2u(t - 3)$ را پیدا کنید.

برای یافتن تبدیل لاپلاس یک‌سویه $f(t) = 2u(t - 3)$، باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\mathbf{F}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 2u(t-3)\,dt = 2\int_{3}^{\infty} e^{-st}\,dt$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{-2}{s}\, e^{-st}\Big|_{3}^{\infty} = \frac{-2}{s}(0 - e^{-3s}) = \frac{2}{s}e^{-3s}$$

تمرین

۱۴ـ۴ فرض کنید $f(t) = -6e^{-2t}[u(t + 3) - u(t - 2)]$ باشد، (الف) مطلوب است **F(s)** دوسویه (ب) **F(s)** یک سویه.

جواب: $\frac{6}{2 + s}[e^{-4-2s} - e^{6+3s}]$، $\frac{6}{2 + s}[e^{-4-2s} - 1]$.

۱۴ـ۴ تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده

در این بخش لیستی از تبدیل لاپلاس را برای توابع زمانی که مکرراً با آن‌ها در تحلیل مدارها مواجه‌ایم، معرفی خواهیم کرد. اکنون فرض می‌کنیم تابع مورد توجه یک ولتاژ باشد. هر چند که این انتخاب کاملاً اختیاری است. این لیست را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

$$\mathbf{V}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} v(t)\,dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

این رابطه همراه با عکس تبدیل، یعنی

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}\mathbf{V}(s)\,ds = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(s)\}$$

یک ارتباط یک‌به‌یک را بین $v(t)$ و $\mathbf{V(s)}$ برپا می‌دارد. یعنی در قبال هر $v(t)$ یک $\mathbf{V(s)}$ منحصر بفرد وجود دارد. در این‌جا ممکن است رابطه عکس تبدیل کمی شما را بترساند. نترسید! بزودی خواهیم دید که مطالعه تبدیل لاپلاس در حد مقدماتی نیازی به ارزیابی این انتگرال ندارد. با انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس و استفاده از خاصیت انحصار فوق، قادر خواهیم بود با لیست جفت تبدیل‌های هر تبدیل لاپلاس، عکس را از آن پیدا کنیم.

قبل از ادامه بحث بهتر است ببینیم آیا احتمال دارد که برای بعضی توابع $v(t)$ مورد علاقه ما، تبدیل لاپلاس وجود نداشته باشد. مجموعه شرایط کافی برای اطمینان از همگرایی مطلق انتگرال لاپلاس برای $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$ عبارت است از:

۱. تابع $v(t)$ در هر فاصله معین مثل $t_1 < t < t_2$ قابل انتگرال‌گیری است و در آن $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$.

۲. برای هر مقدار از σ_0 عبارت $\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t}\,|v(t)|$ وجود دارد.

توابع زمانی که این دو شرط را ارضا نکنند، به ندرت در تحلیل مدار دیده می‌شوند.

مثال‌هایی از این توابع e^{t^2} و e^{e^t} می‌باشند و نه t^n یا n^t. برای بحث بیشتر به دیگر مراجع مراجعه شود.

تابع پله واحد $u(t)$

حال، سراغ تبدیل چند تابع می‌رویم. ابتدا تبدیل لاپلاس تابع پله واحد $u(t)$ را ملاحظه می‌کنیم. با توجه به تعریف داریم:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}u(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

به‌ازای $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ برای ارضای شرط ۲. پس داریم:

علامت $\Leftrightarrow$ برای نشان‌دادن زوج تبدیل لاپلاس به‌کارمی‌رود.

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad (16)$$

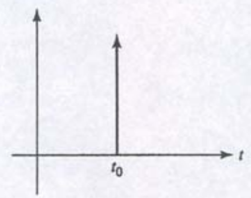
و به این ترتیب اولین جفت تبدیل لاپلاس برای ما به راحتی پیدا شد.

تابع ضربه واحد $\delta(t - t_0)$

تابع دیگری از این نوع که تبدیلش مورد علاقه ما است، تابع واحد $\delta(t - t_0)$ است. این تابع در شکل ۲ـ۱۴ ترسیم شده است. در ابتدا عجیب ولی عملاً تابع بسیار مفیدی است. تابع ضربه واحد طوری تعریف می‌شود که دارای سطح واحد است. به طوری که:

$$\delta(t - t_0) = 0 \qquad t \neq t_0$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0)\,dt = 1$$



شکل ۲ـ۱۴ تابع ضربه‌واحد $\delta(t - t_0)$. این تابع اغلب برای تقریب یک پالس که زمانش در مقایسه با ثابت زمانی مدار خیلی کوتاه است به کار می‌رود.

که در آن ε یک ثابت کوچک است. بنابراین تابع مذکور مقدار غیر صفر را فقط در نقطه t_0 دارا است. برای $t_0 > 0^-$ تبدیل لاپلاس را چنین می‌یابیم.

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t - t_0)\,dt = e^{-st_0} \qquad (17)$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0}$$

در حالت خاص $t_0 = 0$ داریم:

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \qquad (18)$$

ویژگی خاص دیگر تابع ضربهٔ واقع، **خاصیت غربالی** آن است. انتگرال تابع ضربه را که در تابع اختیاری $f(t)$ ضبط شده است. در نظر بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt$$

چون تابع $\delta(t - t_0)$ در هر جایی به جز $t = t_0$ برابر صفر است، مقدار این انتگرال برابر $f(t_0)$ خواهد بود. این ویژگی در ساده‌کردن عبارات انتگرالی شامل تابع ضربه واحد بسیار مفیدمی‌باشد.

تابع نمایی $e^{-\alpha t}$

با بازگشت به علاقه قبلی به تابع نمایی، تبدیل آن را بررسی می‌کنیم.

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

و بنابراین

$$e^{-\alpha t}\,u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha} \qquad (19)$$

واضح است که $\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$ است.

تابع شیب $t\,u(t)$

به‌عنوان آخرین مثال، بگذارید تابع شیب $t\,u(t)$ را ملاحظه نماییم. داریم:

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

$$t\,u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \qquad (20)$$

می‌توان رابطه فوق را با انتگرال جزء‌به‌جزء یا جدول انتگرال به دست آورد.

اما تابع $te^{-\alpha t}\,u(t)$ چگونه است؟ ما آن را به عهده خواننده می‌گذاریم تا رابطه زیر را نشان دهد:

$$te^{-\alpha t}\,u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2} \qquad (21)$$

البته چند تابع زمانی وجود دارند که ارزش بررسی را دارا می‌باشند، ولی بهتر است که فعلاً از آن‌ها بگذریم تا عکس فرآیند، یعنی عکس تبدیل لاپلاس را ملاحظه نماییم، تا این‌که به لیست کارهای خود بیفزاییم.

تمرین

۱۴ـ۵ اگر $v(t)$ برابر با (الف) $4\delta(t) - 3u(t)$، (ب) $4\delta(t - 2) - 3tu(t)$، (ج) $[u(t)][u(t - 2)]$ باشد، $\mathbf{V(s)}$ را معین کنید.

جواب: $(4s - 3)/s$، $(4e^{-2s} - (3/s^2)$، e^{-2s} / s.

۱۴ـ۶ اگر $\mathbf{V(s)}$ برابر با (الف) 10، (ب) $10/s$، (ج) $10/s^2$، (د) $10/[s(s + 10)]$، (ه) $10s/(s + 10)$ باشد، $v(t)$ را به دست آورید.

جواب: $10\delta(t)$، $10u(t)$، $10tu(t)$، $u(t) - e^{-10t}\,u(t)$، $10\delta(t) - 100\,e^{-10t}\,u(t)$.

۱۴ـ۵ تکنیک‌های عکس تبدیل لاپلاس

قضیه خطی بودن

متذکر شدیم که عبارت انتگرالی معادله (۱۳) قابل استفاده در اِعمال به حوزه s برای بازگشت آن به حوزه زمان است. همچنین گفتیم که چنین روشی می‌تواند با توجه به منحصربه‌فردبودن

جفت تبدیل لاپلاس، پرهیز شود. برای اشراف کامل بر این واقعیت، یکی از چند قضیه لاپلاس را معرفی می‌کنیم که همان قضیه خطی بودن است. این قضیه بیان می‌کند که تبدیل لاپلاس مجموع دو یا چند تابع زمانی برابر با مجموع تبدیلات تک‌تک توابع زمانی است. برای دو تابع زمانی داریم:

به رابطه فوق خاصیت "جمع پذیری" گویند.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}[f_1(t)+f_2(t)]\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(t)\,dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t)\,dt \\ &= \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})\end{aligned}$$

به‌عنوان مثالی از کاربرد این قضیه، فرض کنید که تبدیل لاپلاس $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ را داریم. می‌خواهیم تابع زمانی متناظر آن، $v(t)$ را بدانیم، غالباً می‌توان $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ را با مجموع دو یا چند تابع مثل $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ و $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ نشان داد که عکس تبدیل آن‌ها $v_1(t)$ و $v_2(t)$ می‌باشد و قبلاً در جدول ذکر شده است. در این صورت اعمال قضیه خطی بودن کار ساده‌ای می‌شود.

$$\begin{aligned}v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

نتیجهٔ مهم دیگر حاصل از قضیه خطی بودن با مطالعه تعریف تبدیل لاپلاس میسر است. چون ما درواقع با انتگرال سروکار داریم. تبدیل لاپلاس یک ثابت ضربدر تابع برابر است با ثابت ضربدر تبدیل لاپلاس تابع. به بیان دیگر:

$$\mathcal{L}\{kv(t)\} = k\mathcal{L}\{v(t)\}$$

یا

$$kv(t) \Leftrightarrow k\mathbf{V}(\mathbf{s}) \qquad (۲۲)$$

این رابطه به نام خاصیت "همگنی" خوانده می‌شود.

k ثابت تناسب است. نتیجه در بسیاری از موارد تحلیل سهل‌الوصول است.

مثال ۳ـ۱۴

با فرض تابع $\mathbf{G}(\mathbf{s}) = 7/\mathbf{s} - 31/(\mathbf{s} + 17)$، $g(t)$ را پیداکنید.

این تابع حوزه s متشکل از مجموع دو جمله $7/\mathbf{s}$ و $-31/(\mathbf{s} + 17)$ است. با توجه به قضیه خطی‌بودن می‌دانیم که $g(t)$ هم متشکل از دو جمله است که هر کد معکوس لاپلاس یکی از دو جمله در حوزه s است:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\mathbf{s}}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{\mathbf{s}+17}\right\}$$

اجازه بدهید با جمله اول شروع کنیم. خاصیت همگنی تبدیل لاپلاس اجازه می‌دهد چنین بنویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\mathbf{s}}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathbf{s}}\right\} = 7u(t)$$

بنابراین ما از زوج تبدیل شناخته‌شده $u(t) \Leftrightarrow 1/\mathbf{s}$ و خاصیت همگنی برای یافتن اولین مولفه $g(t)$ استفاده کرده‌ایم. به طریقی مشابه:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{\mathbf{s}+17}\right\} = 31e^{-17t}u(t)$$

با ادغام این دو جمله داریم:

$$g(t) = [7 - 31e^{-17t}]u(t)$$

تمرین

۱۴ـ۱ با فرض تابع $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{7}{\mathbf{s}^2} + \dfrac{31}{(\mathbf{s}+17)^2}$، مطلوبست $h(t)$.

جواب: $h(t) = [7 + 31e^{-17t}]tu(t)$

کنیک‌های عکس تبدیل برای توابع گویا

ضیه خطی بودن در تحلیل مدارهایی که چند عنصر ذخیره انرژی دارند. اغلب با عباراتی از حوزه s مواجه می‌شویم که از نسبت دو چندجمله‌ای s تشکیل شده‌اند. بنابراین انتظار داریم رتباً با عباراتی مثل

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

واجه می‌شویم. که در آن $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ و $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ چند جمله‌ای‌هایی از s هستند. مقادیری از s که موجب $\mathbf{N}(\mathbf{s}) =$ می‌شوند را صفرهای $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ می‌خوانیم و مقادیری از s که منجر به $\mathbf{D}(\mathbf{s}) = 0$ گردد قطب‌های $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ می‌نامیم.

به جای این‌که هر بار آستین‌ها را بالا بزنیم و معادله (۱۳) را فراخوانی کنیم و تبدیل عکس به دست آوریم، اغلب این عبارات را با روش باقیمانده در جملات ساده‌تری که عکس تبدیل پلاس آن‌ها معلوم است، می‌توان به دست آورد. معیار برای انجام این کار این‌است‌که $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ بعی **گویا** باشد که در آن درجه صورت $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ باید کمتر از مخرج $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ باشد. اگر چنین نباشد، باید ابتدا یک گام تقسیم را مطابق مثال زیر انجام دهیم. نتیجه تابعی به فرم تابع ضربه‌ای واهد بود (فرض کنید درجه صورت و مخرج یکی است) و یا تابعی گویا می‌باشد. تبدیل عکوس اولی ساده است، برای تابع گویا، اگر تابع تبدیل معکوس وجود ندارد، روش رراست باقیمانده قابل اعمال به تابع گویا می‌باشد.

در عمل، به ندرت لازم است معادله (۱۳) برای توابع موجود در تحلیل مدار فراخوانی شود، به شرطی که در استفاده از تکنیک‌های ارائه‌شده در این فصل، هوشیاری به خرج دهیم.

مثال ۴ـ۱۴

بدیل عکس را برای تابع $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2\dfrac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}}$ پیداکنید.

$\mathbf{F}(\mathbf{s})$ یک تابع گویا نیست، لذا با روش تقسیم ادامه می‌دهیم:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}\,\overline{)\,2\mathbf{s}+4\,}^{\;2} \qquad \begin{array}{r} 2\mathbf{s} \\ \hline 4 \end{array}$$

بنابراین $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2 + (4/\mathbf{s})$. با توجه به قضیه خطی‌بودن

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{2\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{\mathbf{s}}\right\} = 2\delta(t) + 4u(t)$$

اید توجه داشت که این تابع خاص را بدون تقسیم می‌توان ساده کرد. این روش برای تهیه الی از فرآیند استفاده شده است).

تمرین

۱۴ـ با فرض $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \dfrac{3\mathbf{s}^2 - 4}{\mathbf{s}^2}$، $q(t)$ را محاسبه کنید.

جواب: $q(t) = 3\delta(t) - 4tu(t)$

در به‌کارگیری روش باقیمانده، خصوصاً انجام بسط به کسرهای جزیی $\mathbf{V}(\mathbf{s})$، ما توجه ود را به ریشه‌هایی از مخرج معکوس می‌کنیم. بنابراین ابتدا لازم است چندجمله‌ای‌های s $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ را به جملات حاصلضربی تبدیل کنیم. ریشه‌های $\mathbf{D}(\mtext{s})$ می‌تواند جدا از هم (ساده) یا راری و ممکن‌است حقیقی یا مختلط باشد. با این وجود ذکر این نکته ارزش دارد که بگوییم

ریشه‌های مختلط همیشه به صورت مزدوج مختلط رخ می‌دهند به شرطی که ضرایب D(s) حقیقی باشند.

قطب‌های منفک و روش باقیمانده‌ها

به عنوان مثالی خاص اجازه بدهید تا عکس تبدیل لاپلاس زیر را به دست آوریم:

$$V(s)=\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

مخرج دو جمله با ریشه‌های مجزای $-\alpha$ و $-\beta$ به صورت حاصل‌ضرب درآمده است. هر چند که می‌توان این عبارت را در معادله عکس تبدیل لاپلاس گذاشت، ولی استفاده از قضیه خطی بودن ساده‌ترین راه است. با بسط به کسرهای جزیی می‌توان تابع مفروض را به مجموع دو جمله ساده‌تر تفکیک کرد:

$$V(s)=\frac{A}{(s+\alpha)}+\frac{B}{(s+\beta)}$$

که در آن A و B را می‌توان از چند روش پیدا کرد. شاید سریع‌ترین راه به طریق زیر باشد:

$$A=\lim_{s\to-\alpha}\left[(s+\alpha)V(s)-\frac{(s+\alpha)}{(s+\beta)}B\right]$$
$$=\lim_{s\to-\alpha}\left[\frac{1}{(s+\beta)}-0\right]=\frac{1}{\beta-\alpha}$$

در این معادله باید از فرم یک کسری V(s) استفاده کنیم (یعنی فرم توسعه‌نیافته).

با توجه به این‌که جمله دوم همیشه صفر است در عمل می‌توان به راحتی چنین نوشت:

$$A=(s+\alpha)\,V(s)|_{s=-\alpha}$$

به‌طور مشابه:

$$B=(s+\beta)\,V(s)|_{s=-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}$$

و بنابراین

$$V(s)=\frac{1/(\beta-\alpha)}{(s+\alpha)}+\frac{1/(\alpha-\beta)}{(s-\beta)}$$

ما قبلاً عکس تبدیل لاپلاس به شکل فوق را به دست آورده‌ایم. پس:

$$v(t)=\frac{1}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}u(t)+\frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}u(t)=\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$$

در صورت تمایل می‌توان رابطه فوق را به عنوان وارده‌ای جدید در لیست جفت لاپلاس‌ها لحاظ کرد:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)\Leftrightarrow\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

این روش، به سادگی، به توابعی که مخرج آن‌ها از مرتبه بالاترند، علی‌رغم خسته‌کنندگی، قابل گسترش است. باید توجه کرد که ما درباره حقیقی بودن A و B صحبتی نکردیم. با این وجود، در مواردی که α و β مختلط‌اند، درمی‌یابیم که مزدوج نیز می‌باشند. در این موارد خواهیم دید که $A=B^*$ است، به بیان دیگر ضرایب نیز مزدوج خواهند بود.

مثال ۵-۱۴

تبدیل عکس تابع زیر را به دست آورید:

$$P(s)=\frac{7s+5}{s^2+s}$$

می‌بینیم که P(s) یک تابع گویا است (درجه صورت از مخرج کمتر است، یعنی درجه صورت 1 و درجه مخرج 2 است)، لذا با فاکتورگیری از مخرج جلو می‌رویم:

$$P(s)=\frac{7s+5}{s(s+1)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+1}$$

گام بعدی تعیین مقادیر a و b است. با اعمال روش باقیمانده داریم:

$$a=\frac{7s+5}{s+1}\Big|_{s=0}=5, \quad و \quad b=\frac{7s+5}{s}\Big|_{s=-1}=2$$

سپس می‌توان P(s) را چنین نوشت:

$$P(s)=\frac{5}{s}+\frac{2}{s+1}$$

تبدیل معکوس چنین است:

$$p(t)=[5+2e^{-t}]u(t)$$

تمرین

۹-۱۴ با فرض تابع $Q(s)=\dfrac{11s+30}{s^2+3s}$، تابع q(t) را حساب کنید.

جواب: $q(t)=[10+e^{-3t}]u(t)$

قطب‌های تکراری

حالت باقیمانده، قطب‌های تکراری است. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$V(s)=\frac{N(s)}{(s-p)^n}$$

که قابل توسعه به شکل زیر است:

$$V(s)=\frac{a_n}{(s-p)^n}+\frac{a_{n-1}}{(s-p)^{n-1}}+\dots+\frac{a_1}{(s-p)}$$

برای تعیین هر ثابت، ابتدا فرم گسترش‌یافته V(s) را در $(s-p)^n$ ضرب می‌کنیم. ضریب a_n را می‌توان با محاسبه عبارت در s = p به دست آورد. بقیه ثابت‌ها با مشتق‌گیری از عبارت $(s-p)^n V(s)$ به دفعات لازم در s = p معین می‌شوند. روند مشتق‌گیری ثابت‌هایی را که قبلاً به دست آمده‌اند حذف می‌کند و محاسبه در s = p بقیه ثابت‌ها را حذف می‌نماید. مثلاً a_{n-2} با ارزیابی زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p)^n V(s)]_{s=p}$$

و جمله a_{n-k} چنین محاسبه می‌گردد:

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}[(s-p)^n V(s)]_{s=p}$$

برای تشریح اساس روش بیایید عکس تبدیل لاپلاس تابعی را که ترکیبی از هر دو حالت، یعنی یک قطب در s = 0 و دو قطب در s = -6 دارد، بررسی کنیم.

مثال ۶-۱۴

عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$V(s)=\frac{2}{s^3+12s^2+36s}$$

توجه دارید که مخرج به سادگی به صورت حاصل‌ضرب درمی‌آید:

$$V(s)=\frac{2}{s(s+6)(s+6)}=\frac{2}{s(s+6)^2}$$

همان‌طور که قول دادیم، ملاحظه می‌کنید که هنوز هم سه قطب وجود دارد یکی در $s = 0$ و دو قطب در $s = -6$. اکنون تابع را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{a_1}{(s+6)^2} + \frac{a_2}{(s+6)} + \frac{a_3}{s}$$

و سپس روال جدیدی را برای تهیه ثابت‌های a_1 و a_2 اعمال می‌کنیم. برای یافتن a_3 از روال قبل استفاده می‌کنیم. پس:

$$a_1 = \left[(s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2}\right]_{s=-6} = \left.\frac{2}{s}\right|_{s=-5} = \frac{-1}{3}$$

و

$$a_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2}\right]_{s=-6} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s}\right)\right|_{s=-6} = \left.\frac{-2}{s^2}\right|_{s=-6} = \frac{-1}{18}$$

ثابت باقیمانده a_3 با استفاده از روال قطب‌های منفک حاصل می‌شود.

$$a_3 = \left. s\frac{2}{s(s+6)^2}\right|_{s=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

بنابراین $\mathbf{V}(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{(s+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(s+6)} + \frac{\frac{1}{18}}{s}$$

با به کارگیری قضیه خطی بودن، عکس تبدیل $\mathbf{V}(s)$ با تعیین عکس هر یک از سه جمله حاصل می‌گردد. اولین جمله در سمت راست چنین است:

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

با معادله (۲۱) عکس تبدیل برابر است با $-\frac{1}{3}te^{-6t}u(t)$. به طریقی مشابه می‌بینیم که عکس تبدیل برای جمله دوم $-\frac{1}{18}e^{-6t}u(t)$ است و جمله سوم هم $\frac{1}{18}u(t)$ می‌باشد. بنابراین:

$$v(t) = -\frac{1}{3}te^{-6t}u(t) - \frac{1}{18}e^{-6t}u(t) + \frac{1}{18}u(t)$$

و به صورت جمع و جورتر داریم:

$$v(t) = \frac{1}{18}[1 - (1+6t)e^{-6t}]u(t)$$

تمرین

۱۴-۱۰ اگر $\mathbf{V}(s) = 2s/(s^2+4)^2$ باشد، $v(t)$ را به دست آورید.

جواب: $\frac{1}{2}t \sin 2tu(t)$

تحلیل کامپیوتری

از متلب (MATLAB) که یک بسته نرم‌افزاری تحلیل ریاضی پرقدرت است، برای حل معادلات حاصل از تحلیل مدارهایی که منبع تحریک متغیر با زمان دارند، به چند طریق می‌توان استفاده کرد. سرراست‌ترین تکنیک از روال‌های حل معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) استفاده می‌کند که توابع ()ode23 و ()ode45 می‌باشند. این دو روال به روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل مبتنی است. ضمن این‌که ()ode45 دقت بالاتری دارد. با این وجود، حل فقط در نقاط جدا از هم انجام می‌شود و بنابراین در تمام زمان‌ها مقدار آن معلوم نیست. در بسیاری از کاربردها این یک عیب است مگر این‌که تعداد نقاط زیادی به کار رود.

تکنیک تبدیل لاپلاس عبارت دقیقی را برای حل معادلات دیفرانسیل فراهم می‌نماید و بنابراین نسبت به استفاده از ODE مزایای متعددی دارد. مزایای دیگری از تبدیل لاپلاس در فصل بعدی خصوصاً وقتی اهمیت عبارات حوزه‌ها را مطالعه می‌کنیم، ارائه خواهد شد.

همان‌طور که قبلاً دیدیم، جدول نظاره هنگام کار با تبدیل‌های لاپلاس علی‌رغم خسته‌کنندگی روش باقیمانده‌ها در چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا، به شدت سهل‌الوصول است. در این موارد متلب نیز می‌تواند کمک مؤثری بنماید. چون حاوی چندین تابع مفید برای دستکاری عبارات چندجمله‌ای است.

در متلب چندجمله‌ای

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

به صورت بردار $[a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_1\ a_0]$ ذخیره شده است.

بنابراین برای تعریف چندجمله‌ای $\mathbf{N}(s) = 2$ و $\mathbf{D}(s) = s^3 + 12s^2 + 36s$ فقط می‌نویسیم:

```
EDU >> N = [2] ;
EDU >> D = [1  12  36  0] ;
```

ریشه‌های هر چندجمله‌ای را با فراخوانی تابع roots(p) می‌توان به دست آورد که در آن p بردار ضرایب چندجمله‌ای است. مثلاً

```
EDU >> q = [1  8  16];
EDU >> roots(q)
```

که منجر می‌شود به

```
ans =
      -4
      -4
```

متلب همچنین امکان تعیین باقیمانده‌های تابع گویای $\mathbf{N}(s)/\mathbf{D}(s)$ را با به کارگیری تابع residue() فراهم می‌کند. مثلاً

```
EDU >> [r  p  y] = residue(N, D) ;
```

سه عدد r، p و y را بازمی‌گرداند به نحوی که

$$\frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \ldots + \frac{r_n}{x - p_n} + \mathbf{y}(s)$$

در حالت نبود حالت چندقطبی و در حالت n قطبی

$$\frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{r_1}{(x - p)} + \frac{r_2}{(x - p)^2} + \ldots + \frac{r_n}{(x - p)^n} + \mathbf{y}(s)$$

توجه کنید مادامی که درجه چند جمله‌ای صورت کمتر از چندجمله‌ای مخرج باشد، بردار $\mathbf{y}(s)$ همیشه خالی است.

اجرای فرمان بدون نقطه ویرگول، خروجی زیر را می‌دهد.

```
r =             p =           y =
   -0.0556         -6             [ ]
   -0.3333         -6
    0.0556          0
```

که با پاسخ مثال ۱۴-۶ وفاق دارد.

۱۴_۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس

اکنون می‌توانیم دو قضیه دیگر را بیان کنیم که شاید علت وجود تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار باشد. این دو قضیه عبارتند از قضایای مشتق و انتگرال زمانی. آنها در تبدیل مشتقات و انتگرال‌های موجود در معادلات مدار در حوزه زمان به ما کمک می‌کنند.

قضیه مشتق زمانی

بگذارید ابتدا با بررسی تابع زمانی $v(t)$ که تابع تبدیل لاپلاس آن، $\mathbf{V(s)}$، معلوم است، به مشتق زمانی نگاه کنیم. ما تبدیل مشتق اول $v(t)$ را می‌خواهیم:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{dv}{dt}\,dt$$

از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$U = e^{-st} \qquad dV = \frac{dv}{dt}\,dt$$

با این نتیجه:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = v(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}v(t)\,dt$$

اولین جمله در سمت راست با افزایش بدون محدودیت زمان، باید به سمت صفر میل کند، در غیر این صورت $\mathbf{V(s)}$ وجود نخواهد داشت. از این رو

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = 0 - v(0^-) + \mathbf{sV(s)}$$

و

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{sV(s)} - v(0^-) \qquad (۲۳)$$

رابط مشابهی را می‌توان برای مشتقات مرتبه بالاتر به دست آورد:

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow s^2V(s) - sv(0^-) - v'(0^-) \qquad (۲۴)$$

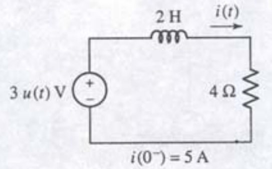
$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow s^3V(s) - s^2v(0^-) - sv'(0^-) - v''(0^-) \qquad (۲۵)$$

که $v'(0)$ مقدار اولین مشتق $v(t)$ در $t = 0^-$ و $v''(0^-)$ مقدار اولیه مشتق دوم $v(t)$ و الی آخر است. وقتی همه مقادیر اولیه صفر است می‌بینیم که هر بار مشتق‌گیری نسبت به t در حوزه زمان برابر است با ضرب s در حوزه فرکانس، دوبار مشتق‌گیری در حوزه زمان مربوط به ضرب در s^2 در حوزه فرکانس و به همین ترتیب است. بنابراین مشتق‌گیری در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه فرکانس می‌باشد. این ساده‌سازی بسیار اساسی است! همچنین می‌توان دید که حتی اگر مقادیر اولیه صفر نباشد، اثر آن‌ها محسوس است. مثال ساده زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۱۴_۷

با فرض مدار RL سری در شکل ۳ـ۱۴ جریان داخل مقاومت $4\ \Omega$ را به دست آورید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.
  باید عبارتی برای جریان $i(t)$ پیدا کنیم.
- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.
  مدار با یک ولتاژ پله راه‌اندازی شده است و مقدار اولیه جریان را در $t = 0^-$ برابر $5\ A$ داریم.



شکل ۳ـ۱۴ مداری که برای تبدیل معادله دیفرانسیل $2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$ به رابطه $2[sI(s) - i(0^-)] + 4I(s) = 3/s$.

- ارائه طرح.
  اگر KVL را به این مدار اعمال نماییم، معادله دیفرانسیلی به دست خواهیم آورد که در آن $i(t)$ مجهول است. با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف این معادله آن را به حوزه $\mathbf{s}$ می‌برد. با حل معادله جبری برای $\mathbf{I(s)}$، تنها کار باقیمانده گرفتن عکس تبدیل لاپلاس برای یافتن $i(t)$ است.
- معادلات مناسب را بنویسید.
  با KVL حول تک حلقه در فضای زمان داریم:

$$2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

اکنون تبدیل لاپلاس هر جمله را به دست می‌آوریم:

$$2[\mathbf{sI(s)} - i(0^-)] + 4\mathbf{I(s)} = \frac{3}{s}$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است؟
  ما معادله‌ای داریم که ممکن است برای نمایش حوزه فرکانس $\mathbf{I(s)}$ برای هدفمان، $i(t)$ حل شود.
- اقدام به حل.
  اکنون $\mathbf{I(s)}$ را حل می‌نماییم، $i(0^-) = 5$ می‌گیریم:

$$(2s + 4)\,\mathbf{I(s)} = \frac{3}{s} + 10$$

و

$$\mathbf{I(s)} = \frac{1.5}{s(s+2)} + \frac{5}{s+2}$$

با استفاده از روش باقیمانده‌ها از جمله اول داریم:

$$\frac{1.5}{s+2}\Big|_{s=0} = 0.75$$

و

$$\frac{1.5}{s}\Big|_{s=-2} = -0.75$$

و بنابراین

$$\mathbf{I(s)} = \frac{0.75}{s} + \frac{4.25}{s+2}$$

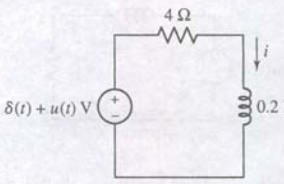
آن‌گاه برای تبدیل از جفت تبدیل معلوم استفاده می‌کنیم:

$$i(t) = 0.75\,u(t) + 4.25\,e^{-2t}\,u(t)$$
$$= (0.75 + 4.25\,e^{-2t})u(t) \quad A$$

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟
  براساس تجربه قبلی خود با این‌گونه مدارها انتظار یک پاسخ واداشته dc به‌علاوهٔ یک پاسخ طبیعی میرایی نمایی را داریم. در $t = 0$ داریم $i(0) = 5\ A$ که باید هم این‌طور باشد و $t \to \infty$ به $i(t) \to \frac{3}{4}\ A$ میل می‌کند که انتظار آن را داریم.

نابراین حل $i(t)$ کامل است. هر دو پاسخ واداشته $0.75u(t)$ و پاسخ طبیعی $4.25e^{-2t}u(t)$ جود دارند و مقدار اولیه به‌طور خودکار لحاظ شده است. روشی که ارائه شده است راه‌حلی ست که برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل بی‌زحمت به‌نظر می‌رسد.

تمرین



شکل ۱۴_۴

۱۴_۱۱ برای یافتن $i(t)$ در شکل ۱۴_۴ از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.
جواب: $(0.25 + 4.75\,e^{-20t})u(t)$ A.

قضیه انتگرال زمانی

ساده‌سازی مشابهی را به هنگام انتگرال‌گیری نسبت به زمان در معادلات مدار می‌توان انجام داد. بیایید تبدیل لاپلاس تابع زمانی $\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx$ را تعیین کنیم.

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right] dt$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$u = \int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \qquad dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = v(t)\,dt \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

پس

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \left\{\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}v(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s}\mathbf{V}(s)$$

اما چون با $t \to \infty$، $e^{-st} \to 0$ داریم، اولین جمله سمت راست با $t \to 0^-$ در حد بالا از بین می‌رود و فقط $\mathbf{V}(s)/s$ باقی می‌ماند.

$$\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}(s)}{s} \qquad (۲۶)$$

و بنابراین انتگرال‌گیری در حوزه زمان معادل با تقسیم s در حوزه فرکانس است. باز هم یک عمل نسبتاً مشکل ریاضی در حوزه زمان تبدیل به یک عمل ساده‌تر در حوزه فرکانس شد است.

مثال ۱۴_۸

در شکل ۱۴_۵، برای مدار RC سری جریان $i(t)$ را در $t > 0$ معین کنید.

ابتدا معادله حلقه را می‌نویسیم:

$$u(t) = 4i(t) + 16\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,dt$$

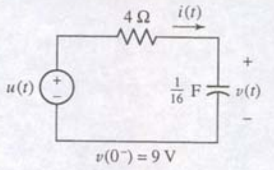
به منظور اعمال قضیه انتگرال زمانی باید حد پایین انتگرال را به 0^- تبدیل کنیم. پس

$$16\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = 16\int_{-\infty}^{0^-} i(t)\,dt + 16\int_{0^-}^{t} i(t)\,dt$$

$$= v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t)\,dt$$

بنابراین

$$u(t) = 4i(t) + v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t)\,dt$$



شکل ۱۴_۵ مداری که استفاده از تبدیل لاپلاس را برای جفت $\int_{0^-} i(t)\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{s}\mathbf{I}(s)$ تشریح می‌کند.

آن‌گاه تبدیل لاپلاس را در دو طرف این معادله به دست می‌آوریم. چون می‌خواهیم تبدیل لاپلاس یک‌سویه بگیریم. درواقع $\mathcal{L}\{v(0^-)u(t)\}$ همان $\mathcal{L}\{v(0^-)\}$ است و بنابراین:

$$\frac{1}{s} = 4\mathbf{I}(s) + \frac{9}{s} + \frac{16}{s}\mathbf{I}(s)$$

و با حل برای $\mathbf{I}(s)$ خواهیم داشت:

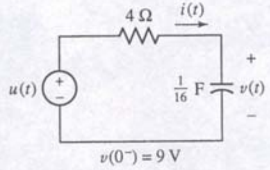
$$\mathbf{I}(s) = \frac{-2}{s+4}$$

و به این ترتیب نتیجه مطلوب فوراً حاصل می‌گردد:

$$i(t) = -2e^{-4t}\,u(t) \text{ A}$$

مثال ۱۴_۹

برای همان مدار شکل قبلی که برای سادگی تکرار شده است، $v(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۴_۶ مدار شکل ۱۴_۵ تکرار شده است و در آن ولتاژ $v(t)$ موردنظر است.

این بار معادله گرهی را می‌نویسیم:

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = 0$$

با تبدیل لاپلاس داریم:

$$\frac{\mathbf{V}(s)}{4} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{16}s\mathbf{V}(s) - \frac{v(0^-)}{16} = 0$$

یا

$$\mathbf{V}(s)\left(1 + \frac{s}{4}\right) = \frac{1}{s} + \frac{9}{4}$$

پس

$$\mathbf{V}(s) = \frac{4}{s(s+4)} + \frac{9}{s+4}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} + \frac{9}{s+4}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{8}{s+4}$$

با عکس تبدیل

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t})\,u(t)$$

به این ترتیب، به سرعت ولتاژ خازن موردنظر را بدون استفاده از حل معمول معادله دیفرانسیل به دست آوردیم.

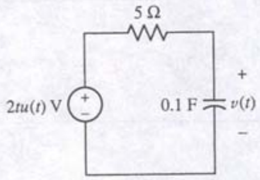
برای آزمایش این جواب می‌توانیم نشان دهیم که $(1/16)dv/dt$ همان جریان خازن $i(t)$ است. برای $t > 0$ داریم:

$$\frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{16}(-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

که با نتیجه حاصل از مثال ۱۴_۸ وفاق دارد.

تمرین

۱۴_۱۲ $v(t)$ را در $t = 800$ ms برای مدار شکل ۱۴_۷ به دست آورید.
جواب: 802 mV.



شکل ۱۴_۷

تبدیل لاپلاس توابع سینوسی

به خاطر استفاده از هر دو قضیه خطی بودن و مشتق‌گیری زمانی و افزودن مهم‌ترین زوج تبدیل لاپلاس به جدول زوج‌ها تبدیل لاپلاس $\sin \omega t\, u(t)$ را در نظر می‌گیریم. ما می‌توانیم تعریف انتگرالی تبدیل لاپلاس را به‌کار ببریم و انتگرال جزءبه‌جزء بگیریم ولی این کار مشکل و غیرضروری است. درعوض از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

تبدیل مجموع این دو جمله برابر با مجموع تبدیل‌ها است. هر یک از جملات تابعی نمایی است و قبلاً تبدیل آن‌ها را دیدیم. پس بلافاصله چنین می‌نویسیم:

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\, u(t)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (۲۷)$$

$$\sin \omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

اکنون از قضیه مشتق‌گیری زمانی برای تبدیل $\cos \omega t\ u(t)$ که برابر مشتق $\sin \omega t$ است، استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\, u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}[\sin \omega t\, u(t)]\right\} = \frac{1}{\omega} s \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (۲۸)$$

$$\cos \omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

توجه کنید که از $\sin t\, |_{t=0} = 0$ استفاده کرده‌ایم.

قضیه جابه‌جایی زمان

همان‌طور که در چندین مسئله ملاحظه شد، همه توابع تحریک در $t = 0$ شروع نمی‌شوند. برای تابعی که به مقدار معینی از زمان جابه‌جا شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌خصوص اگر تبدیل $f(t)\ u(t)$ تابع معلوم $F(s)$ باشد، آن‌گاه تبدیل $f(t - a)\ u(t - a)$ که به معنی تأخیر تابع اصلی به مقدار a ثانیه است، چیست؟ با کار مستقیم روی تعریف تبدیل لاپلاس برای $t \geq a^-$ داریم:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)\, dt = \int_{a^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt$$

با انتخاب متغیر جدید انتگرال‌گیری $\tau = t - a$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau = e^{-as}F(s)$$

بنابراین

$$f(t - a)\ u(t - a) \Leftrightarrow e^{-as}\ F(s) \qquad (a \geq 0) \qquad (۲۹)$$

این نتیجه به نام قضیه جابه‌جایی زمان شناخته می‌شود و بیان می‌دارد که اگر یک تابع زمانی در حوزه زمان به اندازه a تأخیر پیدا کند، نتیجه در حوزه فرکانسی در e^{-as} ضرب می‌شود.

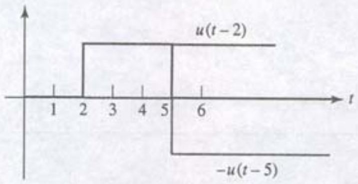
مثال ۱۰ـ۱۴

تابع تبدیل پالس مربعی $v(t) = u(t - 2) - u(t - 5)$ را پیدا کنید.

این پالس که در شکل ۸ـ۱۴ ترسیم شده است دارای مقدار واحد در فاصله زمانی $2 < t < 5$ است، و در غیر این صورت صفر است. می‌دانیم که تبدیل $u(t)$، فقط $\frac{1}{s}$ و چون $u(t - 2)$، همان $u(t)$ با تأخیر 2 ثانیه است، تبدیل این تابع e^{-2s} / s می‌باشد. به طور مشابه تبدیل $u(t - 5)$ برابر e^{-5s} / s است. پس در نتیجه تبدیل موردنظر برابر است با:

$$V(s) = \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} = \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s}$$

ملاحظه می‌شود که در تبدیل برای $V(s)$ لازم نیست که از تعریف تبدیل لاپلاس استفاده کنیم.

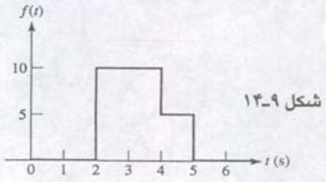


شکل ۸ـ۱۴ نمودار $u(t - 2) - u(t - 5)$.

تمرین

۱۳ـ۱۴ تبدیل لاپلاس تابع زمانی در شکل ۹ـ۱۴ را پیدا کنید.

جواب: $(5 / s)(2e^{-2s} - e^{-4s} - e^{-5s})$.



شکل ۹ـ۱۴

تا این‌جا تعدادی وارده برای لیست جفت‌های تبدیل لاپلاس که قبلاً در تهیه‌اش توافق کردیم، فراهم شد. از آن جمله تابع ضربه، تابع پله، تابع نمایی، تابع شیب و توابع سینوس و کسینوس و مجموع دو تابع نمایی بودند. به‌علاوه در اعمال جمع، ضرب در یک ثابت، مشتق و انتگرال

در حوزه زمان به نتایجی در حوزه s رسیدیم. این نتایج در جدول ۱ـ۱۴ و ۲ـ۱۴ جمع‌آوری و چند نمونه دیگر هم در پیوست ۷ لحاظ شده‌اند.

جدول ۱ـ۱۴ زوج‌های تبدیل لاپلاس.

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$tu(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t), n = 1, 2, \ldots$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}u(t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}u(t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t), n = 1, 2, \ldots$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t\, u(t)$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t\, u(t)$
$\frac{s\sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t + \theta)\, u(t)$
$\frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t + \theta)\, u(t)$
$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\sin \omega t\, u(t)$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\cos \omega t\, u(t)$

جدول ۲ـ۱۴ خواص تبدیل لاپلاس.

عملیات	$f(t)$	$F(s)$
جمع	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
ضریب اسکالر	$kf(t)$	$kF(s)$
مشتق‌گیری در حوزه زمان	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
انتگرال زمان	$\int_{0^-}^{t} f(t)\, dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
	$\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\, dt$
کانولوشن	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
جابه‌جایی زمانی	$f(t-a)u(t-a), a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$
جابه‌جایی فرکانسی	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
مشتق‌گیری در حوزه فرکانس	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
انتگرال‌گیری در حوزه فرکانس	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)\, ds$
تغییر مقیاس	$f(at), a \geq 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
مقدار اولیه	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
مقدار نهایی	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$, all poles of $sF(s)$ in LHP
تناوب زمانی	$f(t) = f(t + nT)$, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}F_1(s)$, where $F_1(s) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}\, dt$

کاربرد عملی

پایداری یک سیستم

سال‌ها قبل، یکی از نویسندگان در جاده‌های کشور خود در حال رانندگی بود و سعی داشت از کنترل سرعت الکترونیک (کنترل کروز) اتومبیل استفاده کند. پس از روشن‌کردن سیستم و تنظیم سرعت در دقیقاً بالاتر از حد مجاز، دکمه تنظیم فشرده شد و پدال شتاب آزاد گردید؛ در این لحظه انتظار می‌رفت سیستم سرعت تنظیمی را با سرعت سوخت نگه دارد.

متأسفانه، چیز دیگری رخ داد. سرعت خودرو به میزان 10% افت کرد و کنترل کروز الکترونیک با افزایش سوخت واکنش نشان داد. دو واقعه کاملاً منطبق نبودند، لذا چند لحظه بعد سرعت خودرو از حد خود فراجهش نمود ـ در نتیجه سوخت افت ناگهانی کرد ـ این منجر به کاهش سرعت اتومبیل شد. سیکل ادامه یافت و موجب بهت راننده گردید که در نتیجه به ناچار سیستم را خاموش کرد.

واضح است که پاسخ سیستم بهینه نبوده است ـ در واقع طراحی سیستم ناپایدار بوده است. پایداری و ثبات سیستم از موضوعات مهم در مهندسی در گستره وسیعی از مسائل است (مثل کنترل کروز، رگولاتورهای دما و سیستم‌های ردیاب، نمونه‌هایی از آن هستند)، و تکنیک ارائه‌شده در این فصل در بررسی یک سیستم خاص از این نظر گرانبها است که اجازه می‌دهد تا پایداری یک سیستم مورد ارزیابی قرار گیرد.

یکی از جنبه‌های قدرتمند کار در فضای s که به وسیله تبدیل لاپلاس امکان‌پذیر شد این‌است‌که در عوض توصیف پاسخ یک سیستم خاص از طریق یک معادله دیفرانسیل ـ انتگرالی، ما می‌توانیم یک تابع تبدیل سیستمی به دست آوریم که به وسیله نسبت دو چندجمله‌ای از s نشان داده شده است. سپس موضوع پایداری به راحتی با مطالعه مخرج تابع تبدیل بررسی می‌گردد: نباید قطبی دارای مولفه حقیقی مثبت باشد.

در واقع فقط چند تکنیک وجود دارد که قابل اِعمال به مسئله برای تعیین پایداری خاص می‌باشد و یک روش ساده به نام تست راث معروف است. تابع سیستمی را در حوزه s درنظربگیرید (موضوع در فصل ۱۵ بیشتر توضیح داده شده است):

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}}$$

چندجمله‌ای که به وسیله $\mathbf{D(s)}$ نشان داده شده است را می‌توان به صورت $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ نوشت. بدون این‌که چندجمله‌ای را به صورت ضرب درآوریم نمی‌توان راجع‌به قطب‌ها اظهار نظر کرد. اگر همه ضرایب a_0 ... a_n مثبت و غیرصفر باشد، رویه راث به ما چیدن آن‌ها را مطابق زیر پیشنهاد می‌نماید:

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{matrix}$$

آن‌گاه سطر سوم را با ضرب متقابل دو سطر چنین به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

و نیز سطر چهارم را با ضرب متقابل سطرهای دوم و سوم به دست می‌آوریم. این فرآیند ادامه می‌یابد تا سطرهای $n + 1$ از مقادیر عددی به دست آید. آنچه باقی می‌ماند پیمایش ستون سمت چپ برای یافتن تغییر در علامت است. تعداد تغییر علامت مشخص‌کننده تعداد قطب‌های موجود با قطب‌های حقیقی است.

مثلاً، اجازه بدهید تا سیستم کنترل کروز اتومبیل مطرح‌شده نویسنده دارای تابع تبدیل با مخرج زیر باشد:

$$\mathbf{D(s)} = 7s^4 + 4s^3 + s^2 + 13s + 2$$

همه ضرایب این چندجمله‌ای s مرتبه چهارم مثبت و غیرصفرند. بنابراین جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

7	1	2
4	13	0
−21.75	2	
13.37		
2		

از این جدول می‌بینیم که تغییر علامت در سمت چپ‌ترین ستون وجود دارد. بنابراین در واقع سیستم ناپایدار است (که توضیح آن عدم امکان انجام و اجرای کار است)، زیرا دو قطب دارای مولفه حقیقی مثبت‌اند.

۱۴ـ۷ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

دو قضیه اساسی آخر که مورد بحث ما است، به نام قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی خوانده می‌شوند. آن‌ها می‌توانند $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را با توجه به مقادیر حد $\mathbf{sF(s)}$ به ما بدهند. چنین توانمندی ارزشمند است. اگر فقط مقادیر اولیه و نهایی مورد نیاز باشد، نیازی به صرف وقت و انجام عمل تبدیل معکوس نیست.

قضیه مقدار اولیه

برای به دست آوردن قضیه مقدار اولیه، یک بار دیگر تبدیل لاپلاس را برای مشتق ملاحظه‌می‌کنیم.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \mathbf{sF(s)} - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt$$

اکنون اجازه می‌دهیم تا s به سمت بینهایت برود. با شکستن انتگرال به دو بخش داریم:

$$\lim_{s\to\infty}[\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} e^0\frac{df}{dt}dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt\right)$$

می‌بینیم که در حد انتگرال دوم به صفر می‌رسد، چون خود مقدار زیر انتگرال صفر می‌شود، همچنین $f(0^-)$ تابعی از s نیست و می‌تواند از حد سمت چپ خارج گردد:

$$-f(0^-) + \lim_{s\to\infty}[\mathbf{sF(s)}] = \lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+} df = \lim_{s\to\infty}[f(0^+) - f(0^-)]$$
$$= f(0^+) - f(0^-)$$

بالاخره

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sF(s)]$$

ا

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[sF(s)] \qquad (۳۰$$

رابطه فوق بیان ریاضی **قضیه مقدار اولیه** است. این رابطه بیان می‌دارد که مقدار اولیه ابع زمانی $f(t)$ را می‌توان از تبدیل لاپلاس $\mathbf{F(s)}$ با ضرب تبدیل در s و سپس میل به سمت نهایت به دست آورد. توجه کنید که مقدار اولیه به دست آمده حد راست $f(t)$ است.

به کمک قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی که به زودی آن را بررسی خواهیم کرد، می‌توان تایج تبدیل و عکس تبدیل را امتحان کرد. مثلاً تبدیل لاپلاس $\cos(\omega_0 t)\ u(t)$ را برابر $s/(s^2 + \omega_0^2$ محاسبه کردیم. با توجه به این‌که $f(0^+) = 1$ است، می‌توان صحت تبدیل پلاس فوق را با اعمال قضیه مقدار اولیه امتحان کرد:

$$\lim_{s\to\infty}\left(s\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\right) = 1$$

ه صحیح است.

ضیه مقدار نهایی

ضیه مقدار نهایی به اندازه مقدار اولیه مفید نیست و به این دلیل برای رده خاصی از تبدیل‌ها کار می‌رود. برای این‌که ببینیم آیا تبدیلی در این رده قرار می‌گیرد یا نه، مخرج $\mathbf{F(s)}$ را ید برای همهٔ مقادیری از s که آن را صفر می‌کند، به دست آورید. تنها آن دسته از توابع $\mathbf{F(s}$ که قطب‌هایشان در سمت چپ صفر s (یعنی $\sigma < 0$) قرار دارد، به جز قطب $s = 0$ ای استفاده در قضیه مقدار نهایی مناسب‌اند. دوباره تبدیل لاپلاس df/dt را بررسی می‌کنیم:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt = \mathbf{sF(s)} - f(0^-)$$

ن بار با میل s به سمت صفر داریم:

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt = \lim_{s\to 0}[\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt$$

رض می‌کنیم که $f(t)$ و مشتق آن قابل تبدیل باشند، جمله آخر عبارت فوق را می‌توان به ورت یک حد نشان داد:

$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt = \lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df}{dt}dt = \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0^-)]$$

توجه به این‌که $f(0^-)$ ثابت است، از مقایسه دو عبارت فوق نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)] \qquad (۳$$

ه همان **قضیه مقدار نهایی** است. در استفاده از این قضیه لازم است که $f(\infty)$ یعنی حد $f(t)$ ازای $t \to \infty$ وجود داشته باشد و همه قطب‌های $\mathbf{F(s)}$ به جز قطب ساده در مبدأ در نیمه مت چپ صفحه s واقع باشند. بنابراین قطب‌های حاصل‌ضرب $\mathbf{sF(s)}$ در داخل نیمه سمت پ واقع خواهد شد.

مثال ۱۱-۱۴

به‌کمک قضیه مقدار نهایی $f(\infty)$ را برای تابع $(1 - e^{-at})\,u(t)$ به دست آورید که در آن $a > 0$ است.

حتی بدون استفاده از قضیه مدار نهایی می‌توان بلافاصله دید که $f(\infty) = 1$ است. تابع تبدیل $f(t)$ برابر است با:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

قطب‌های $F(s)$ عبارتند از: $s = 0$ و $s = -a$. بنابراین قطب غیرصفر با فرض $a > 0$ در سمت چپ صفحه s واقع است. ملاحظه می‌شود که می‌توان قضیه مقدار نهایی را به این تابع هم اعمال کرد. با ضرب در s و میل s به سمت صفر داریم:

$$\lim_{s\to 0} [sF(s)] = \lim_{s\to 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

که با $f(\infty)$ برابر است.

با این وجود اگر $f(t)$ سینوسی باشد و لذا $F(s)$ روی محور $j\omega$ دارای قطب‌هایی باشد، آن‌گاه کاربرد چشم کورکورانه قضیه مقدار نهایی، ما را به سمت صفر شدن مقدار نهایی سوق می‌دهد. با این وجود می‌دانیم که مقدار نهایی $\cos \omega_0 t$ یا $\sin \omega_0 t$ نامعین است. پس مواظب قطب‌های روی محور $j\omega$ باشید.

تمرین

۱۴-۱۴ بدون این‌که ابتدا $f(t)$ را بیابید، مقدار $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را برای تبدیل‌های زیر به‌دست آورید:

(الف) $4e^{-2s}(s + 50) / s$، (ب) $(s^2 + 6) / (s^2 + 7)$،

(ج) $(2.5^2 + 10) / [2s(s^2 + 32 + 5)]$.

جواب: 0، 200، ∞، نامعین (قطب‌ها روی $j\omega$ هستند)، 2.5، 1.

۱۴-۸ خلاصه فصل و مرور

- مفهوم فرکانس مختلط اجازه می‌دهد تا بررسی مؤلفه‌های نمایی میرا و نوسانی یک تابع به‌طور همزمان صورت گیرد.
- فرکانس مختلط $s = \sigma + j\omega$ حالت کلی است، $(s = 0)$dc، نمایی $(\omega = 0)$ و سینوسی $(\sigma = 0)$ حالات خاص‌اند.
- تحلیل مدارها در حوزه s از تبدیل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی در حوزه زمان به معادلات جبری در حوزه فرکانس امکان‌پذیر است.
- در مسایل تحلیل مدار، ما توابع حوزه زمان را با تبدیل لاپلاس یکسویه به حوزه فرکانس تبدیل می‌نماییم.

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt$$

- عکس تبدیل لاپلاس عبارات حوزه فرکانس را به حوزه زمان تبدیل می‌کند. با این وجود به دلیل در اختیار بودن جدول لیست جفت‌های تبدیل لاپلاس، کمتر از آن استفاده می‌شود.
- تابع ضربه واحد تقریب خوبی برای پالس‌های باریک در مقایسه با ثابت‌های زمانی مدار است. این تابع فقط در یک نقطه غیر صفر است و سطح واحدی دارد.
- خاصیت جمع‌پذیری $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$
- (خاصیت همگنی) $\mathcal{L}\{kf(t)\} = k\mathcal{L}\{f(t)\}$ ، $k =$ مقدار ثابت

- قضایای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری اجازه می‌دهند تا معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی را در حوزه زمان به معادلات جبری در حوزه فرکانس تبدیل نماییم.
- عکس تبدیل‌ها معمولاً با تکنیک بسط به کسرهای جزیی و اعمال مختلف به دست می‌آیند (جدول ۲-۱۴) تا کمیت‌های حوزه s را به عباراتی که در جدول تبدیل یافت می‌شوند، مبدل سازند (مثل جدول ۱-۱۴).
- قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی فقط برای $f(t = 0^+)$ و $f(t = \infty)$ مفیدند.

۱۴-۹ خواندنی‌های کمکی

An easily readable development of the Laplace transform and some of its key properties can be found in Chap. 4 of

A. Pinkus and S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms,* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1997.

A much more detailed treatment of integral transforms and their application to science and engineering problems can be found in

B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications,* 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

Stability and the Routh test are discussed in Chap. 5 of

K. Ogata, *Modern Control Engineering,* 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

مسائل

۱۴-۱ فرکانس مختلط

۱. برای هر مورد فرکانس مختلط را مشخص نمایید.
(الف) $v(t) = 5V$، (ب) $i(t) = 3 \cos 9t\ \mu A$، (ج) $i(t) = 2.5e^{-8t}$ mA، (د) $v(t) = 65e^{-1000t} \cos 1000t$ V، (ه) $v(t) = 8 + 2 \cos t$ mV.

۲. برای هر یک از موارد زیر فرکانس مختلط را بیان کنید: (الف) $v(t) = 33.3$ V، (ب) $i(t) = 3 \cos 77t$ A، (ج) $q(t) = 7e^{-5t}$ C، و (د) $q(t) = 7e^{-5t} - 19e^{-5t}\sin(8t - 42°)$ C.

۳. مزدوج مختلط هر جمله زیر را به دست آورید و پاسخ خود را به فرم قطبی بیان کنید: (الف) $8e^{-t}$، (ب) 19، (ج) $9 - j7$، (د) $e^{j\omega t}$، (ه) $\cos 4t$، (و) $\sin 4t$ و (ز) $88\angle -9°$.

۴. مزدوج مختلط مربوطه را به دست آورید. (الف) $6-j$، (ب) 9، (ج) $-j30$، (د) $5e^{-6j}$، (ه) $24\ \angle -45°$، (و) $\frac{4 - j18}{3.33 + j}$، (ز) $\frac{5\ \angle 0.1°}{4 - j7}$، (ح) $4 - 22\ \angle 92.5°$.

۵. بار از یک میدان تشعشع خاصی به صورت $Q = 9\angle 43°\ \mu C$ در فرکانس مختلط $s = j20\pi s^{-1}$ نشان داده شده است. (الف) در $t = 1$ s چند بار تشعشع یافته است؟ (ب) حداکثر مقدار بار منتشره در یک زمان چقدر است؟ (ج) آیا منبع اثری از نابودی را نشان می‌دهد. بر اساس فرکانس Q چه نشانه‌ای وجود دارد؟

۶. آسیستان جدید شما سیگنالی که از یک دستگاه تست می‌آید، اندازه‌گیری می‌نماید و می‌نویسد: $v(t) = V_x e^{(-2+j60)t}$، که

$$V_x = 8 - j100\ V$$

(الف) یک جمله گم‌شده وجود دارد. آن چیست و چگونه گم‌شدن آن را می‌توانید بیان کنید؟ (ب) فرکانس مختلط سیگنال چیست؟ (ج) اهمیت $\{V_x\} > Re\{V_x\}$ چیست؟ (د) اهمیت $|Re\{s\}| < |Im\{s\}|$ چیست؟

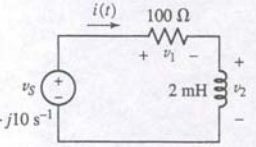
۷. فرض کنید بخش حقیقی جریان مختلط متغیر با زمان $I(t)$ برابر $i(t)$ باشد. (الف) اگر $I_x(t) = (4 - j7)e^{(-3+j15)t}$ باشد $i_x(t)$ را به دست آورید، (ب) اگر $i_y(t) = (4 + j7)e^{-3t}$ (cos 15t - j sin 15t) باشد $i_y(t)$ را پیدا کنید، (ج) اگر $I_A(t) = K_A e^{s_A t}$ باشد که در آن $K_A = 5 - j8$ و $s_A = -1.5 + j12$ است، $i_A(0.4)$ را بیابید. (د) اگر $I_B(t) = K_B e^{s_B t}$ باشد که در آن K_B مزدوج K_A و s_B مزدوج s_A است. $i_B(0.4)$ را به دست آورید.

۸. یک سیگنال متناوب جریان $i(t) = 2.33 \cos(279 \times 10^6 t)$fA به‌وسیله یک رادیوتلسکوپ از کهکشان نیبولا دریافت شده است (الف) فرکانس سیگنال چند هرتز است؟ (ب) اگر ولتاژ از عبور جریان به داخل یک مقاومت 1 TΩ به دست آید، سیگنال ولتاژ را به صورت جمع دو نمای مختلط بنویسید.

۹. اگر یک ولتاژ مختلط متغیر با زمان به صورت $v_s=(20-j30)e^{(-2+j50)t}$ مفروض باشد، (الف) $v_s(0.1)$ را به فرم قطبی درآورید. (ب) $\mathrm{Re}\{v_s(t)\}$ را بیابید. (ج) $\mathrm{Re}\{v_s(0.1)\}$ چقدر است؟ (د) s را مشخص کنید (ه) s^* را معین نمایید.

۱۴ـ۲ تابع تحریک سینوسی میرا

۱۰. مدار شکل ۱۰ـ۱۴ به وسیله یک منبع 10 V ، زاویه فاز $3°$ و فرکانس مختلط $-2 + j10s^{-1}$ راه‌اندازی شده است. (الف) $i(t)$ را معین کنید. (ب) $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را تعیین نمایید.

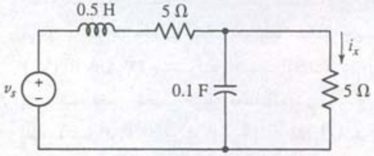


شکل ۱۰ـ۱۴

۱۱. (الف) مفهوم فیزور در فصل ۱۰ را برای به‌دست‌آوردن عبارات امپدانس القاگرها، خازن‌ها و مقاومت‌ها که با فرکانس s راه‌اندازی می‌شوند، گسترش دهید. (ب) امپدانس مقاومت و القاگر شکل ۱۰ـ۱۴ چقدر است؟ (ج) وقتی $\mathrm{Re}\{s\} = 0$ باشد، عبارت خود را به آنچه در فصل ۱۰ دیدیم کاهش دهید.

۱۲. یک مدار RL سری به پریزی در امریکای شمالی به ولتاژ $v(t) = 179\cos(120\pi t)$ V وصل است. اگر $R = 100\ \Omega$ و $L = 500\ \mu H$ باشد، (الف) فرکانس مختلط متناظر حوزه فرکانس ولتاژ $\mathbf{V}(s)$ را معین کنید. (ب) جریان $\mathbf{I}(s)$ را در حوزه فرکانس برای مدار به دست آورید. (ج) $i(t)$ را بیابید.

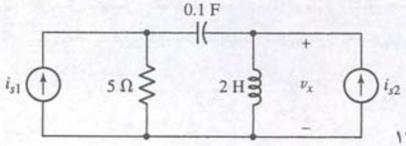
۱۳. (الف) اگر در مدار شکل ۱۱ـ۱۴، ولتاژ $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)$ V باشد. در حوزه فرکانس $\mathbf{I}_x$ را پیدا کنید. (ب) $i_x(t)$ را معین کنید.



شکل ۱۱ـ۱۴

۱۴. یک مدار ساده RC به پریزی با $v(t) = 339\cos(100\pi t)$ V وصل است. اگر $R = 2\ k\Omega$ و $C = 100\ \mu F$ باشد، (الف) فرکانس مختلط ولتاژ $\mathbf{V}(s)$ را در حوزه فرکانس به دست آورید. (ب) $\mathbf{I}(s)$ را در حوزه فرکانس معین نمایید. (ج) $i(t)$ را بیابید.

۱۵. اگر در مدار شکل ۱۲ـ۱۴ جریان $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4t$ A و $i_{s2} = 30e^{-3t}\sin 4t$ A باشد. (الف) در حوزه فرکانس $\mathbf{V}_x$ را پیدا کنید. (ب) $v_x(t)$ را بیابید.



شکل ۱۲ـ۱۴

۱۶. مقاومت معادل یک وسیله الکترونیکی صنعتی از دید پایانه‌های منبع تغذیه dcاش $3\ m\Omega$ است. اگر بتوانیم منبع تغذیه را به صورت منبع ولتاژ نمایی $v(t) = 240\sqrt{2}\, e^{-2t}\cos(120\pi t)$ درآوریم (از لحظه‌ای که دوشاخ از پریز بیرون می‌آید، برق قطع است) (الف) جریان داخل مقاومت را در حوزه فرکانس به دست آورید. (ب) با کار در حوزه زمان کار را با بخش (الف) مقایسه کنید. (ج) اگر یک خازن 1000 mF به دو سر پایانه‌های خروجی منبع تغذیه وصل کنیم، بخش (الف) را تکرار نمایید (یعنی موازی با R_{TH}).

۱۴ـ۳ تعریف تبدیل لاپلاس

۱۷. تبدیل لاپلاس یک‌سو را برای $K\,u(t)$ بیابید که K یک ثابت حقیقی مجهول است.

۱۸. از معادله (۱۴) استفاده کرده و تبدیل لاپلاس هر مورد را به دست آورید: (الف) $3u(t)$، (ب) $3u(t-3)$، (ج) $3u(t-3)-3$، (د) $3u(3-t)$.

۱۹. از معادله (۱۴) برای یافتن تبدیل لاپلاس موارد زیر استفاده کنید: (الف) $2 + 3u(t)$، (ب) $3e^{-8t}$، (ج) $u(-t)$، (د) K که K یک ثابت مجهول است.

۲۰. یک منبع جریان، جریان $4e^{-t}\,u(t)$ mA را در یک مقاومت $1\ \Omega$ فراهم می‌کند. (الف) نمایش حوزه فرکانس ولتاژ دو سر مقاومت را به دست آورید. (ب) با یادآوری $s = \sigma + j\omega$، اندازه جریان در حوزه زمان را به صورت تابعی از σ با $\omega = 0$ ترسیم کنید.

۲۱. یک منبع ولتاژ $v(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$ V به دو سر یک مقاومت $1\ \Omega$ وصل است. (الف) نمایش حوزه فرکانس ولتاژ را به دست آورید. (ب) نمایش حوزه فرکانس جریان در مقاومت را بیابید.

۱۴ـ۴ تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده

۲۲. برای توابع $f(t)$ زیر، محدوده‌ای از σ را که تبدیل لاپلاس تابع وجود دارد، مشخص کنید. (الف) $t + 1$، (ب) $(t+1)\,u(t)$، (ج) $e^{50t}\,u(t)$، (د) $e^{50t}\,u(t-5)$، (ه) $e^{-50t}\,u(t-5)$.

۲۳. برای هر یک از توابع زیر تبدیل لاپلاس یک‌سویه را به دست آورید: (الف) $8e^{-2t}[u(t+3) - u(t-3)]$، (ب) $8e^{2t}[u(t+3) - u(t-3)]$، (ج) $8e^{-2|t|}[u(t+3) - u(t-3)]$.

۲۴. تبدیل لاپلاس یک‌سویه را برای هر یک از توابع زیر به دست آورید: (الف) $\mathcal{L}\{s^{-1}\}$، (ب) $1 + u(t) + [u(t)]^2$، (ج) $t\,u(t) - 3$، (د) $1 - \delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2)$.

۲۵. بدون استفاده از معادله (۱۵)، عکس تبدیل موارد زیر را مشخص کنید: (الف) $\frac{1}{s+3}$، (ب) 1، (ج) s^{-2}، (د) 275، (ه) $\frac{s^2}{s^3}$.

۲۶. نشان دهید مادامی که تبدیل لاپلاس توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ وجود دارد.

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

۲۷. با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس اگر $f(t)$ برابر (الف) $2u(t-2)$، (ب) $2\delta(t-2)$، (ج) $e^{-t}\,u(t-2)$ باشد، مقدار $F(1 + j2)$ را پیدا کنید.

۲۸. موارد زیر را حساب کنید:

(الف) $\int_{-\infty}^{\infty} 8\sin 5t\,\delta(t-1)dt$

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2\,\delta(t-2)dt$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-3000t}\delta(t - 3.333 \times 10^{-4})dt$

(د) $\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t-2)dt$ که در آن K یک ثابت حقیقی است.

۲۹. با تعریف تبدیل لاپلاس یک‌سویه $F(s)$ را برای $f(t)$های زیر به دست آورید. (الف) $[u(s-t)][u(t-2)]\ u(t)$، (ب) $4u(t-2)$، (ج) $4e^{-3t}\,u(t-2)$، (د) $4\delta(t-2)$، (ه) $5\delta(t)\sin(10t + 0.2\pi)$.

۳۰. موارد زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 500t\,\delta(t)\,dt$، (ب) $\int_{-\infty}^{\infty} t^5\delta(t-2)\,dt$، (ج) $\int_{-\infty}^{\infty} 2.5e^{-0.001t}\delta(t-1000)\,dt$، (د) $\int_{-\infty}^{\infty} -K^2\delta(t-c)dt$ که K و c ثابت‌های حقیقی‌اند.

۳۱. با تبدیل لاپلاس یک‌سویه، اگر $f(t)$ مطابق زیر باشد، $F(s)$ را به دست آورید. (الف) $[2u(t-1)][u(3-t)u(t^3)]$، (ب) $2u(t-4)$، (ج) $3e^{-2t}\,u(t-4)$، (د) $3\delta(t-5)$، (ه) $4\delta(t-1)[\cos\pi t - \sin\pi t]$.

۱۴ـ۵ تکنیک‌های عکس تبدیل لاپلاس

۳۲. $f(t)$ را به دست آورید، اگر $\mathbf{F}(s)$ برابر باشد با (الف) $1/s + 3$، (ب) $3 + 1/s^2$، (ج) $\frac{1}{(s+3)(s+4)}$ و (د) $\frac{1}{(s+3)(s+4)(s+5)}$.

۳۳. $g(t)$ را به دست آورید، اگر $\mathbf{G}(s)$ برابر باشد با (الف) $4.5/s - 90$، (ب) $11 + 2s/s^2$، (ج) $\frac{1}{(s+1)(s+1)}$ و (د) $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

۳۴. عکس تبدیل هر یک را بدون اجرای هر انتگرال‌گیری و بدون استفاده از متلب پیدا کنید: (الف) $(s + 4.4)^{-1} + 16 - 5s^{-1}$، (ب) $1 - s^{-1} + s^{-2}$، (ج) $\frac{17}{(s+6)(s+1)} + 88\,s^{-1} + 5(s+7)^{-1}$.

۳۵. ولتاژ حوزه فرکانس دو سر مقاومت $2\ k\Omega$ با رابطه زیر $V(s)=5\,s^{-1}$ V داده شده است. جریان مقاومت در $t = 1$ ms چقدر است؟

۳۶. جریان حوزه فرکانس در مقاومت $100\ M\Omega$ برابر $5(s + 10)^{-1}$ pA است. (الف) ولتاژ $v(t)$ در دو سر مقاومت را به‌عنوان تابعی از زمان بکشید، (ب) توان جذب شده به وسیله مقاومت در $t = 100$ ms چقدر است؟، (ج) در چه زمانی ولتاژ دو سر مقاومت 1% از حداکثر مقدارش افت می‌کند؟

۳۷. $f(t)$ را معین کنید. به شرطی که $F(s)$ برابر باشد با: (الف) $[(s+1)/s] + [2/(s+1)]$، (ب) $(e^{-s} + 1)^2$، (ج) $2e^{-(s+1)}$ و (د) $2\,e^{-3s}\cosh 2s$.

۳۸. اگر $N(s)=5s$ باشد، $\mathcal{L}^{-1}\{N(s) / D(s)\}$ را برای $D(s)$ (الف) s^2-9، (ب) $(s+3)(s^2 + 19s + 90)$، (ج) $(4s+12)(8s^2 + 6s + 1)$. (د) پاسخ (الف) تا (د) را با متلب امتحان کنید.

۳۹. با فرض عبارات زیر برای $F(s)$، $f(t)$ را به دست آورید: (الف) $5/(s+1)$، (ب) $5/(s+1) - 2/(s+4)$، (ج) $18/[(s+1)(s+4)]$، (د) $18s/[(s+1)(s+4)]$ (ه) $18s^2/[(s+1)(s+4)]$.

۴۰. اگر $N(s) = 2\,s^2$ باشد، مطلوب است:

(الف) $\mathcal{L}^{-1}\{N(s) / D(s)\}$ برای $D(s) = s^2 - 1$

(ب) $(s+3)(s^2+19s+90)$ ، (ج) $(18s+12)(16s^2+125+2)$

(د) جریان‌های (الف) تا (ج) را با متلب امتحان کنید.

۴۱. اگر $F(s)$ برابر با موارد زیر باشد، $f(t)$ را به دست آورید.

(الف) $\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1}$، (ب) $\frac{2s+10}{s+3}$، (ج) $3e^{-0.8s}$ و (د) $\frac{12}{(s+2)^2(s\ 2)}$.

۴۲. پیدا کنید $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ اگر

$$F(s) = 2 - s^{-1} + \frac{\pi}{(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)}$$

۴۳. بسط به کسرهای جزئی را برای هر یک از توابع گویای زیر به دست آورده و سپس توابع زمانی متناظر آن‌ها را پیدا کنید.

(الف) $F(s) = [(s+1)(s+2)] / [s(s+3)]$

(ب) $F(s) = (s+2) / [s^2(s^2+4)]$

۴۴. اگر $\mathbf{G}(s)$ برابر باشد با:

(الف) $\frac{12s^3}{(s+1)(s+2)}$

(ب) $\frac{12s^3}{(s^2+2s+1)(s+2)}$

(ج) $3s - \frac{12s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{G}(s)\}$ را پیدا کنید.

۴۵. اگر $\mathbf{H}(s)$ برابر باشد با:

(الف) $\frac{(s+1)^2}{(s+1)(s+2)}$

(ب) $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

(ج) $3s - \frac{s^4}{(s^2+2s+1)(s+3)} - 1$

$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\}$ را پیدا کنید.

۱۴ـ۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس

۴۶. تبدیل لاپلاس معادلات زیر را به دست آورید:

(الف) $5\,di/dt - 7\,d^2i/dt^2 + 9i = 4$

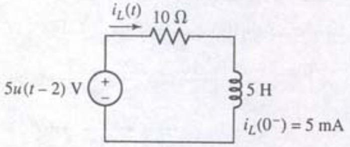
(ب) $m\frac{d^2p}{dt^2} + \mu_f\frac{dp}{dt} + kp(t) = 0$.

این معادله پاسخ یک سیستم ضربه‌گیر بدون نیرو را توصیف می‌نماید.

(ج) $\frac{d\Delta n_p}{dt} = -\frac{d\Delta n_p}{dt} + G_L$ که سرعت ترکیب مجدد الکترون‌های دریافتی (Δn_p) را در سیلیکان نوع P تحت تشعشع نور نشان می‌دهد (G_L ثابت متناسب با شدت نور است).

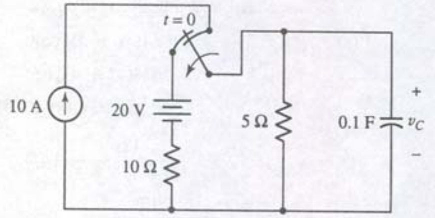
۴۷. اگر $15u(t) - 4\delta(t) = 8f(t) + 6f'(t)$ و $f(0^-) = -3$ باشد، با تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل برای حل $F(s)$، و عکس تبدیل $f(t)$، را به دست آورید.

۴۸. بامراجعه به مدار RL شکل ۱۳-۱۴، (الف) معادله دیفرانسیلی برای جریان القاگر $i_L(t)$ بنویسید. (ب) $I_L(s)$ را بیابید. (ج) با عکس تبدیل لاپلاس $I_L(s)$، $i_L(t)$ را به دست آورید.



شکل ۱۳-۱۴

۴۹. (الف) برای مدار شکل ۱۴-۱۴، $v_C(0^-)$ و $v_C(0^+)$ را پیدا کنید. (ب) معادله‌ای راکه در $t > 0$ معتبر باشد، برای تبدیل $v_C(t)$ بیابید. (ج) با استفاده از تبدیل لاپلاس $V_C(s)$ و سپس $v_C(t)$ را بیابید.



شکل ۱۴-۱۴

۵۰. در شکل ۱۳-۱۴، یک منبع ولتاژ $v_s(t) = -5\ u(t)$ V با منبع $5\ u(t-2)$ V سری کنید و مسئله ۴۸ را تکرار نمایید. (ب) جریان القاگر را رسم و با شبیه‌سازی PSpice مناسبی، آن را مقایسه نمایید.

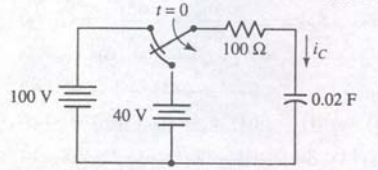
۵۱. با فرض معادله دیفرانسیل $12\ u(t) = 20f'_2(t) + 3f_2(t)$ که $f_2(0^-) = 2$ است. تبدیل لاپلاس $F_2(s)$ را به دست آورید و سپس $f_2(t)$ را پیدا کنید.

۵۲. عکس تبدیل لاپلاس هر یک از موارد زیر را به دست آورید (الف) $2/s-4$، (ب) $s/(s^2+99)$، (ج) $5-1/(s^2 + 5s + 6)$، (د) s و (ه) s^2.

۵۳. با فرض دو معادله دیفرانسیل $x' + y = 2u(t)$ و $y' - 2x + 3y = 8u(t)$ که $x(0^-) = 5$ و $y(0^-) = 8$ است. $x(t)$ و $y(t)$ را به دست آورید.

۵۴. اگر $F(s)$ با روابط زیر داده شده باشد، $f(t)$ را پیدا کنید. (الف) $8s + 8 + 8s^{-1}$, $f(0^-) = 0$ و (ب) $s^2/(s + 2) - s + 2$.

۵۵. (الف) برای مدار شکل ۱۵-۱۴، مقدار $i_C(0^-)$ و $i_C(0^+)$ را بیابید. (ب) معادله‌ای برای $i_C(t)$ در حوزه زمان بنویسید که در $t > 0$ معتبر باشد. (ج) از روش‌های تبدیل لاپلاس برای حل $I_C(s)$ استفاده کنید و سپس عکس تبدیل را پیدا کنید.



شکل ۱۵-۱۴

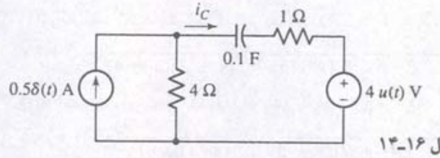
۵۶. $V(s)$ را برای $v(t)$ (الف) $4\cos(100t)$ V
(ب) $2\sin(10^3t) - 3\cos(100t)$ V
(ج) $14\cos(8t) - 2\sin(8^\circ)$ V
(د) $\delta(t) + \sin(6t)\,u(6t)$ V
(ه) $\cos(5t)\sin(3t)$ V.

۵۷. یک مقاومت R، خازن C، القاگر L و یک منبع جریان ایده‌آل $i_s = 100e^{-5t}\ u(t)$ همگی با هم موازیند. بگذارید V ولتاژ در دو سر منبع با مرجع مثبت در پایانه‌ای باشد که جریان $i_s(t)$ از آن خارج می‌شود. آن‌گاه $i = v' + 4v + 3\int_{0^-}^{t} v\,dt$ (الف) R، L و C را پیدا کنید. (ب) از تکنیک‌های تبدیل لاپلاس برای یافتن $v(t)$ استفاده نمایید.

۵۸. $\mathcal{L}$ را برای $v(t)$ برابر (الف) $7 + (t-2)\,u(t-2)$ V (ب) $e^{-t+2}\,u(t-2)$ V (ج) $48\,(\delta t - 1)\,u(t-1)$ V بیابید.

۵۹. یک معادله انتگرالی - مشتقی برحسب i_C برای مدار شکل ۱۶-۱۴ بیابید. تبدیل لاپلاس را بگیرید. برای $I_C(s)$ آن را حل کنید و سپس با عکس تبدیل $i_C(t)$ را به دست آورید.

۶۰. با فرض $v' + 6v + 9\int_{0^-}^{t} v(z)\,dz = 24(t-2)u(t-2)$، $v(t)$ را به دست آورید. $v(0^-) = 0$ است.



شکل ۱۶-۱۴

۶۱. تست راث را به توابع زیر اعمال کنید و بگویید آیا پایدار است یا ناپایدار؟

(الف) $$H(s) = \frac{s - 500}{s^3 + 13s^2 + 47s + 35}$$

(ب) $$H(s) = \frac{s - 500}{s^3 + 13s^2 + s + 35}$$

۶۲. تست راث را به توابع زیر اعمال کرده بگویید پایدارند یا خیر. سپس هر مخرج را به صورت ضرب درآورده و قطب‌های $H(s)$ را شناسایی کنید. صحت تست راث را برای آن‌ها تحقیق نمایید.

(الف) $$H(s) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 8}$$

(ب) $$H(s) = \frac{s - 9}{s^2 + 2s + 1}$$

۶۳. تست راث را به توابع زیر اعمال کرده و بگویید پایدارند یا خیر:

(الف) $$H(s) = \frac{s^2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

(ب) $$H(s) = \frac{2}{s + 3}$$

۷-۱۴ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

۶۴. با فرض تابع $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ V، (الف) تئوری مقدار اولیه را به $V(s)$ اعمال کنید. صحت پاسخ خود را با $v(t)$ در $t = 0$ ارزیابی کنید.

۶۵. با فرض تابع $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ V، (الف) تئوری مقدار اولیه را به $V(s)$ اعمال کنید. صحت پاسخ خود را با $v(t)$ در $t = \infty$ ارزیابی کنید.

۶۶. برای یک تابع زمانی که تبدیل لاپلاس آن در زیر داده شده $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را به دست آورید. (الف) $5(s^2 + 1)/(s^3 + 1)$، (ب) $5(s^2+1)/(s^4 + 16)$ (ج) $(s + 1)(1 + e^{-4s})/(s^2 + 2)$.

۶۷. بدون یافتن $f(t)$ برای هر یک از موارد زیر $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را به دست آورید:
(الف) $(2s^2 + 6)/[s(s^2 + 52 + 2)]$
(ب) $2e^{-s}/(s + 3)$
(ج) $(s^2 + 1)/(s^2 + 5)$.

۶۸. برای تابع زمانی که تبدیل لاپلاس آن در زیر داده شده $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را به دست آورید.
(الف) $5(s^2 + 1)/(s + 1)^3$
(ب) $5(s^2 + 1)/[s(s + 1)^3]$
(ج) $(1 - e^{-3s})/s^2$.

۶۹. فرض کنید $f(t) = (1/t)(e^{-at} - e^{-bt})\ u(t)$ باشد، (الف) $F(s)$ را به دست آورید. (ب) هر دو سمت معادله $\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{s\to\infty}[sF(s)]$ را عمل کنید.

۷۰. هر دو مقدار اولیه و ثانویه را برای توابع زیر پیدا کنید یا نشان دهید که وجود ندارند.

(الف) $\dfrac{8s - 2}{s^2 + 6s + 10}$ (ب) $\dfrac{2s^3 - s^2 - 3s - 5}{s^3 + 6s^2\ 10s}+$

(ج) $\dfrac{8s - 2}{s^2 - 6s + 10}$ (د) $\dfrac{8s^2 - 2}{(s + 2)^2(s + 1)(s^2 + 6s\ 10)}+$

فصل پانزدهم

تحلیل مدار در حوزه s

مفاهیم کلیدی

- گسترش مفهوم امپدانس به حوزه s
- مدل‌سازی شرایط اولیه با منابع ایده‌آل
- إعمال گره، مش، تجمیع، و تبدیل منبع در حوزه s
- قضایای تونن و نورتن در مدارهای حوزه s
- دستکاری حوزه s عبارات جبری با متلب
- شناسایی قطب‌ها و صفرها در توابع تبدیل مدار
- پاسخ ضربه یک مدار
- استفاده از کانولوشن برای تعیین پاسخ سیستم
- پاسخ به عنوان تابعی از σ و ω
- استفاده از نمودار قطب ـ صفر برای پیش‌بینی پاسخ طبیعی مدارها
- سنتز توابع تبدیل ولتاژ خاص با استفاده از op amp

مقدمه

در فصل ۱۴ مفهوم فرکانس مختلط را به‌دست‌آوردیم و در تحلیل مدار، استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل را معرفی کردیم. پس از کمی ممارست در رفتن به حوزه زمان و بازگشت به حوزه فرکانس و بالعکس چیره‌دست شدیم. اکنون آماده‌ایم تا این تکنیک‌ها را با روشی ساخت‌یافته در تحلیل مدارها به‌کارگیریم. مجموعه مهارت‌های حاصل ما را قادر می‌سازد تا هر مدار خطی را موثرتر تحلیل کنیم تا مستثنی از طبیعت منبع، پاسخ کامل‌تری (یعنی پاسخ گذرا به علاوه حالت ماندگار) به‌دست‌آید.

۱۵-۱ Z(s) و Y(s)

رمز موفقیت فیزورها در تحلیل حالت ماندگار مدارهای سینوسی تبدیل مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها به امپدانس است. آن‌گاه تحلیل مدار با استفاده از تکنیک‌های گرهی یا حلقه‌ای، تجمیع، تبدیل منبع و نیز معادل‌های تونن و نورتن به پیش می‌رود. همان‌طور که قبلاً ممکن‌است حس کرده باشیم این مفهوم قابل گسترش به حوزه s است چون حالت ماندگار سینوسی فقط یک حالت خاصی از آن است (که $\sigma = 0$ می‌باشد).

مقاومت‌ها در حوزه فرکانس

اجازه بدهید با ساده‌ترین حالت آغاز کنیم که در آن یک مقاومت به منبع ولتاژ $v(t)$ متصل است. قانون اهم بیان می‌دارد که:

$$v(t) = Ri(t)$$

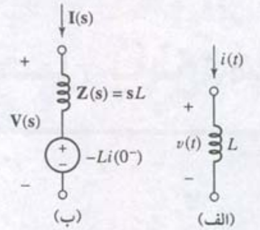
با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف:

$$\mathbf{V}(s) = R\mathbf{I}(s)$$

می‌بینیم که نسبت ولتاژ در حوزه فرکانس به جریان در حوزه فرکانس همان مقاومت R است. بنابراین:

$$\mathbf{Z}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{I}(s)} = R \qquad (1)$$

چون در حوزه فرکانس کار می‌کنیم، به این کمیت **امپدانس** می‌گوییم، ولی همچنان واحد اهم (Ω) را برای آن به کارخواهیم برد. درست مثل آن‌چه که در کار با فیزورها در حالت ماندگار سینوسی دریافتیم، امپدانس مقاومت به فرکانس وابسته نیست. ادمیتانس $\mathbf{Y}(s)$ یک مقاومت به صورت نسبت $\mathbf{I}(s)$ به $\mathbf{V}(s)$ تعریف می‌شود و در واقع همان $\frac{1}{R}$ است. واحد این کمیت زیمنس (S) می‌باشد.



شکل ۱ـ۱۵ (الف) القاگر در حوزه زمان. (ب) مدار کاملی از القاگر در حوزه فرکانس متشکل از یک امپدانس sL و یک منبع ولتاژ $Li(0^-)$ که در ایجاد شرایط اولیه غیرصفر روی عنصر مشارکت دارند.

القاگرها در حوزه فرکانس

حال یک القاگر را که به یک منبع ولتاژ متغیر با زمان $v(t)$ وصل است ملاحظه می‌نماییم (شکل ۱ـ۱۵ (الف)). می‌دانیم که:

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

با نوشتن تبدیل لاپلاس دو طرف داریم:

$$\mathbf{V(s)} = L[s\mathbf{I(s)} - i(0^-)] \quad (۲)$$

اکنون دو جمله داریم: یکی $s\mathbf{L}\mathbf{I(s)}$ و دیگری $Li(0^-)$. در مواردی که انرژی اولیه ذخیره‌شده در القاگر صفر باشد (یعنی $i(0^-) = 0$) داریم:

$$\mathbf{V(s)} = s\mathbf{L}\mathbf{I(s)}$$

و بنابراین:

$$\mathbf{Z(s)} = \frac{\mathbf{V(s)}}{\mathbf{I(s)}} = s\mathbf{L} \quad (۳)$$

اگر فقط علاقمند به پاسخ ماندگار سینوسی باشیم معادله (۳) ساده‌تر می‌شود. می‌توان از مقادیر اولیه که فقط طبیعت پاسخ گذرا را تحت تأثیر قرار می‌دهند، صرفنظر کرد بنابراین $s = j\omega$ را جایگزین کرده و خواهیم داشت:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = j\omega L$$

که در فصل ۱۰ هم همان را ملاحظه کردیم.

مدل‌سازی القاگرها در حوزه s

گرچه به کمیت موجود در معادله (۳) امپدانس القاگر می‌گوییم، ولی باید به یاد بیاوریم که این کمیت با فرض صفربودن جریان اولیه به‌دست‌آمد. در حالت کلی‌تر که انرژی در $t = 0^-$ در عنصر ذخیره شده است، این کمیت برای نمایش القاگر در حوزه فرکانس کافی نیست. خوشبختانه می‌توان مقدار اولیه را با مدل‌سازی یک القاگر به صورت ترکیبی از امپدانس و یک منبع ولتاژ یا جریان درآورد. برای انجام آن معادله (۲) را دوباره مرتب می‌کنیم:

$$\mathbf{V(s)} = s\mathbf{L}\mathbf{I(s)} - Li(0^-) \quad (۴)$$

دومین جمله در سمت راست کمیتی ثابت است و از ضرب القاکنایی L در مقدار اولیه جریان $i(0^-)$ به‌دست‌می‌آید. حاصل آن جمله ولتاژ ثابتی است که از جمله وابسته به فرکانس $s\mathbf{L}\mathbf{I(s)}$ کسر شده است. در این‌جا کمی تعمق ما را به این سمت سوق می‌دهد که می‌توان یک القاگر L را به صورت دو عنصر در حوزه فرکانس همچون شکل ۱ـ۱۵ (ب) نشان داد.

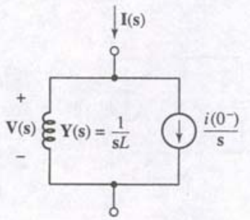
مدل القاگر در حوزه فرکانس در شکل ۱ـ۱۵ (ب) از امپدانس sL و یک منبع ولتاژ $Li(0^-)$ تشکیل شده است. ولتاژ دو سر امپدانس sL طبق قانون اهم به‌صورت $[s\mathbf{L}]\mathbf{I(s)}$ داده می‌شود. چون ترکیب دوعنصری شکل ۱ـ۱۵ (ب) خطی است، هر تکنیک تحلیل مداری که قبلاً دیدیم در فضای s هم قابل پیاده‌شدن است. مثلاً ممکن‌است یک تبدیل منبع روی مدل اجرا کنیم تا امپدانس sL را موازی با منبع جریان به‌دست‌آوریم $[-Li(0^-)]/s\mathbf{L} = -i(0^-)/s$. این را می‌توان با انتخاب معادله (۴) و حل برای $\mathbf{I(s)}$ به‌دست‌آورد:

$$\mathbf{I(s)} = \frac{\mathbf{V(s)} + Li(0^-)}{s\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{V(s)}}{s\mathbf{L}} + \frac{i(0^-)}{s} \quad (۵)$$

دوباره با دو جمله طرف هستیم، اولین جمله در سمت راست علی‌رغم این‌که واحد آمپر ـ ثانیه دارد یک جریان است. بنابراین می‌توان این معادله را با دو مولفه جدا از هم مدل‌سازی کرد:

یکی از آن‌ها ادمیتانس $\frac{1}{s\mathbf{L}}$ است که با منبع جریان $\frac{i(0^-)}{s}$ یعنی دومی، موازی است. مدل حاصل در شکل ۲ـ۱۵ ملاحظه می‌گردد. انتخاب یکی از دو مدل در شکل ۱ـ۱۵ (ب) و یا ۲ـ۱۵ به این بستگی دارد که در تحلیل یک مدار کامل حاوی القاگر کدام یک معادلات ساده‌تری را عرضه کنند. ضمناً توجه کنید که هرچند در شکل ۲ـ۱۵، سمبل القاگر با یک ادمیتانس $\mathbf{Y(s)} = \frac{1}{s\mathbf{L}}$ برچسب خورده است ولی می‌توان به آن به چشم یک امپدانس $\mathbf{Z(s)} = s\mathbf{L}$ هم نگاه کرد. مجدداً انتخاب آن‌ها به سلیقه و راحتی تحلیل‌گر وابسته است.

اکنون نوبت توضیح واحدها است. وقتی تبدیل لاپلاس از جریانی مثل $i(t)$ را به‌دست‌می‌آوریم، از آن در یک فاصله زمانی انتگرال می‌گیریم. پس واحد $\mathbf{I(s)}$ به لحاظ تکنیکی آمپر ـ ثانیه است. به همین طریق، واحد V(s) ولت ـ ثانیه می‌باشد. با این وجود قرار این‌است‌که کلمه ثانیه را حذف کنیم و به $\mathbf{I(s)}$ واحد آمپر، به $\mathbf{V(s)}$ ولت تخصیص دهیم. این قرارداد هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد مگر این‌که بخواهیم معادله‌ای چون معادله (۵) را موشکافی کنیم و جمله‌ای چون $i(0^-)/s$ در آن بیابیم که واحدش با واحد $\mathbf{I(s)}$ در تضاد باشد. در هر صورت ما به اندازه‌گیری این کمیت‌های فیزوری به آمپر و ولت به هنگام بررسی واحدهای یک معادله ادامه می‌دهیم ولی همیشه ثانیه را به‌خاطرداریم.



شکل ۲ـ۱۵ مدل حوزهٔ فرکانس دیگری برای القاگر، متشکل از ادمیتانس 1/sL و منبع جریان $i(0^-)/s$.

مثال ۱ـ۱۵

ولتاژ $v(t)$ را در شکل ۳ـ۱۵ (الف) محاسبه کنید. مقدار اولیه جریان $i(0^-) = 1A$ است.

با تبدیل مدار شکل ۳ـ۱۵ (الف) به معادل حوزه فرکانس شکل ۳ـ۱۵ (ب) آغاز می‌کنیم. منبع ولتاژ نمایی به حوزه فرکانس تبدیل شده است، $3/(s + 8)$ V و القاگر با مدل دوعنصری یعنی یک امپدانس $s\mathbf{L} = 2s\ \Omega$ و یک منبع ولتاژ مستقل $-Li(0^-) = -2(1) = -2$ V جایگزین شده است.

ما به دنبال $\mathbf{V(s)}$ هستیم زیرا عکس آن $v(t)$ را به دست می‌دهد. توجه کنید که $\mathbf{V(s)}$ در دو سر کل مدار القاگر ظاهر می‌شود و نه فقط در دو سر منبع مستقل.

با انتخاب روشی سرراست داریم:

$$\mathbf{I(s)} = \frac{\left[\frac{3}{s+8} + 2\right]}{1 + 2s} = \frac{s + 9.5}{(s+8)(s+0.5)}$$

و

$$\mathbf{V(s)} = 2s\mathbf{I(s)} - 2$$

به‌نحوی‌که

$$\mathbf{V(s)} = \frac{2s(s + 9.5)}{(s + 8)(s + 0.5)} - 2$$

قبل از هر گونه تلاش در یافتن عکس این عبارت، بهتر است آن را کمی ساده کنیم. پس:

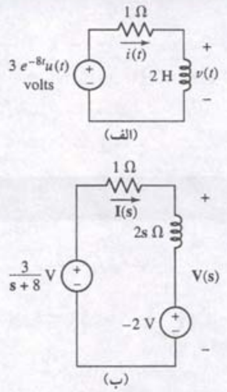
$$\mathbf{V(s)} = \frac{2s - 8}{(s + 8)(s + 0.5)}$$

با به کارگیری تجزیه به کسرهای جزئی یا استفاده از متلب داریم:

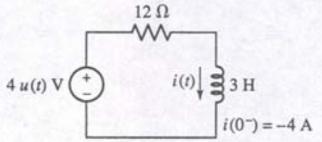
$$\mathbf{V(s)} = \frac{3.2}{s + 8} - \frac{1.2}{s + 0.5}$$

با مراجعه به جدول ۱ـ۱۴، عکس تبدیل مطابق زیر است:

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t) \text{ volts}$$



شکل ۳ـ۱۵ (الف) یک مدار ساده مقاومت ـ القاگر که در آن ولتاژ $v(t)$ موردنظر است. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس، شامل جریان اولیه در القاگر با استفاده از یک منبع ولتاژ سری $-Li(0^-)$.



شکل ۴ـ۱۵

تمرین

۱ـ۱۵ جریان $i(t)$ را در شکل ۴ـ۱۵ به‌دست‌آورید.

جواب: $\frac{1}{3}[1 - 13e^{-4t}]u(t)$ A

مدل‌سازی خازن‌ها در حوزه S

مفهوم مشابهی را در حوزه s به خازن‌ها می‌توان اعمال کرد. با دنبال‌کردن قرارداد عناصر غیرفعال طبق شکل ۵ـ۱۵ (الف) معادله حاکم بر خازن عبارت‌است‌از:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف داریم:

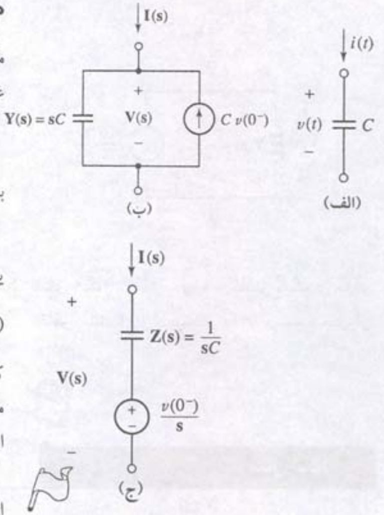
$$\mathbf{I}(s) = C[s\mathbf{V}(s) - v(0^-)]$$

یا

$$\mathbf{I}(s) = sC\mathbf{V}(s) - Cv(0^-) \qquad (۶)$$

که می‌توان آن را با یک امپدانس sC موازی با یک منبع جریان $Cv(0^-)$ طبق شکل ۵ـ۱۵ (ب) مدل‌سازی کرد. با اجرای تبدیل منبع در این مدار، مدل معادلی برای خازن متشکل از یک امپدانس $\frac{1}{sC}$ سری با منبع ولتاژ $v(0^-)/s$ به‌دست‌می‌آید (شکل ۵ـ۱۵ (ج)).

هنگام کار با مدل‌های حوزه s باید دقت کنیم منابع مستقل به‌کاررفته به‌جای مقادیر اولیه اشتباه نشوند. مقدار اولیه در یک القاگر با $i(0^-)$ داده می‌شود. این جمله ممکن‌است به صورت منبع ولتاژ یا جریان، بسته به مدل انتخابی ظاهر گردد. مقدار اولیه برای خازن به‌صورت $v(0^-)$ داده می‌شود. این جمله هم ممکن‌است به صورت منبع ولتاژ یا منبع جریان درآید. اشتباه رایجی در میان دانشجویانی که برای اولین بار در حوزه s کار می‌کنند این‌است‌که همیشه $v(0^-)$ را به عنوان منبع ولتاژ مدل درنظرمی‌گیرند، این اشتباه حتی در هنگام کار با القاگر هم دیده می‌شود.



شکل ۵ـ۱۵ (الف) خازنی در حوزه زمان، با برچسب‌های $v(t)$ و $i(t)$. (ب) مدل حوزه فرکانس خازن یا ولتاژ اولیه $v(0^-)$. (ج) مدل معادلی حاصل از تبدیل منبع.

مثال ۲ـ۱۵

در مدار شکل ۶ـ۱۵ (الف) با فرض $v_C(0^-) = -2V$، $v_C(t)$ را به‌دست‌آورید.

- **اهداف مسئله را شناسایی کنید.**

به دنبال عبارتی برای ولتاژ خازن، $v_C(t)$ هستیم.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

مسئله یک ولتاژ اولیه خازن 2V- را مشخص کرده است، $v_C(0^-)$.

- **ارائه طرح.**

دوباره اولین گام رسم مدار حوزه فرکانس معادل است. در انجام آن باید تصمیم بگیریم که کدام مدل برای خازن به‌کاررود، زیرا دارای ولتاژ اولیه غیرصفر هستیم. برای چنین مسئله ساده‌ای، مزیت آشکار برای انتخاب مدل وجود ندارد، لذا مدل مبتنی بر منبع جریان را برمی‌گزینیم (شکل ۶ـ۱۵ (ب)).

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

تحلیل را با نوشتن معادله یک گره به پیش می‌بریم:

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_C}{2/s} + \frac{\mathbf{V}_C - 9/s}{3}$$

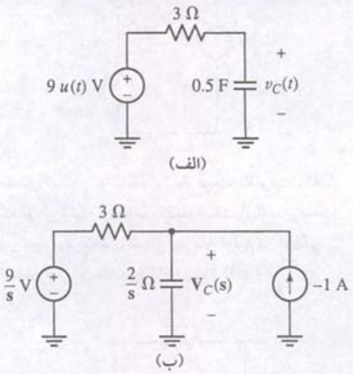
- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**

ما یک معادله و یک مجهول داریم که در حوزه فرکانس برای ولتاژ خازن نوشته شده است.

- **اقدام به حل.**

با حل برای $\mathbf{V}_C$ داریم:

$$\mathbf{V}_C = \frac{18/s - 6}{3s + 2} = -2\,\frac{(s - 3)}{s(s + 2/3)}$$



شکل ۶ـ۱۵ مداری که در آن $v_C(t)$ خواسته شده است. (ب) معادل حوزه فرکانس مدار با مدل مبتنی بر منبع جریان برای احتساب خازن.

با تجزیه کسرهای جزئی داریم:

$$\mathbf{V}_C = \frac{9}{s} - \frac{11}{s + 2/3}$$

$v_C(t)$ را با عکس تبدیل لاپلاس این عبارت به‌دست‌می‌آوریم:

$$v_C(t) = 9u(t) - 11e^{-2t/3}u(t)\ V$$

یا به‌صورت جمع‌تر:

$$v_C(t) = [19 - 11e^{-2t/3}]u(t)\ V$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

امتحان سریعی در قبل $t = 0$ منجر به $v_C(t) = -2\ V$ می‌گردد که همان مقدار اولیه است. همچنین با $t \to \infty$، $v_C(t) \to 9$ می‌رود و این چیزی است که در شکل ۶ـ۱۵ (الف) پس از دوران گذرا انتظار آن را داریم.

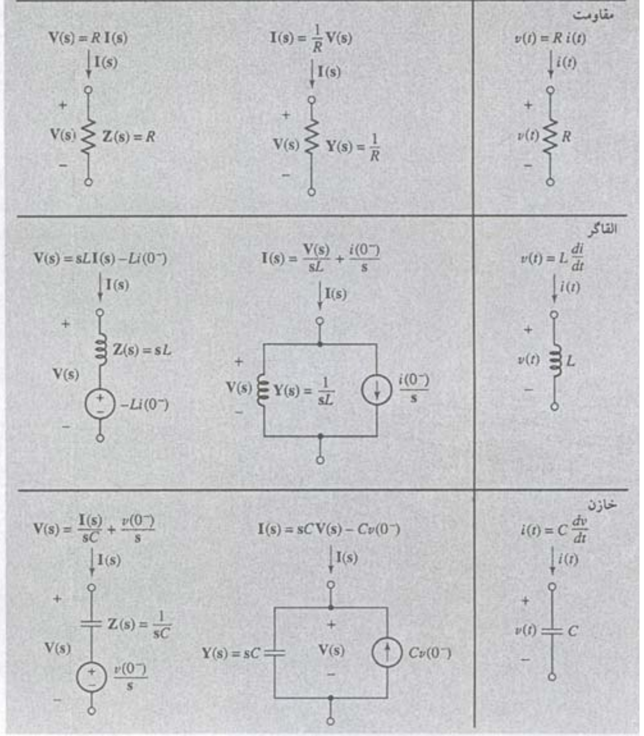
تمرین

۲ـ۱۵ مثال ۲ـ۱۵ را با مدل خازن مبتنی بر منبع ولتاژ تکرار کنید.

جواب: $[9 - 11e^{-2t/3}]u(t)\ V$.

نتایج این بخش در جدول ۱ـ۱۵ خلاصه شده است. توجه کنید که از قرارداد علامت عناصر غیرفعال استفاده شده است.

جدول ۱ـ۱۵ خلاصه‌ای از نمایش‌های حوزهٔ زمان و فرکانس.



	حوزه زمان	حوزه فرکانس	
مقاومت	$v(t) = R\,i(t)$	$\mathbf{I}(s) = \frac{1}{R}\mathbf{V}(s)$، $\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{R}$	$\mathbf{V}(s) = R\,\mathbf{I}(s)$، $\mathbf{Z}(s) = R$
القاگر	$v(t) = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$، $\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{sL}$	$\mathbf{V}(s) = sL\mathbf{I}(s) - Li(0^-)$، $\mathbf{Z}(s) = sL$
خازن	$i(t) = C\frac{dv}{dt}$	$\mathbf{I}(s) = sC\mathbf{V}(s) - Cv(0^-)$، $\mathbf{Y}(s) = sC$	$\mathbf{V}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$، $\mathbf{Z}(s) = \frac{1}{sC}$

۱۵-۲ تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s

در فصل ۱۰ آموختیم که چگونه مدارهای تحریک‌شده با منبع سینوسی در حوزه زمان را به معادله حوزه فرکانس تبدیل کنیم. مزایای این انتقال کاملاً آشکار بوده و دیگر لازم نبود معادلات انتگرالی ـ دیفرانسیلی را حل کنیم. تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای این گونه مدارها به صورت عبارات جبری برحسب $j\omega$ درآمدند که در آن ω فرکانس منبع بود.

اکنون مفهوم امپدانس می‌تواند عمومیت بیشتری نسبت به فرکانس مختلط $(s = \sigma + j\omega)$ داشته باشد. با تبدیل مدارها از حوزه زمان به حوزه فرکانس و اجرای تحلیل گرهی یا حلقه‌ای دوباره روابط جبری خالصی حاصل می‌گردد ولی این بار برحسب فرکانس مختلط s است. حل معادلات با جایگزینی متغیر، دستور کرامر یا نرم‌افزاری که بتواند دستکاری جبری انجام دهد (مثل متلب) صورت می‌گیرد. در این بخش دو مثال با پیچیدگی منطقی ارائه می‌شود تا این موضوع را بیشتر بحث کنیم. با این وجود ابتدا با کمی تأمل، ببینیم چگونه از متلب می‌توان در این موارد کمک گرفت.

تحلیل کامپیوتری

در فصل ۱۴ دیدیم که می‌توان برای تعیین باقیمانده توابع گویا در فضای s، متلب را به کاربرد و به این ترتیب فرآیند عکس تبدیل لاپلاس را ساده‌تر کرد. با این وجود، این بسته نرم‌افزاری خیلی قوی‌تر از این بوده و حاوی زیرروال‌هایی برای دستکاری‌های جبری است. در واقع، همان‌طور که در این مثال خواهیم دید متلب حتی قادر به اجرای مستقیم عکس تبدیل لاپلاس از توابع گویایی است که ما در حین تحلیل مدار به‌دست می‌آوریم. بیایید ببینیم متلب چگونه با عبارات جبری کار می‌کند. این عبارات به صورت رشته‌ای از کاراکترها با سمبل نقل قول (') برای تعریف عبارت ذخیره شده‌اند. مثلاً ما قبلاً چند جمله $p(s) = s^3 - 12s + 6$ را به صورت بردار زیر نشان دادیم:

```
EDU»p = [1  0  -12  6];
```

و نیز می‌توان آن را به صورت نمادین هم نشان داد:

```
EDU»p = 's ^ 3 - 12*s + 6';
```

این دو نمایش در متلب یکی نیستند و دارای دو مفهوم جدا می‌باشند. هرگاه بخواهیم یک عبارت جبری را به صورت نمادین یا سمبلیک دستکاری کنیم، دومین نمایش لازم است. این توانمندی خصوصاً هنگام کار با معادلات همزمان، که در چند مثال اخیر دیدیم، مفید است.

مجموعه معادلات زیر را ملاحظه نمایید:

$$(3s + 10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{s + 2}$$

$$-10\mathbf{I}_1 + (4s + 10)\mathbf{I}_2 = \frac{-2}{s + 1}$$

با استفاده از نمایش نمادین متلب دو رشته متغیر را تعریف می‌کنیم:

```
EDU»eqn1 = '(3*s+10)*I1 - 10*I2 = 4/(s+2)';
EDU»eqn2 = 1 '-10*I1 + (4*s+10)*I2 = -2/(s+1);
```

توجه کنید که در هر رشته کل معادله نوشته می‌شود. هدف ما حل این دو معادله برای یافتن متغیرهای $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ می‌باشد. متلب دارای روال خاصی به‌نام ()solve است که می‌تواند معادلات را برای ما حل کند. این زیرروال با لیست‌کردن معادلات جدا از هم (که به آن‌ها string می‌گوییم) و به دنبال آن لیستی از مجهولات (به آن‌ها هم string گوییم) احضار می‌شود:

```
EDU»solution = solve(eqn1, eqn2, 'I1', 'I1');
```


پاسخ در متغیر solution و گاهی هم به فرم غیرمنتظره‌ای ذخیره می‌گردد. متلب پاسخ را به فرمی به‌نام structure که برای برنامه‌نویسان C آشنا است بازمی‌گرداند. با این وجود در این مرحله آنچه ما می‌خواهیم بدانیم این‌است‌که چگونه جواب را استخراج کنیم. اگر این جمله را تایپ کنیم:

```
EDU»I1 = solution.I1
```

پاسخ زیر را دریافت می‌کنیم:

```
I1 = 2*(4*s+9)/(s+1)/(6*s^2+47*s+70)
```

و به این معنی است که عبارت چندجمله‌ای s به متغیر I1 تخصیص یافته است. عمل مشابهی را می‌توان برای متغیر I2 انجام داد.

اکنون می‌توان مستقیماً برای تعیین عکس تبدیل لاپلاس به کمک تابع ()ilaplace پیش‌رفت:

```
EDU» i1 = ilaplace(I1)
i1 =   10/29*exp(-t)-172/667*exp(-35/6*t)-2/23*exp(-2*t)
```

در این روال، می‌توان حل معادلات همزمان حاصل از تحلیل گرهی یا حلقه‌ای را به‌دست‌آورد. فرمان ezplot($i1$) به ما این اجازه را می‌دهد که ببینیم حل به چه شباهت دارد. باید متذکر شد که گاهی عبارات پیچیده متلب را به اشتباه می‌اندازند. در این موارد ()ilaplace ممکن‌است پاسخ مفیدی را بازنگرداند.

در این‌جا ذکر چند تابع مرتبط با موضوع سودمند است به خصوص که می‌توان از آن‌ها برای تست نتایج دستی سریعاً استفاده کرد. تابع ()numden یک تابع گویا را به دو متغیر مبدل می‌سازد: یکی حاوی صورت و دیگری حاوی مخرج است. مثلاً

```
EDU» [N, D] = numden(I1)
```

دو عبارت جبری ذخیره‌شده در N و D را بازمی‌گرداند:

```
N = 8*s + 18
D = (s+1)*(6*s^2+47*s+70)
```

برای اعمال تجربیات قبلی خود به تابع ()residue لازم است هر عبارت سمبلیک (رشته) را به صورت برداری حاوی ضرایب چند جمله درآوریم. برای دستیابی به آن باید از فرمان ()sym2poly استفاده کرد:

```
EDU>> n = sym2poly(N);
```

و

```
EDU» d = sym2poly(D)
d = 6   53   117   70
```

سپس ما می‌توانیم مقاومت را محاسبه کنیم:

```
EDU» [r p y] = residue(n, d)
r=          p=          y=
-0.2579     -5.8333     []
-0.0870     -2.0000
0.3448      -1.0000
```

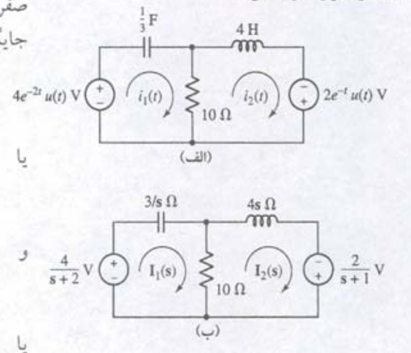
که با آن‌چه که از ()$i$laplace به‌دست آمد برابر است.

با استفاده از این مهارت‌های جدید متلب، آماده تحلیل چند مدار هستیم.

مثال ۳ـ۱۵

دو جریان حلقه i_1 و i_2 را در مدار شکل ۷ـ۱۵ (الف) معین کنید. در آغاز هیچ انرژی در مدار وجود ندارد.

همیشه اولین گام، ترسیم مدار معادل حوزه فرکانس است. چون در $t = 0^-$ انرژی ذخیره‌شده صفر است، خازن $\frac{1}{3}$ F را با امپدانس $3/s\ \Omega$ و القاگر 4H را با امپدانس $4s\Omega$ طبق شکل ۷ـ۱۵ (ب) جایگزین می‌کنیم.



شکل ۷ـ۱۵ (الف) یک مدار دو حلقه که در آن جریان هر حلقه مورد تقاضا است. (ب) مدار معادل حوزه فرکانس.

سپس مثل قبل دو معادله تک‌حلقه را می‌نویسیم:

$$-\frac{4}{s+2} + \frac{3}{s}\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = 0$$

یا

$$\left(\frac{3}{s} + 10\right)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{s+2} \qquad \text{(حلقه 1)}$$

و

$$-\frac{2}{s+1} + 10\mathbf{I}_2 - 10\mathbf{I}_1 + 4s\mathbf{I}_2 = 0$$

یا

$$-10\mathbf{I}_1 + (4s+10)\mathbf{I}_2 = \frac{2}{s+1} \qquad \text{(حلقه 2)}$$

با حل معادلات فوق برای $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ داریم:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{2s(4s^2 + 19s + 20)}{(20s^4 + 66s^3 + 73s^2 + 57s + 30)}\ \text{A}$$

و

$$\mathbf{I}_2 = \frac{30s^2 + 43s + 6}{(s+2)(20s^3 + 26s^2 + 21s + 15)}\ \text{A}$$

تنها چیزی که باقی می‌ماند گرفتن عکس تبدیل لاپلاس برای هر تابع است که خواهیم داشت:

$$i_1(t) = -96.39e^{-2t} - 344.8e^{-t} + 841.2e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 197.7e^{-0.15t}\sin 0.8529t \text{ mA}$$

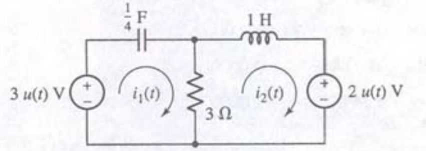
و

$$i_2(t) = -481.9e^{-2t} - 241.4e^{-t} + 723.3e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 472.8e^{-0.15t}\sin 0.8529t \text{ mA}$$

غیرمستقیم گفتیم که هیچ جریانی در $t = 0^-$ از القاگر عبور نمی‌کند، بنابراین $i_2(0^-) = 0$ و درنتیجه $i_2(0^+)$ هم باید صفر باشد. آیا در پاسخ ما این نکته صحت دارد؟

تمرین

۱۵ـ۳ جریان‌های حلقه i_1 و i_2 را در مدار شکل ۸ـ۱۵ پیدا کنید. می‌توانید فرض کنید که در $t = 0^-$ هیچ انرژی در مدار ذخیره نشده است.



شکل ۸ـ۱۵

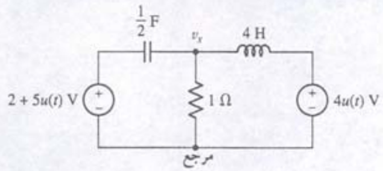
جواب: $i_1 = e^{-2t/3}\cos(\frac{4}{3}\sqrt{2}\,t) + (\sqrt{2}/8)e^{-2t/3}\sin(\frac{4}{3}\sqrt{2}\,t)$

$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3}\cos(\frac{4}{3}\sqrt{2}\,t) + (13\sqrt{2}/24)e^{-2t/3}\sin(\frac{4}{3}\sqrt{2}\,t)$

مثال ۴ـ۱۵

ولتاژ v_x در مدار شکل ۹ـ۱۵ را با تکنیک تحلیل گره محاسبه کنید.

اولین گام ترسیم مدار در حوزه s است. می‌بینیم که خازن $\frac{1}{2}$ F دارای ولتاژ اولیه 2 V در $t = 0^-$ است، پس لازم است یکی از دو مدل شکل ۵ـ۱۵ را برگزینیم. چون می‌خواهیم تحلیل گرهی انجام دهیم، شکل ۵ـ۱۵ (ب) مناسب‌تر است. مدار حاصل در شکل ۱۰ـ۱۵ دیده می‌شود.



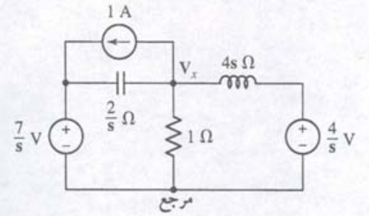
شکل ۹ـ۱۵ یک مدار چهارگره ساده حاوی دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی.

با مشخص‌بودن دو ولتاژ گره از سه ولتاژ، تنها یک معادله گره برای نوشتن داریم:

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_x - \frac{7}{s}}{\frac{2}{s}} + \mathbf{V}_x + \frac{\mathbf{V}_x - \frac{4}{s}}{4s}$$

به این ترتیب داریم:

$$\mathbf{V}_x = \frac{10s^2 + 4}{s(2s^2 + 4s + 1)} = \frac{5s^2 + 2}{s\left(s + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$



شکل ۱۰ـ۱۵ مدار معادل دامنه s مربوط به شکل ۹ـ۱۵.

ولتاژ گره v_x از تبدیل لاپلاس معکوس به دست می‌آید:

$$v_x = [4 + 6.864e^{-1.707t} - 5.864e^{-0.2929t}]u(t)$$

یا

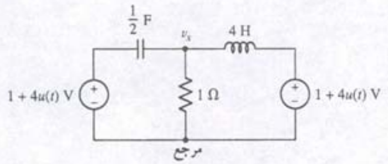
$$v_x = \left[4 - e^{-t}\left(9\sqrt{2}\sinh\frac{\sqrt{2}}{2}t - \cosh\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]u(t)$$

آیا پاسخ شما صحیح است؟ یک راه آزمایش آن ارزیابی ولتاژ خازن در $t = 0$ است، زیرا می‌دانیم که مقدار آن 2 V است. بنابراین:

$$\mathbf{V}_C = \frac{7}{s} - \mathbf{V}_x = \frac{4s^2 + 28s + 3}{s(2s^2 + 4s + 1)}$$

با ضرب $\mathbf{V}_C$ در s و استفاده از حد $s \to \infty$ داریم:

$$v_C(0^+) = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{4s^2 + 28s + 3}{2s^2 + 4s + 1}\right] = 2\text{ V}$$



شکل ۱۱ـ۱۵ مدار تمرین ۴ـ۱۵.

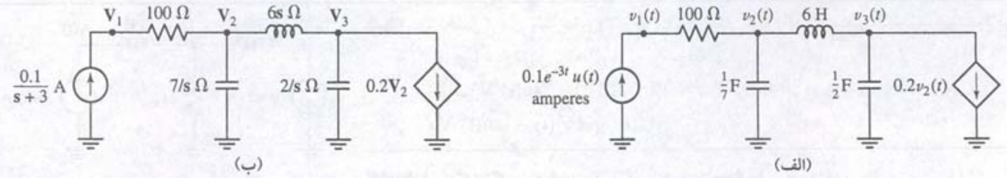
تمرین

۱۵ـ۴ از تحلیل گره برای محاسبه $v_x(t)$ برای مدار شکل ۱۱ـ۱۵ استفاده کنید.

جواب: $[5 + 5.657(e^{-1.707t} - e^{-0.2929t})]u(t)$

مثال ۵ـ۱۵

از تحلیل گرهی برای تعیین ولتاژهای v_1، v_2 و v_3 در مدار شکل ۱۲ـ۱۵ (الف) استفاده کنید. در $t = 0^-$ هیچ انرژی ذخیره نشده است.



شکل ۱۲ـ۱۵ (الف) مدار چهارگرهی حاوی دو خازن و یک القاگر، هیچ‌یک از آن‌ها در $t = 0^-$ انرژی ذخیره نکرده‌اند. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس.

مدار متشکل از سه عنصر ذخیره‌ساز انرژی جداگانه است که هیچ یک از آن‌ها در $t = 0^-$ چیزی را ذخیره نکرده‌اند. پس هر یک را می‌توان با امپدانس متناظرش، چون شکل ۱۲ـ۱۵ (ب) جایگزین کرد. به حضور منبع وابسته‌ای که با ولتاژ گرهی $v_2(t)$ کنترل می‌شود نیز توجه کنید.

با شروع از گره 1 می‌توان معادلات زیر را نوشت:

$$\frac{0.1}{s + 3} = \frac{V_1 - V_2}{100}$$

یا

$$\frac{10}{s + 3} = V_1 - V_2 \qquad \text{(گره 1)}$$

و در گره 2 داریم:

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{100} + \frac{V_2}{7/s} + \frac{V_2 - V_3}{6s}$$

یا

$$-42sV_1 + (600s^2 + 42s + 700)V_2 - 700V_3 = 0 \qquad \text{(در گره 2)}$$

و بالاخره در گره 3 داریم:

$$-0.2V_2 = \frac{V_3 - V_2}{6s} + \frac{V_3}{2/s}$$

یا

$$(1.2s - 1)V_2 + (3s^2 + 1)V_3 = 0$$

با حل این دسته معادلات برای ولتاژ گره‌ها داریم:

$$V_1 = 3\,\frac{100s^3 + 7s^2 + 150s + 49}{(s + 3)(30s^3 + 45s - 14)}$$

$$V_2 = 7\,\frac{3s^2 + 1}{(s + 3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$V_3 = -1.4\,\frac{6s - 5}{(s + 3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

تنها گام باقیمانده گرفتن عکس تبدیل لاپلاس هر ولتاژ است به نحوی که برای $t > 0$:

$$v_1(t) = 9.789e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t}\cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t}\sin(1.251t)\ V$$

$$v_2(t) = -0.2105e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t}\ 0.1488e^{0.1471t}\cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t}\sin(1.251t)\ V$$

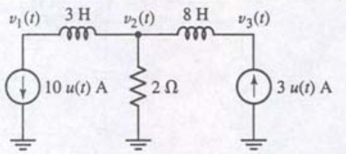
$$v_3(t) = -0.03459e^{-3t} + 0.06631e^{-0.2941t} - 0.03172e^{0.1471t}\cos(1.251t) - 0.06362e^{0.1471t}\sin(1.251t)\ V$$

توجه دارید که پاسخ به صورت نمایی افزایش می‌یابد و دلیل آن وجود منبع جریان وابسته است
در واقع مدار در حال از کنترل خارج‌شدن است و بالاخره در زمانی قطعه‌ای خواهد سوخت، یـ
خواهد ترکید و یا به نوعی از کار خواهد افتاد. هرچند تحلیل چنین مداری مسلماً کار زیادی می‌برد
مزایای تکنیک‌های حوزه s به محض اجرای تحلیل در حوزه زمان بسیار واضح خواهند بود.

تمرین

۱۵ـ۵ با تحلیل گرهی، ولتاژهای v_1، v_2 و v_3 را در مدار شکل ۱۵ـ۱۳ معین کنید. فرض شود در $t = 0^-$ هیچ انرژی در القاگرها ذخیره نشده است.

جواب: $v_1(t) = -30\delta(t) - 14u(t)$ V، $v_2(t) = -14u(t)$ V و $v_3(t) = 24\delta(t) - 14u(t)$ V.



شکل ۱۵ـ۱۳

۱۵ـ۳ تکنیک‌های دیگر در تحلیل مدار

بسته به هدف مشخص‌شده در تحلیل یک مدار خاص، اغلب می‌بینیم که با انتخاب مناسب
تکنیک می‌توان تحلیل را ساده کرد. مثلاً به ندرت مایل به اعمال اصل تجمیع به مداری هستیـ
که در آن 215 منبع مستقل وجود داشته باشد زیرا باید 215 مدار جداگانه را تحلیل نمود! با ایـ

وجود با رفتاری که با خازن‌ها و القاگرها داشتیم و آن‌ها را به صورت امپدانس درنظرگرفتیم، آزادیم
تا هر یک از روش‌های تحلیل مدار در فصل‌های ۳، ۴ و ۵ را به معادلشان در حوزه s به کارگیریم.
بنابراین تجمیع، تبدیل منبع، قضیه تونن و نورتن همگی در حوزه s قابل اعمالند.

مثال ۶ـ۱۵

مدار شکل ۱۴ـ۱۵ (الف) را با روش تبدیل منبع ساده کنید و برای $v(t)$ عبارتی به‌دست‌آورید.

با توجه به این‌که هیچ جریان یا ولتاژ اولیه‌ای مشخص نشده و u(t) در منبع ولتاژ ضرب شده است، نتیجه می‌گیریم که هیچ انرژی اولیه‌ای در مدار ذخیره نشده است بنابراین مدار حوزه فرکانس را مطابق شکل ۱۴ـ۱۵ (ب) می‌کشیم.

استراتژی ما این‌است‌که چندین تبدیل منبع متوالی انجام دهیم تا دو امپدانس $2/s\ \Omega$ و مقاومت 10Ω را با هم ترکیب کنیم. ما باید امپدانس $9s\Omega$ را رها کنیم زیرا ولتاژ موردنظر V(s) در دو سر آن ظاهر می‌گردد. اکنون ممکن‌است منبع ولتاژ و امپدانس سمت چپ $2/s\Omega$ را به یک منبع موازی با امپدانس $2/s\Omega$ تبدیل کنیم. یعنی:

$$I(s) = \left(\frac{2s}{s^2 + 9}\right)\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{s^2}{s^2 + 9}\ A$$

مطابق با شکل ۱۵ـ۱۵ (الف) پس از این تبدیل، امپدانس زیر را در برابر منبع جریان خواهیم داشت:

$$Z_1 \equiv (2/s) \parallel 10 = 20/(10s + 2)\Omega$$

با اجرای یک تبدیل منبع دیگر منبع ولتاژ $V_2(s)$ را چنین داریم:

$$V_2(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 9}\right)\left(\frac{20}{10s + 2}\right)$$

این منبع ولتاژ با Z_1 و امپدانس باقیمانده $2/s$ سری است. با ترکیب Z_1 و $2/s$ امپدانس جدید Z_2 چنین است:

$$Z_2 = \frac{20}{10s + 2} + \frac{2}{s} = \frac{40s + 4}{s(10s + 2)}\ \Omega$$

مدار حاصل در شکل ۱۵ـ۱۵ (ب) دیده می‌شود. در این مقطع، آماده‌ایم تا عبارتی را با یک تقسیم ولتاژ ساده برای ولتاژ V(s) به‌دست‌آوریم:

$$V(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 9}\right)\left(\frac{20}{10s + 2}\right)\frac{9s}{9s + \left[\dfrac{40s + 4}{s(10s + 2)}\right]}$$

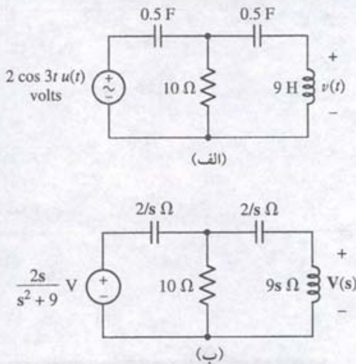
$$= \frac{180s^4}{(s^2 + 9)(90s^3 + 18s^2 + 40s + 4)}$$

ـر مخرج کسر هر دو جمله ریشه مختلط دارند. به کمک متلب و بسط مخرج برای تعیین ـاقیمانده‌ها داریم:

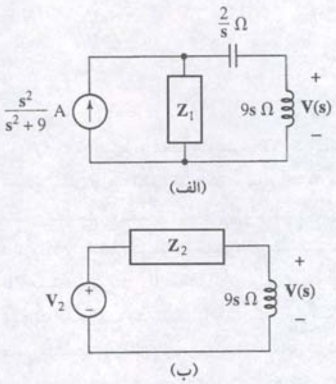
```
EDU» d1 = ’s^2 + 9’;
EDU» d2 = ’90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4;
EDU» d = symmul(d1, d2);
EDU» denominator = expand(d);
EDU» den = sym2poly(denominator);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residue(num.den);
```

ـی‌بینیم که:

$$V(s) = \frac{1.047 + j0.0716}{s - j3} + \frac{1.047 - j0.0716}{s + j3} - \frac{0.0471 - j0.0191}{s + 0.04885 - j0.6573} - \frac{0.0471 + j0.0191}{s + 0.04885 + j0.6573} + \frac{5.590 \times 10^{-5}}{s + 0.1023}$$

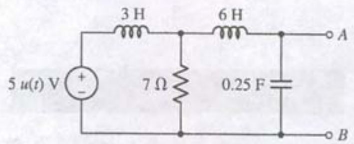


شکل ۱۴ـ۱۵ (الف) مداری که باید با تبدیل منبع ساده شود. (ب) نمایش حوزه فرکانس.



شکل ۱۵ـ۱۵ (الف) مدار پس از اولین تبدیل. (ب) مدار نهایی برای حل V(s).

توجه کنید که هر جمله با یک قطب مختلط دارای مختلط مزدوجی نیز هست. در سیستم‌های فیزیکی همواره قطب‌ها به صورت جفت هستند.



شکل ۱۶ـ۱۵

باگرفتن عکس تبدیل هر جمله و نوشتن $1.047 + j0.0716$ به صورت $1.049e^{j3.912°}$ و $0.0471 + j0.0191$ به صورت $0.05083e^{j157.9°}$ داریم:

$$v(t) = 1.049e^{j3.912°}e^{j3t}u(t) + 1.049e^{-j3.912°}e^{-j3t}u(t) + 0.05083e^{-j157.9°}e^{-0.04885t}e^{-j0.6573t}u(t) + 0.05083e^{+j157.9°}e^{-0.04885t}e^{+j0.6573t}u(t) + 5.590 \times 10^{-5}e^{-0.1023t}u(t)$$

با تبدیل نماهای مختلط به سینوس، عبارتی ساده‌تر برای ولتاژ حاصل می‌شود:

$$v(t)= [5.590 \times 10^{-5}e^{-0.1023t} + 2.098 \cos(3t + 3.912°) + 0.1017e^{-0.04885t}\cos(0.6573t + 157.9°)]\ u(t)\ V$$

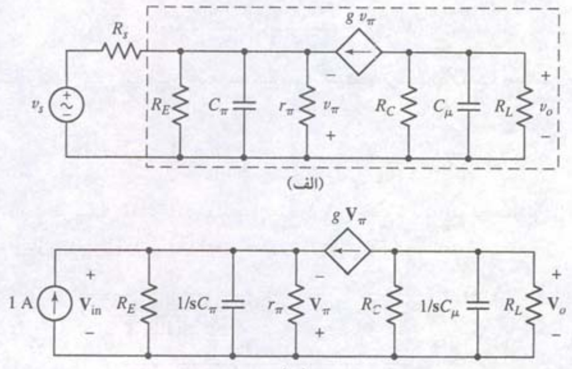
تمرین

۶ـ۱۵ با روش تبدیل منبع، مدار شکل ۱۶ـ۱۵ را به منبع جریانی در حوزه s و موازی با یک امپدانس تبدیل کنید.

جواب: $Z_s = \dfrac{72s^2 + 252s}{18s^3 + 21s^2 + 54s\ 28}+\ \Omega$ و $I_s = \dfrac{35}{s^2(18s\ 163)}+\ A$

مثال ۷ـ۱۵

معادل تونن حوزه فرکانس را برای بخش مشخص‌شده در شکل ۱۷ـ۱۵ (الف) به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷ـ۱۵ (الف) مدار معادلی برای تقویت‌کننده ترانزیستوری بیس مشترک. (ب) مدار معادل حوزه فرکانس با یک منبع تست 1A که جایگزین منبع ورودی v_s و R_s شده است.

این مدار خاص به مدل "هیبرید π" یک مدار ترانزیستوری به نام تقویت‌کننده بیس مشترک معروف است. دو خازن C_π و C_μ ظرفیت داخلی ترانزیستور رانشان می‌دهند و معمولاً در حدود چند PF هستند. مقاومت R_L، معادل تونن وسیله بیرونی است که ممکن‌است یک بلندگو یا حتی یک لیزر نیمه هادی باشد. منبع ولتاژ v_s به همراه R_s معادل تونن وسیله ورودی‌اند که ممکن‌است یک میکروفن، یک مقاومت حساس به نور و حتی یک آنتن رادیو باشد.

مایلیم معادل تونن مدار متصل به وسیله را پیداکنیم. این کمیت را اغلب **امپدانس ورودی** مدا تقویت‌کننده می‌خوانند. پس از تبدیل مدار به معادل حوزه فرکانس، وسیله ورودی v_s و R_s را با یک منبع تست 1A طبق شکل ۱۷ـ۱۵ (ب) جایگزین می‌کنیم. پس امپدانس ورودی Z_{in} برابر است با:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1}$$

می‌باشد که در واقع همان V_{in} است. برای این ولتاژ باید عبارتی برحسب منبع 1A، مقاومت‌ه و خازن‌ها و یا پارامترهای منبع وابسته g بیابیم. با نوشتن یک معادله گره در ورودی داریم:

$$1 + gV_\pi = \frac{V_{in}}{Z_{eq}}$$

که

$$Z_{eq} = R_E \parallel \frac{1}{sC_\pi} \parallel r_\pi = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi}$$

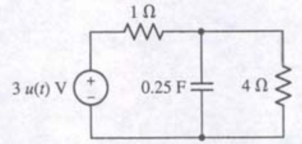
چون $V_\pi = -V_{in}$ است داریم:

$$Z_{in} = V_{in} = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi + gR_E r_\pi}\ \Omega$$

تمرین

۷ـ۱۵ در حوزه s، معادل نورتن متصل به مقاومت 1Ω در شکل ۱۸ـ۱۵ را به‌دست‌آورید.

جواب: $Z_{th} = 4/(s + 1)\ \Omega$ و $I_{sc} = 3(s + 1)/4s\ A$



شکل ۱۸ـ۱۵

۴ـ۱۵ قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل

در این بخش ما ابتدا واژه‌های به‌کاررفته در فصل ۱۴ را که قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل بودند، بررسی می‌کنیم.

مدار ساده شکل ۱۹ـ۱۵ (الف) را درنظربگیرید. معادل حوزه s در شکل ۱۹ـ۱۵ (ب) ملاحظه می‌شود. تحلیل گرهی منجر به رابطه زیر می‌گردد:

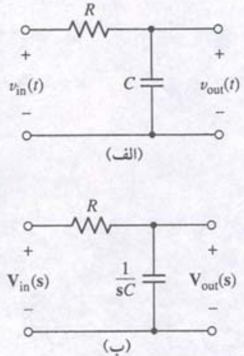
$$0 = \frac{V_{out}}{1/sC} + \frac{V_{out} - V_{in}}{R}$$

با مرتب‌کردن و حل برای V_{out} داریم:

$$V_{out} = \frac{V_{in}}{1 + sRC}$$

یا

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + sRC} \qquad (۷$$



شکل ۱۹ـ۱۵ (الف) یک مدار ساده خازن - مقاومت با ذکر ولتاژ ورودی و خروجی. (ب) مدار معادل حوزه s.

که $H(s)$ **تابع تبدیل** است و به صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف‌می‌شود. به راحتی می‌توانیم یک جریان را به‌عنوان ورودی یا خروجی تعریف‌کنیم و برای این مدار تابع دیگری به دست آوریم. شکل مدارها معمولاً از چپ به راست خوانده می‌شوند و بنابراین طراحان حتی‌الامکان غلب ورودی را در سمت چپ شکل و پایانه‌های خروجی را در سمت راست قرار می‌دهند.

مفهوم تابع تبدیل از هر دو دید تحلیل و دیگر زمینه‌های مهندسی، بسیار مهم است. دو دلیل برای این اهمیت وجود دارد. اول این‌که به محض دانستن تابع تبدیل یک مدار، بلافاصله می‌توان خروجی مربوط به هر سیگنال ورودی را دانست. تنها کافی است ورودی را در $H(s)$ ضرب کنیم و عکس تبدیل لاپلاس را به‌دست‌آوریم. دوم این‌که ساختار تابع تبدیل اطلاعات زیادی درباره رفتاری که می‌توان از یک مدار خاص انتظار داشت، را دارد.

در فصل ۱۴ دیدیم که برای ارزیابی ثبات یک سیستم لازم است تا قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل $H(s)$ را بدانیم. می‌توان معادله (۷) را به صورت زیر نوشت:

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \qquad (۸$$

ا $s \to \infty$ اندازه این تابع به سمت صفر میل می‌کند. پس گوییم $H(s)$ دارای **صفر** در $s = \infty$ ست. در $s = -\frac{1}{RC}$ تابع به سمت بی‌نهایت می‌رود و بنابراین گوییم تابع $H(s)$ دارای **قطبی** ر $s = -\frac{1}{RC}$ می‌باشد. این فرکانس‌ها را **فرکانس‌های بحرانی** گویند و آشنایی زودهنگام با ن‌ها ساخت منحنی‌های پاسخ مطرح در بخش ۷ـ۱۵ را ساده می‌کند.

هنگام محاسبه مقدار تابع، معمولاً نقاط $+\infty$ و $-\infty$ نقاط روی هم تصور می‌شوند. با این وجود لزومی ندارد زاویه فاز مقادیر خیلی بزرگ و خیلی کوچک با هم برابر باشند.

۵ـ۱۵ کانولوشن

کنیک‌های حوزه s ارائه‌شده تاکنون در تعیین پاسخ جریان ولتاژ یک مدار خاص مفید بودند. این وجود، در عمل اغلب با مدارهایی مواجه هستیم که می‌توان منابع اختیاری به آن متصل رد و هر بار لازم است خروجی جدید را محاسبه‌کنیم. برای نیل به این هدف از تابع تبدیلی به م **تابع سیستم** مدار استفاده می‌کنیم. به زودی خواهیم دید که این تابع سیستم تبدیل لاپلاس سخ ضربه واحد مدار است.

تحلیل می‌تواند در حوزه زمان یا حوزه فرکانس باشد، گرچه کار در حوزه فرکانس بهتر به نظر می‌رسد. در این صورت راه‌حل چهار مرحله خواهد داشت:

۱. تعیین تابع سیستم مدار (اگر از قبل معین نیست).

۲. تهیه تبدیل لاپلاس تابع تحریک مورد استفاده.

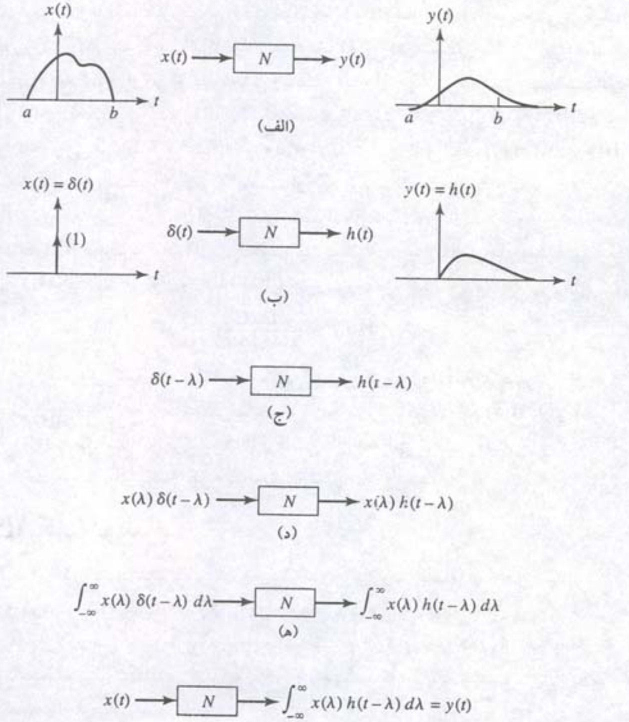
۳. ضرب این تبدیل و تابع سیستم.

۴. اجرای عمل عکس تبدیل روی حاصل‌ضرب برای یافتن خروجی.

به این ترتیب بعضی از عبارات انتگرالی پیچیده به توابع ساده‌ای از s بدل می‌شوند و عملیات انتگرالی و مشتقی با اعمال ساده ضرب و تقسیم جایگزین می‌شود. با درنظرگرفتن این نکات، بگذارید به سراغ پاسخ ضربه‌واحد یک مدار برویم و رابطه آن را با تابع سیستم مشخص کنیم. پس از آن چند مسئله خاص را تحلیل خواهیم کرد.

پاسخ ضربه

شبکه الکتریکی خطی N را درنظربگیرید که در آن هیچ انرژی اولیه‌ای ذخیره‌نشده و یک تابع تحریک $x(t)$ به آن متصل شده است. در نقطه‌ای از این مدار، پاسخ تابع $y(t)$ وجود دارد. این مجموعه را به صورت نمودار بلوکی همراه با توابع زمانی تولیدی در شکل ۱۵-۲۰ (الف) نشان داده‌ایم. تابع تحریک فقط در فواصل $a < t < b$ وجود دارد. پس $y(t)$ هم در $t > a$ وجود خواهد داشت.



شکل ۱۵-۲۰ تکامل تفهیمی انتگرال کانولوشن.

اکنون سوالی که مایل به پاسخ آن هستیم این است که "اگر فرم $x(t)$ را بدانیم، آنگاه $y(t)$ را چگونه می‌توان دانست" برای پاسخ به این سوال، لازم است اطلاعاتی راجع‌به N داشته باشیم. بنابراین، تصور کنید اطلاعات ما از N شامل پاسخ مربوط به منبع تحریک ضربه واحد $\delta(t)$ باشد، یعنی فرض می‌شود $h(t)$ یعنی پاسخ حاصل از ورودی ضربه به عنوان تابع تحریک را در $t = 0$ می‌دانیم، شکل ۱۵-۲۰ (ب). تابع $h(t)$ را معمولاً تابع پاسخ ضربه‌واحد یا به‌طور خلاصه **پاسخ ضربه** می‌خوانند. پاسخ ضربه یک مدار مشخصه بسیار مهمی از آن به شمار می‌آید.

بر اساس دانسته‌های خود از تبدیل لاپلاس می‌توانیم این مطلب را از زاویه متفاوتی بنگریم. با تبدیل $x(t)$ به $X(s)$ و $y(t)$ به $Y(s)$ تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

اگر $x(t) = \delta(t)$ باشد طبق جدول (۱۴-۱) داریم $X(s) = 1$. بنابراین $H(s) = Y(s)$ بوده و در این جا $h(t) = y(t)$ است.

به‌جای اعمال پالس ضربه واحد در $t = 0$ بگذارید تصور کنیم که در $t = \lambda$ به مدار اعمال شده است. خواهیم دید که فقط خروجی با تأخیری ظاهر خواهد شد. بنابراین وقتی ورودی $\delta(t - \lambda)$ است، شکل ۱۵-۲۰ (ج)، خروجی $h(t - \lambda)$ خواهد شد. پس از آن فرض کنید که تابع ضربه مقداری به جز واحد داشته باشد. در حالت خاص بگذارید این مقدار در $t = \lambda$ برابر $x(t)$ باشد. مقدار $x(\lambda)$ عددی ثابت است. می‌دانیم که ضرب یک تابع تحریک یک مدار خطی در یک عدد ثابت، تنها سبب می‌شود که پاسخ مدار هم به همان نسبت تغییر کند. پس اگر ورودی به $x(\lambda)\delta(t - \lambda)$ تغییر کند، آنگاه پاسخ $x(\lambda)h(t - \lambda)$ خواهد شد (شکل ۱۵-۲۰ (د)).

اکنون ورودی اخیر را روی همه λهای ممکن جمع بسته و حاصل جمع را به عنوان تابع تحریک روی شبکه N اعمال می‌کنیم. خاصیت خطی‌بودن بیان می‌دارد که خروجی هم باید جمع خروجی‌های ناشی از ورودی‌های فوق باشد. با تأمل می‌توان گفت که انتگرال ورودی، انتگرال خروجی را طبق شکل ۱۵-۲۰ (ه) تولید می‌نماید. ولی این ورودی اخیر چیست؟ با توجه به خاصیت غربالی تابع ضربه*، می‌توان نشان داد که این ورودی همان $x(t)$ یعنی ورودی اصلی مدار است. شکل ۱۵-۲۰ (ه) را می‌توان به شکل ۱۵-۲۰ (و) نشان داد.

• خاصیت غربالی که در بخش ۱۴-۵ تعریف شد می‌گوید:
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$

انتگرال کانولوشن

اگر ورودی به سیستم N، تابع تحریک $x(t)$ باشد، می‌دانیم که خروجی باید تابع $y(t)$ در شکل ۱۵-۲۰ (الف) باشد. بنابراین از رابطه شکل ۱۵-۲۰ (و) نتیجه می‌گیریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \qquad (۹)$$

که $h(t)$ پاسخ ضربه N است. این رابطه مهم در همه جا به نام **انتگرال کانولوشن** شناخته می‌شود. بیان معادله مذکور چنین است که خروجی مدار برابر با کانولوشن ورودی و **پاسخ ضربه** است. این انتگرال اغلب به صورت ساده زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

به علامت * در رابطه مقابل توجه کنید و آن را با ضرب اشتباه نگیرید.

معادله (۹) گاهی متفاوت ولی به فرم معادل ظاهر می‌شود. اگر $z = t - \lambda$ فرض شود آنگاه $d\lambda = -dz$ شده و عبارت $y(t)$ چنین است:

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -x(t-z)h(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz$$

و چون سمبل به‌کاررفته برای انتگرال تفاوتی نمی‌کند می‌توان معادله (۹) را به صورت اصلاح‌شده زیر نوشت:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z)\,dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \qquad (۱۰)$$

کانولوشن و سیستم‌های قابل ساخت

نتیجه‌ای که در معادله (۱۰) حاصل شد بسیار کلی است و به هر سیستم خطی قابل اعمال است. با این وجود ما به سیستم‌های فیزیکی **قابل ساخت یا تشخیص‌پذیر** علاقمندیم، یعنی آن‌هایی که وجود دارند یا می‌توانند وجود داشته باشند. این سیستم‌ها خاصیت اصلاح مختصر انتگرال کانولوشن را دارند. یعنی پاسخ سیستم نمی‌تواند قبل از اعمال تابع تحریک، آغاز شود. به عبارت دیگر $h(t)$ که پاسخ سیستم به تابع ضربه در $t = 0$ است نمی‌تواند در $t < 0$ وجود داشته باشد. نتیجه می‌گیریم که عبارت زیر انتگرال در $z < 0$ برابر صفر است. در اولین انتگرال عبارت زیر انتگرال به ازای مقدار منفی $(t - z)$، یعنی $z > t$ صفر است. بنابراین برای سیستم‌های قابل ساخت، حدود انتگرال‌های کانولوشن چنین است:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t-z)\,dz \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned}} \qquad (۱۱)$$

معادلات (۱۰) و (۱۱) هر دو معتبرند ولی دومی حالت خاصی از اولی است و برای سیستم‌های خطی قابل ساخت مناسب‌تر است.

روش گرافیکی کانولوشن

قبل از این‌که صحبت از پاسخ ضربه بکنیم بگذارید مثالی بیاوریم و ببینیم چگونه انتگرال کانولوشن محاسبه می‌شود. گرچه عبارت خود به اندازه کافی ساده است ولی محاسبه آن گاهی اوقات با دردسر همراه می‌باشد، خصوصاً تعیین مقادیر حدود انتگرال‌گیری مشمول این مشکل است.

تصور کنید که ورودی یک پالس ولتاژ مربعی با شروع در $t = 0$ باشد که با دامنه 1V برای دوره 1 ثانیه‌ای ادامه دارد:

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

همچنین فرض کنید که این پالس به مداری که پاسخ ضربه‌اش فرم نمایی زیر را دارد اعمال شده باشد:

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

می‌خواهیم ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را پیدا کنیم. پاسخ را می‌توان بلافاصله به صورت انتگرالی نوشت:

$$y(t) = v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_{0}^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz$$
$$= \int_{0}^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)]\,dz$$

یافتن $v_o(t)$ به قدر کافی ساده است ولی وجود توابع پله‌ای متعدد محاسبه آن را مشکل می‌کند. برای تشخیص قسمت‌هایی از فاصله انتگرال‌گیری که عبارت زیر انتگرال در آن صفر است دقت زیادی لازم است.

اکنون اجازه بدهید تا برای درک انتگرال کانولوشن از امکانات گرافیکی کمک بگیریم. کار را با رسم چند محور z در کنار هم طبق شکل ۲۱-۱۵ شروع می‌کنیم. شکل $v_i(t)$ را می‌دانیم، پس شکل $v_i(z)$ را نیز می‌دانیم (شکل ۲۱-۱۵ (الف)). $v_i(-z)$ چیزی نیست جز $v_i(z)$ که نسبت به محور عمودی معکوس شده است (شکل ۲۱-۱۵ (ب)). اکنون $v_i(t - z)$ را نشان می‌دهیم. این تابع همان $v_i(-z)$ است که به اندازه $z = t$ به طرف راست جابه‌جا شده است (شکل ۲۱-۱۵ (ج)). به این ترتیب پاسخ ضربه $h(z) = 2e^{-z}u(z)$ ترسیم می‌شود (شکل ۲۱-۱۵ (د)).

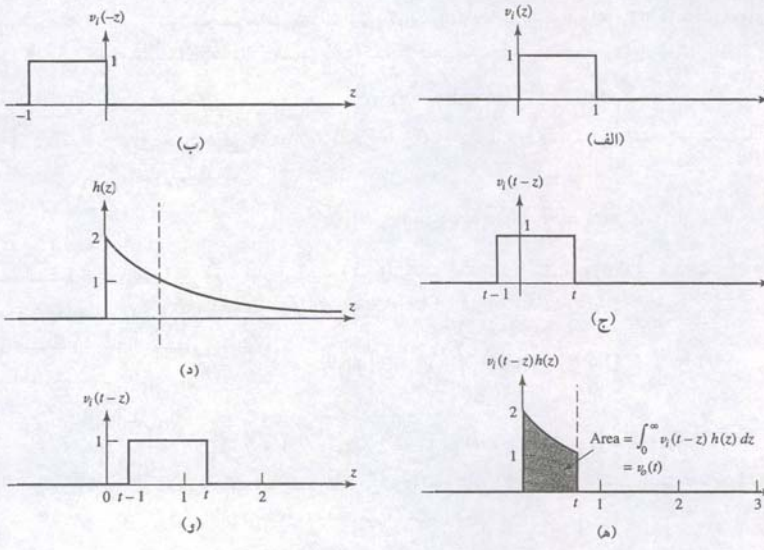
در گام بعد دو تابع $v_i(t - z)$ و $h(z)$ را در هم ضرب می‌کنیم (شکل ۲۱-۱۵ (هـ)). ما به دنبال مقداری برای خروجی $v_o(t)$ هستیم، که با سطح زیر منحنی حاصل‌ضرب داده شده است (ناحیه هاشور زده شده در شکل).

اجازه بدهید ابتدا $t < 0$ را درنظربگیریم. در این حالت همپوشی بین $v_i(t - z)$ و $h(z)$ وجود ندارد، پس $v_o = 0$. با افزایش t ما پالس را در شکل ۲۱-۱۵ (ج) به راست می‌لغزانیم تا با $h(z)$ در $t > 0$ همپوشی شود. ناحیه زیر منحنی مربوط به شکل ۲۱-۱۵ (و) با افزایش t، شروع به زیادشدن می‌کند تا به $t = 1$ برسیم. با افزایش t به بیش از این مقدار، یک شکاف بین $z = 0$ و لبه جلویی پالس طبق شکل ۲۱-۱۵ (هـ) به وجود می‌آید. در نتیجه همپوشی با $h(z)$ کاهش می‌یابد.

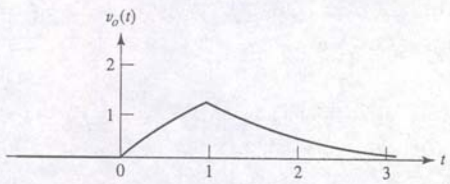
به بیان دیگر برای مقادیری از t که بین 0 و 1 است باید از $z = 0$ تا $z = t$ انتگرال بگیریم. برای مقادیری از t که از واحد تجاوز کند، محدوده انتگرال‌گیری $t-1 < z < t$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{t} 2e^{-z}\,dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 \le t \le 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^{t} 2e^{-z}\,dz = 2(e-1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

این تابع در شکل ۲۲-۱۵ در برابر t ترسیم شده و به این ترتیب حل ما کامل شده است.



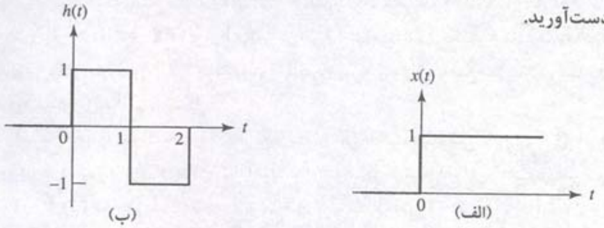
شکل ۲۱-۱۵ گام‌های ترسیمی محاسبه انتگرال کانولوشن.



شکل ۱۵ـ۲۲ تابع خروجی V_o حاصل از کانولوشن گرافیکی.

مثال ۱۵ـ۸

تابع پله واحد $x(t) = u(t)$ را به ورودی سیستمی که پاسخ ضربه‌اش $h(t)=u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$ می‌باشد اعمال کنید و خروجی متناظر $y(t) = x(t) * h(t)$ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۵ـ۲۳ شکل‌های (الف) سیگنال ورودی $x(t) = u(t)$ و (ب) پاسخ ضربه واحد $h(t) = u(t) - 2u(t - 1) + u(t - 2)$ برای یک سیستم خطی.

اولین قدم رسم $x(t)$ و $h(t)$ است (شکل ۱۵ـ۲۳). به‌طور دلخواه ابتدا انتگرال معادله (۱۱) را محاسبه می‌نماییم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t-z)\,dz$$

برای انتخاب صحیح حدود انتگرال‌گیری شکل‌های ۱۵ـ۲۴ را بررسی می‌کنیم. این شکل‌ها عبارتنداز ورودی $x(z)$ برحسب z، پاسخ ضربه $h(z)$، منحنی $h(-z)$ که همان قرینه $h(z)$ نسبت به محور عمودی است و $h(t - z)$ که از جابه‌جایی $h(-z)$ به اندازه t به سمت راست حاصل شده است. برای این شکل‌ها t را در محدوده $0 < t < 1$ اختیار می‌نماییم.

اکنون تجسم حاصل‌ضرب اولین گراف، $x(z)$ و آخرین گراف $h(t - z)$ در محدوده‌های مختلف t کار ساده‌ای است. وقتی t کمتر از صفر است، همپوشانی وجود ندارد و

$$y(t) = 0 \qquad t < 0$$

برای حالت شکل ۱۵ـ۲۴ (د)، منحنی‌ها از $z = 0$ تا $z = t$ همپوشانی داشته و هر یک مقدار واحد را دارند. پس:

$$y(t) = \int_0^t (1 \times 1)\,dz = t \qquad 0 < t < 1$$

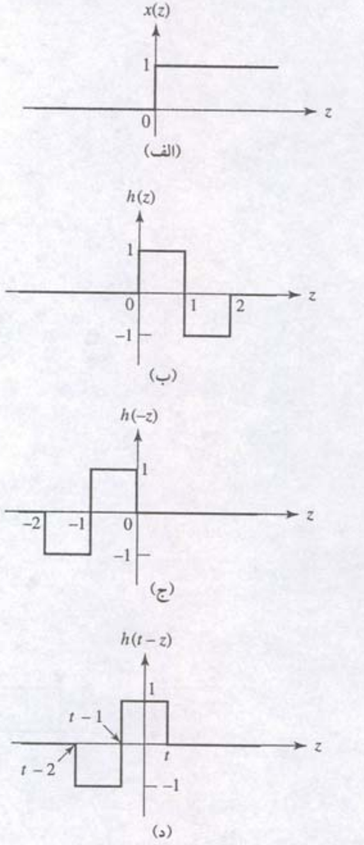
وقتی t بین 1 و 2 قرار می‌گیرد، $h(t - z)$ آنقدر به سمت راست می‌رود که قسمت منفی آن هم روی $x(z)$ می‌افتد. قسمت منفی از $z = 0$ تا $z = t - 1$ امتداد دارد. پس

$$y(t) = \int_0^{t-1} [1 \times (-1)]\,dz + \int_{t-1}^{t} (1 \times 1)\,dz = -z\Big|_{z=0}^{z=t-1} + z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

بنابراین:

$$y(t) = -(t-1) + t - (t-1) = 2 - t, \qquad 1 < t < 2$$

بالاخره وقتی t بزرگ‌تر از 2 می‌شود، تمام تابع $h(t - z)$ در سمت راست $z = 0$ قرار می‌گیرد. تمام آن در تابع پله واحد ضرب می‌شود و



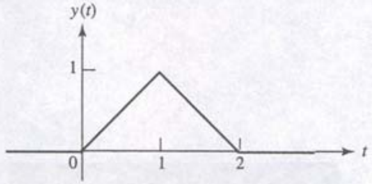
شکل ۱۵ـ۲۴ (الف) سیگنال ورودی و (ب) پاسخ ضربه برحسب z رسم شده است. (ج) $h(-z)$ از قرینه $h(z)$ نسبت به محور عمودی به‌دست‌آمده است و (د) $h(t - z)$ از جابه‌جایی $h(-z)$ به اندازه t واحد به راست حاصل شده است.

$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} [1 \times (-1)]\,dz + \int_{t-1}^{t} (1 \times 1)\,dz = -z\Big|_{z=t-2}^{z=t-1} + z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

یا

$$y(t) = -(t-1) + (t-2) + t - (t-1) = 0, \qquad t > 2$$

چهار بخش فوق برای $y(t)$ به صورت یک منحنی پیوسته در شکل ۱۵ـ۲۵ جمع‌آوری شده است.



شکل ۱۵ـ۲۵ نتیجه کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ در شکل ۱۵ـ۲۳.

تمرین

۱۵ـ۸ مثال ۱۵ـ۸ را با انتگرال دوم معادله (۱۱) تکرار کنید.

۱۵ـ۹ پاسخ ضربه یک شبکه با $h(t) = 5u(t - 1)$ داده شده است. اگر سیگنال ورودی $x(t) = 2[u(t) - u(t - 3)]$ به مدار اعمال شده باشد، خروجی $y(t)$ را در زمان‌های t برابر با (الف) 0.5-، (ب) 0.5، (ج) 2.5 و (د) 3.5 به‌دست‌آورید.

جواب ۱۵ـ۹: 0، 0، 15 و 25.

کانولوشن و تبدیل لاپلاس

کانولوشن کاربردهایی ورای تحلیل مدارهای خطی دارد، که از آن جمله پردازش تصویر، مخابرات و تئوری نیمه هادی‌ها است. اغلب بهتر است ذهنیتی گرافیکی از فرآیند اصلی داشته باشیم، حتی اگر عبارات انتگرالی معادلات (۱۰) و (۱۱) همیشه بهترین مسیر حل نباشند. یک روش قوی دیگر از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌کند و لذا در مقدمه‌ای بر کانولوشن در این فصل آمده است.

بگذارید $\mathbf{F}_1(s)$ و $\mathbf{F}_2(s)$ به ترتیب تبدیل‌های لاپلاس $f_1(t)$ و $f_2(t)$ باشند. اینک می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $f_1(t) * f_2(t)$ را بیابیم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\,d\lambda\right\}$$

یکی از این توابع زمانی قاعدتاً تابع تحریک اعمال‌شده به پایانه‌های ورودی یک مدار خطی و دیگری پاسخ ضربه آن مدار است.

چون اکنون با توابع زمانی که قبل از $t = 0^-$ وجود ندارند سروکار داریم (تعریف تبدیل لاپلاس ما را به این فرض وا می‌دارد) حد پایین می‌تواند به 0^- تبدیل شود، آنگاه با به‌کارگیری تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\,d\lambda\right] dt$$

چون e^{-st} به λ وابسته نیست می‌توانیم این فاکتور را به داخل انتگرال دوم ببریم. اگر این کار را انجام دهیم و انتگرال دیگر را به همان شکل حفظ کنیم داریم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\,dt\right] d\lambda$$

با ادامه شگردهای مشابه، می‌بینیم که $f_1(\lambda)$ به t وابسته نیست و لذا می‌توان آن را به خارج انتگرال برد:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t-\lambda)\,dt\right] d\lambda$$

آنگاه جایگزینی $x = t - \lambda$ را در انتگرال داخل کروشه انجام می‌دهیم (که در آن λ یک ثابت است):

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-s(x+\lambda)} f_2(x)\,dx\right]d\lambda$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-s\lambda}\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-sx} f_2(x)\,dx\right]d\lambda$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-s\lambda}[\mathbf{F}_2(s)]\,d\lambda$$
$$= \mathbf{F}_2(s)\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda$$

چون بقیه انتگرال در واقع $\mathbf{F}_1(s)$ است پس:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(s)\cdot\mathbf{F}_2(s)} \qquad (۱۲)$$

با کمی تفاوت می‌بینیم که عکس تبدیل حاصل‌ضرب دو تابع، کانولوشن عکس تبدیل لاپلاس تک‌تک آن‌ها است. نتیجه‌ای که گاهی در تهیه عکس تبدیل لاپلاس مفید واقع می‌شود.

مثال ۹ـ۱۵

اگر $\mathbf{V}(s) = 1/(s+\alpha)(s+\beta)$ باشد $v(t)$ را با اعمال قضیه کانولوشن به‌دست‌آورید.

ما عکس تبدیل این تابع خاص را در بخش ۵ـ۱۴ با بسط به کسرهای جزئی به‌دست‌آوردیم. اکنون $\mathbf{V}(s)$ را به صورت حاصل‌ضرب دو تابع درنظر می‌گیریم.

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{1}{(s+\alpha)}$$

و

$$\mathbf{V}_2(s) = \frac{1}{(s+\beta)}$$

که

$$v_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

و

$$v_2(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

و بنابراین $v(t)$ مطلوب بلافاصله حاصل می‌شود:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(s)\mathbf{V}_2(s)\} = v_1(t)*v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda)v_2(t-\lambda)\,d\lambda$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{0^-}^{t} e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta t}e^{\beta\lambda}\,d\lambda$$
$$= e^{-\beta t}\int_{0^-}^{t} e^{(\beta-\alpha)\lambda}\,d\lambda = e^{-\beta t}\frac{e^{(\beta-\alpha)t}-1}{\beta-\alpha}u(t)$$

یا به صورت منسجم‌تر

$$v(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$$

آیا به‌دست‌آوردن این جواب ساده‌تر است؟ البته خیر مگر این‌که کسی علاقمند به انتگرال‌های کانولوشن باشد! روش تجزیه به کسرهای جزئی چندان پیچیده و خسته‌کننده نیست. با این وجود اجرای کانولوشن در حوزه s آسان‌تر است زیرا فقط به ضرب نیاز دارد.

این همان پاسخی است که با روش بسط به کسرهای جزئی به‌دست‌آوردیم. توجه کنید که لحاظ پله u(t) در نتیجه الزامی است زیرا همه توابع لاپلاس فقط برای زمان غیرمنفی معتبرند (یکسویه‌اند).

تمرین

۱۰ـ۱۵ مثال ۸ـ۱۵ را با روش کانولوشن در حوزه s تکرار کنید.

توضیحاتی در مورد توابع تبدیل

همان‌طور که قبلاً چندین بار متذکر شدیم، خروجی $v_o(t)$ نقطه‌ای در یک مدار خطی را می‌توان با کانولوشن ورودی $v_i(t)$ و پاسخ ضربه‌واحد h(t) به‌دست‌آورد. با این وجود باید به‌خاطر بسپاریم که پاسخ ضربه از کاربرد یک ضربه‌واحد در t = 0 **و صفرکردن همه مقادیر اولیه** به‌دست‌می‌آید. تحت این شرایط تبدیل لاپلاس $v_o(t)$ برابر است با:

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathbf{V}_o(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)*h(t)\} = \mathbf{V}_i(s)[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

بنابراین، $\mathbf{V}_o(s)/\mathbf{V}_i(s)$ برابر است با تبدیل پاسخ ضربه، که با $\mathbf{H}(s)$ نشان داده می‌شود:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} \qquad (۱۳)$$

از معادله (۱۳) می‌بینیم که پاسخ ضربه و تابع تبدیل یک جفت تبدیل لاپلاس را به‌وجود می‌آورند:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(s)$$

رابطه فوق واقعیت مهمی را بیان می‌کند و ما بعداً در تحلیل رفتار سیستم‌هایی که قبلاً ما را دچار مشکل می‌کردند از آن استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱۰ـ۱۵

پاسخ ضربه مدار شکل ۲۶ـ۱۵ (الف) را معین کرده و آن را برای محاسبه پاسخ واداشته به‌کار ببرید، اگر $v_{in}(t) = 6e^{-t}u(t)$ V.

ابتدا یک ولتاژ ضربه $\delta(t)$ را به مدار، طبق شکل ۲۶ـ۱۵ (ب) وصل می‌کنیم. گرچه می‌توانیم در هر حوزه زمان h(t) یا حوزه $\mathbf{H}(s)$ کار کنیم، ولی دومی را انتخاب می‌کنیم، پس دوباره نمایش شکل ۲۶ـ۱۵ (ب) را در شکل ۲۷ـ۱۵ می‌کشیم.

پاسخ ضربه $\mathbf{H}(s)$ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{1}$$

بنابراین هدف فعلی ما $\mathbf{V}_o$ است، کاری که به راحتی با تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$\mathbf{V}_o\Big|_{v_{in}=\delta(t)} = \frac{2}{\frac{2}{s}+2} = \frac{s}{s+1} = \mathbf{H}(s)$$

اکنون ممکن است با کانولوشن و تابع ورودی $v_{in} = 6e^{-t}u(t)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$v_{in} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_{in}(s)\cdot\mathbf{H}(s)\}$$

چون $\mathbf{V}_{in}(s) = 6/(s+1)$ است:

$$\mathbf{V}_o = \frac{6s}{(s+1)^2} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^2}$$

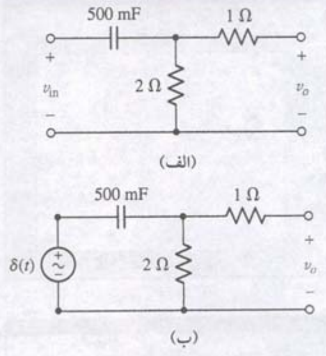
با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$v_o(t) = 6e^{-t}(1-t)u(t)\ \text{V}$$

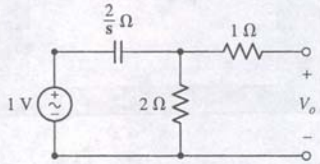
تمرین

۱۱ـ۱۵ با مراجعه به شکل ۲۶ـ۱۵ (الف) از کانولوشن برای یافتن $v_o(t)$ استفاده کنید، اگر $v_{in} = tu(t)$ V باشد.

جواب: $v_o(t) = (1-e^{-t})u(t)$ V



شکل ۲۶ـ۱۵ (الف) یک مدار ساده که به آن یک ورودی نمایی در t = 0 اعمال شده است. (ب) مدار به‌کاررفته برای تعیین h(t).

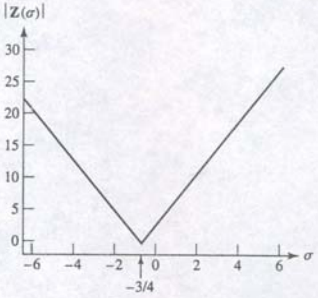


شکل ۲۷ـ۱۵ مدار استفاده‌شده برای یافتن $\mathbf{H}(s)$.

۱۵ـ۶ صفحه فرکانس مختلط

اکنون روش گرافیکی کلی‌تری را با ترسیم کمیت‌ها برحسب تابعی از s برنامه‌ریزی می‌کنیم. یعنی می‌خواهیم پاسخ را به طور همزمان به صورت تابعی از σ و ω نشان دهیم. چنین نمودار گرافیکی از پاسخ واداشته به صورت تابعی از فرکانس مختلط s، تکنیکی مفید و روشنگر در تحلیل و طراحی مدارها است. پس از تفهیم صفحه فرکانس‌های مختلط یا صفحه s، خواهیم دید که چقدر سریع رفتار یک مدار را از فرکانس‌های خاص در این صفحه به صورت تقریب می‌توان بیان کرد.

روش عکس هم خیلی مفید است: اگر منحنی پاسخ مطلوبی را داشته باشیم (مثلاً پاسخ فرکانس یک فیلتر)، امکان دارد که برحسب قطب‌ها و صفرها در صفحه s تصمیم‌گیری کرده و سپس فیلتر را بسازیم. همچنین صفحه s ابزاری اساسی است که به وسیله آن وجود نوسان‌های نامطلوب ممکن در تقویت‌کننده‌های پسخوردی و سیستم‌های کنترل مورد تحقیق و تفحص قرار می‌گیرد.



شکل ۱۵ـ۲۸ رسم تابع $|Z(\sigma)|$ برحسب فرکانس σ.

پاسخ برحسب σ

اجازه بدهید برای یافتن تابعی برحسب s، ابتدا پاسخی برحسب σ یا ω را درنظربگیریم. مثلاً امپدانس ورودی یک شبکه متشکل از یک مقاومت 3Ω را که با یک القاگر 4H سری است درنظر می‌گیریم. این امپدانس برابر است با:

$$Z(s) = 3 + 4s\,\Omega$$

اگر تفسیر گرافیکی تغییر امپدانس را با رسم σ بخواهیم، یعنی $s = \sigma + j0$ آنگاه

$$Z(\sigma) = 3 + 4\sigma\,\Omega$$

که صفری در $\sigma = -\frac{3}{4}$ و قطبی در بی‌نهایت است. این فرکانس‌های بحرانی و مهم را روی محور σ علامت می‌زنیم. پس از شناسایی مقدار $Z(\sigma)$ در چند فرکانس غیربحرانی (مثلاً در $Z(0) = 3$) ترسیم $|Z(\sigma)|$ در برابر σ طبق شکل ۱۵ـ۲۸ ساده خواهد بود. این نمودار اطلاعاتی را برای ما هنگام اتصال امپدانس به یک تابع تحریک ساده $e^{\sigma t}$ در اختیار می‌گذارد. توجه کنید که در حالت خاص، حالت dc $(\sigma = \omega = 0)$ همان‌طور که انتظار می‌رود امپدانس 3Ω را خواهیم داشت.

پاسخ برحسب ω

برای ترسیم پاسخ به صورت تابعی از فرکانس زاویه ω، بگذارید $s = 0 + j\omega$ باشد:

$$Z(j\omega) = 3 + j4\omega$$

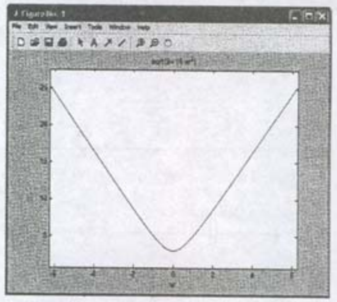
سپس اندازه (مقدار) فاز را به صورت تابعی از ω به‌دست‌آورید:

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \qquad (۱۴)$$

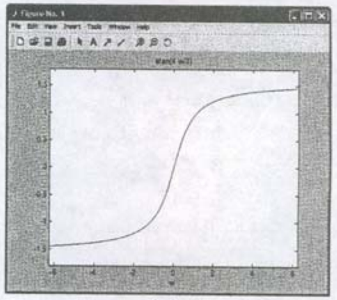
$$\text{ang}\,Z(j\omega) = \tan^{-1}\frac{4\omega}{3} \qquad (۱۵)$$

تابع دامنه یک قطب در بی‌نهایت و یک مینیمم در $\omega = 0$ دارد. به راحتی می‌توان آن را به صورت منحنی $|Z(j\omega)|$ برحسب ω رسم کرد. با افزایش فرکانس مقدار امپدانس هم زیاد می‌شود و این دقیقاً رفتاری است که از یک القاگر انتظار داریم. زاویه فاز معکوس تابع تانژانت است که در $\omega = 0$ برابر صفر و در $\omega = \pm\infty$ برابر $\pm 90°$ می‌شود. این رابطه به راحتی به صورت نمودار زاویه $Z(j\omega)$ در برابر ω قابل ترسیم است. معادلات (۱۴) و (۱۵) در شکل ۱۵ـ۲۹ رسم شده‌اند.

در ترسیم $Z(j\omega)$ برحسب ω، دو نمودار دو بعدی لازم است. هر دو کمیت دامنه و زاویه فاز برحسب ω هستند. برای تحریک نمایی می‌توانیم همه اطلاعات را روی یک گراف دوبعدی رسم کنیم به‌شرطی‌که هر دو مقدار مثبت و منفی $Z(\sigma)$ برحسب σ درنظرگرفته شوند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۵ـ۲۹ (الف) نمودار $|Z(j\omega)|$ برحسب فرکانس. نمودار به کمک فرمان متلب زیر رسم شده است:

```
EDU» ezplot('sqrt(9 + 16 * w ^ 2)')
```

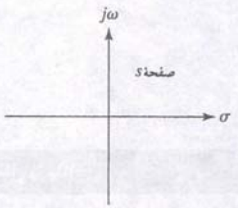
(ب) رسم زاویه $Z(j\omega)$ برحسب فرکانس.

البته معمولاً مقدار $Z(\sigma)$ را رسم می‌کنیم تا مقایسه آن با $Z(j\omega)$ ساده باشد. زاویه فاز $Z(\sigma)$ (فقط 0° و ±180°) چشم‌پوشی شده است. نکته مهم این است که تنها یک متغیر مستقل، σ در تابع نمایی و ω در سینوسی، وجود دارد. اکنون بگذارید ببینیم اگر بخواهیم پاسخی را برحسب s رسم کنید چه امکانات دیگری را در اختیار داریم.

ترسیم در صفحه فرکانس مختلط

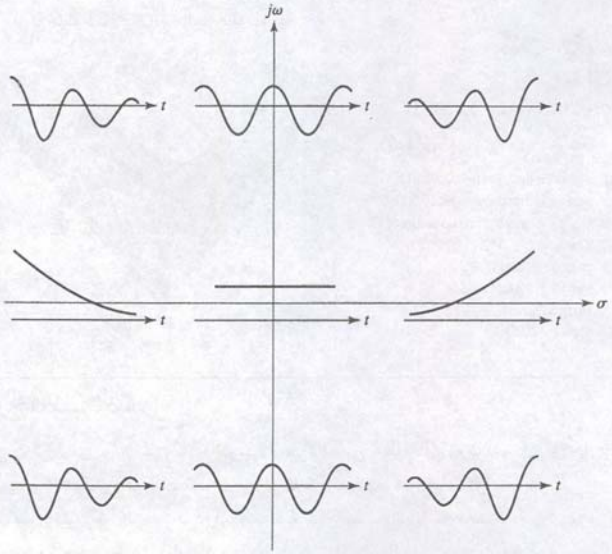
برای شناخت کامل s به دو پارامتر σ و ω نیاز داریم. پاسخ نیز تابع مختلطی است و بنابراین باید زاویه فاز آن برحسب s رسم شود. هر یک از این کمیت‌ها، مثلاً اندازه، تابعی از دو پارامتر σ و ω است و می‌توان آن را در دو بعد و به صورت مجموعه‌ای از منحنی‌ها رسم نمود، مثل اندازه در برابر ω با σ به عنوان پارامتر.

روش بهتر در نمایش مقدار بعضی پاسخ‌های مختلط گرافیکی به‌کارگیری مدل سه بعدی است. هرچند ترسیم این‌گونه گراف‌ها روی کاغذ دوبعدی مشکل است ولی تجسم مدل، آن‌قدر مشکل نیست و بسیاری از آن‌ها را می‌توان در ذهن ساخت، اصلاح کرد و به سرعت پاک نمود. بیایید دو محور σ و $j\omega$، که بر یکدیگر عمودند را در یک سطح افقی تصور کنیم. اکنون این سطح افقی یک سطح مختلط یا سطح s را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۵ـ۳۰). به هر نقطه از این صفحه دقیقاً یک مقدار s تعلق می‌گیرد و به هر مقدار s هم یک نقطه در صفحه مختلط تخصیص می‌یابد.



شکل ۱۵ـ۳۰ صفحه فرکانس مختلط با صفحه s .

چون ما از قبل با نوع تابع حوزه زمان مرتبط با مقدار خاصی از فرکانس مختلط s آشناییم، می‌توانیم به تابع تحریک یا پاسخ واداشته در هر ناحیه از صفحه s تابع خاصی را نسبت دهیم. مثلاً مبدأ یک کمیت dc را نشان می‌دهد. نقاط واقع بر محور σ توابع نمایی را نمایش می‌دهند که در $\sigma < 0$ نمایی میرا می‌شوند و برای $\sigma > 0$ نمایی افزاینده‌اند. توابع سینوسی خالص مربوط به نقاط مثبت و منفی محور $j\omega$ می‌باشند. سمت راست صفحه s یا RHP نقاطی هستند که به بخش حقیقی مثبت فرکانس را توصیف می‌کنند. پس متعلق به کمیت‌هایی از حوزه زمانند که به جز نقاط روی محور σ، توابع سینوسی نمایی افزاینده را شامل می‌شوند. به همین ترتیب سمت چپ صفحه s (LHP) توابع سینوسی نمایی میرا را بیان می‌کنند و مجدداً محور σ مستثنی است. شکل ۱۵ـ۳۱ مطالب فوق را به‌طور خلاصه نشان می‌دهد.



شکل ۱۵ـ۳۱ یک تابع حوزه زمان در ناحیه‌ای از صفحه فرکانس مختلط که به آن متعلق است کشیده شده است.

حال بیایید به دنبال روش مناسبی برای نمایش گرافیکی پاسخ به عنوان تابعی از فرکانس مختلط s بگردیم. مقدار یا اندازه پاسخ را می‌توان با ساخت مدلی به مانند یک **تپه** ساخت که ارتفاع هر نقطه آن از کف متناسب با مقدار پاسخ در ازای آن s است. به بیان دیگر ما محور سومی را به مجموعه اضافه کرده‌ایم که عمود بر هر دو محور σ و $j\omega$ است و از مبدأ می‌گذرد. این محور را با $|Z|$ ، $|Y|$ و $|V_2/V_1|$ یا هر نماد مناسب دیگری نامگذاری می‌کنیم. مقدار پاسخ در ازای هر مقدار s حاصل شده و نمودار منتجه سطحی در بالای صفحه s است.

مثال ۱۱ـ۱۵

ادمیتانس ترکیب سری یک القاگر 1H و مقاومت 3Ω را به فرم تابعی از $j\omega$ و σ رسم کنید.

ادمیتانس دو عنصر سری با رابطه زیر داده می‌شود:

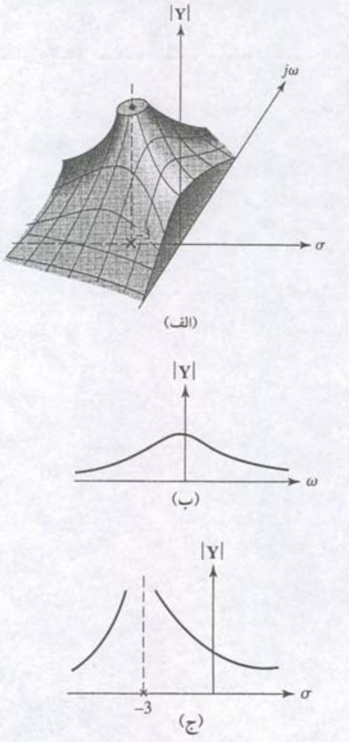
$$\mathbf{Y}(s) = \frac{1}{s + 3}$$

با جایگزینی $s = \sigma + j\omega$ مقدار تابع چنین به‌دست‌می‌آید:

$$|\mathbf{Y}(s)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2 + \omega^2}}$$

هنگامی‌که $s = -3 + j0$ باشد مقدار پاسخ بی‌نهایت است و وقتی s بی‌نهایت باشد، مقدار $\mathbf{Y}(s)$ صفر است. بنابراین مدل روی نقطه $(-3 + j0)$ باید دارای ارتفاع بی‌نهایت باشد و در نقاطی که از مرکز خیلی دوراند باید ارتفاع صفر را داشته باشد. برش از چنین مدلی در شکل ۳۲ـ۱۵ (الف) ملاحظه می‌شود.

پس از برپایی مدل، مشاهده $|\mathbf{Y}|$ به صورت تابعی از ω (با $\sigma = 0$) ساده است به این ترتیب که مدل را با سطحی عمود حاوی محور $j\omega$ برش دهیم. در شکل ۳۲ـ۱۵ (الف) این برش و نیز $|\mathbf{Y}|$ برحسب ω دیده می‌شود. این برش به صورت منحنی در شکل ۳۲ـ۱۵ (ب) هم مشاهده می‌شود. به روشی مشابه یک صفحه عمود حاوی محور σ ما را قادر می‌سازد تا $|\mathbf{Y}|$ را برحسب σ (با $\omega = 0$) طبق شکل ۳۲ـ۱۵ (ج) معین کنیم.

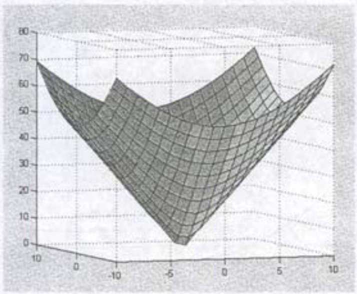


شکل ۳۲ـ۱۵ (الف) برشی از مدل تپه‌ای که در آن سطح فوقانی، $|\mathbf{Y}(s)|$ را برای ترکیب سری القاگر 1H و مقاومت 3Ω نشان می‌دهد. (ب) $|\mathbf{Y}(s)|$ به صورت تابعی از ω. (ج) $|\mathbf{Y}(s)|$ برحسب σ.

تمرین

۱۲ـ۱۵ مقدار امپدانس $\mathbf{Z}(s) = 2 + 5s$ را به صورت تابعی از σ و $j\omega$ رسم نمایید.

جواب: شکل ۳۳ـ۱۵ را ملاحظه نمایید.



شکل ۳۳ـ۱۵ حل مسئله ۱۲ـ۱۵ با کدهای زیر:

```
DU≫ sigma = linspace(−10,10,21);
DU≫ omega = linspace(−10,10,21);
DU≫ [X, Y] = meshgrid(sigma,omega);
DU≫ Z = abs(2 + 5*X + j*5*Y);
DU≫ colormap(gray);
DU≫ s = [−5 3 8];
DU≫ surfl(X,Y,Z,s);
DU≫ view (−20,5)
```

برج قطب ـ صفر

این روش برای توابع نسبتاً ساده خوب کار می‌کند ولی به‌طورکلی روش عملی‌تری مورد نیاز است. بیایید یک بار دیگر صفحه s را روی کف مجسم نموده و ورق لاستیکی بزرگی را روی آن تصور کنیم. حال توجه خود را به همه صفرها و قطب‌های پاسخ معطوف می‌کنیم. در هر صفری پاسخ صفر است و ارتفاع ورق باید صفر باشد و بنابراین ورق را باید با پونز به کف

بچسبانیم. در ازای هر مقدار s متعلق به هر قطب، ممکن‌است یک میله عمودی نازک برای آن متصور شویم اگر صفر در بی‌نهایت باشد باید صفحه لاستیکی را با یک حلقه بزرگ به صفحه s بچسبانیم. اگر قطب در بی‌نهایت باشد باید صفحه را با یک حصار بلند نگه داریم. اگر صفحه لاستیکی به حد کافی بزرگ، بی‌وزن و کاملاً کشسان باشد، پونزها بسیار ریز و میله‌ها بسیار نازک خواهند بود و ارتفاع صفحهٔ لاستیکی از صفحه s دقیقاً با دامنه پاسخ، متناسب خواهد بود.

این توضیحات را می‌توان با پیکره‌ای از صفرها و قطب‌ها که به آن برج یا منظومه قطب ـ صفر می‌گویند تشریح کرد. این آرایش تمام فرکانس‌های بحرانی در حوزه فرکانس، مثل امپدانس $\mathbf{Z}(s)$ را نشان می‌دهد. در شکل ۳۴ـ۱۵ (الف) برج یک امپدانس را می‌بینید. اگر یک مدل الاستیکی را تجسم کنیم که در $s = -2 + j0$ به کف چسبیده و در $s = -1 + j5$ و $s = -1 - j5$ آویز شده باشد، سطحی با یک دره و دو قله خواهیم داشت. بخش متعلق به LHP در شکل ۳۴ـ۱۵ (ب) دیده می‌شود.

اکنون بیایید عبارتی را برای $\mathbf{Z}(s)$ به وجود آوریم که به این برج قطب و صفر منتهی شود. صفر، عامل $(s + 2)$ را در صورت و دو قطب عوامل $(s + 1 - j5)$ و $(s + 1 + j5)$ را در مخرج دارند. به جز k، اکنون فرم $\mathbf{Z}(s)$ را می‌دانیم. یعنی:

$$\mathbf{Z}(s) = k\,\frac{s + 2}{(s + 1 - j5)(s + 1 + j5)}$$

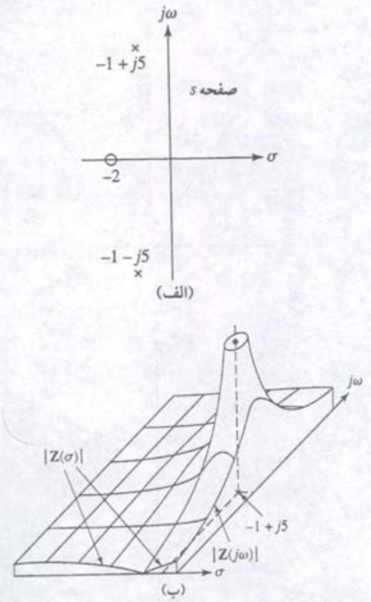
یا

$$\mathbf{Z}(s) = k\,\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \qquad (۱۶)$$

برای تعیین k، ما باید مقداری برای $\mathbf{Z}(s)$ در قبال s، که فرکانس بحرانی نباشد، داشته باشیم. حال اجازه بدهید تا بر اساس واقعیتی مثل $\mathbf{Z}(0) = 1$، k را انتخاب کنیم. از جایگزینی مستقیم در معادله (۱۶)، k برابر 13 به‌دست‌می‌آید. پس:

$$\mathbf{Z}(s) = 13\,\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \qquad (۱۷)$$

می‌توان نمودارهای $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ برحسب σ و $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ برحسب ω را دقیقاً از معادله (۱۷) به‌دست‌آورد ولی فرم عمومی و کلی تابع از برج قطب و صفر و صفحه الاستیک کاملاً مشخص است. بخش‌هایی از این دو منحنی در جوانب مدل در شکل ۳۴ـ۱۵ (ب) ملاحظه می‌شود.



شکل ۳۴ـ۱۵ (الف) برج قطب ـ صفر امپدانس $\mathbf{Z}(s)$. (ب) بخشی از مدل صفحه الاستیک مقدار $\mathbf{Z}(s)$.

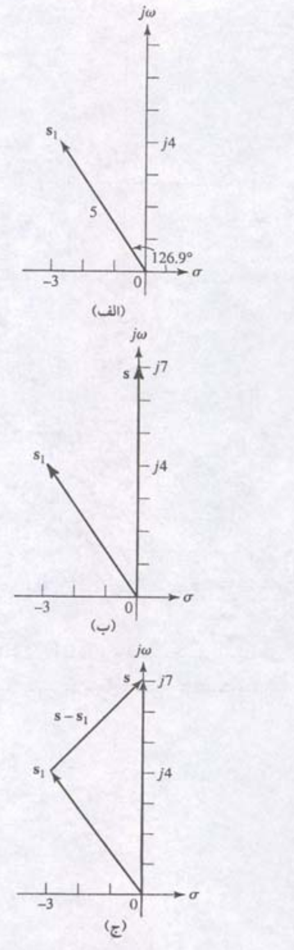
تمرین

۱۳ـ۱۵ ترکیب موازی 0.25mH و 5Ω با ترکیب موازی $40\mu F$ و 5Ω سری است. (الف) $\mathbf{Z}_{in}(s)$ یعنی امپدانس ورودی ترکیب سری را مشخص کنید. (ب) تمام صفرهای $\mathbf{Z}_{in}(s)$ را معین نمایید. (ج) تمام قطب‌های $\mathbf{Z}_{in}(s)$ را تعیین کنید. آرایش قطب ـ صفر را رسم نمایید.

جواب: $5(s^2 + 10000s + 10^8)/(s^2 + 25000s + 10^8)\Omega$ ، $-5 \pm j8.66$ krad/s ، -5 و -20 krad/s.

وابستگی فرکانس اندازه و زاویه فاز

تا کنون با استفاده از صفحه s و مدل ورق الاستیک، اطلاعات کیفی را درباره تغییرات فرکانسی اندازه (دامنه) پاسخ در حوزه زمان یافتیم. با این وجود با کمک برج قطب و صفر می‌توان اطلاعات کمّی را برای دامنه و فاز به‌دست‌آورد. این روش ابزار قدرتمند دیگری را در اختیار ما می‌گذارد.



شکل ۱۵ـ۳۵ (الف) فرکانس مختلط $s_1 = -3 + j4$ با ترسیم یک پیکان از مبدأ به s مشخص می‌شود. (ب) فرکانس $s = j7$ هم با بردار نشان داده شده است. (ج) اختلاف $s - s_1$ با برداری که از s_1 به s کشیده شود نشان داده می‌شود.

شکل قطبی یک عدد مختلط را به صورت پیکانی که از مبدأ صفحه s به فرکانس مختلط موردنظری رسم می‌شود درنظربگیرید. طول پیکان همان اندازه فرکانس مختلط و زاویه‌ای که پیکان با جهت مثبت محور σ می‌سازد هم زاویه فرکانس مختلط می‌باشد. فرکانس $s_1 = -3 + j4 = 5\angle 126.9^\circ$ در شکل ۱۵ـ۳۵ (الف) دیده می‌شود.

تفاوت دو مقدار s را هم باید با پیکان یا برداری در صفحه مختلط نشان داد. اجازه بدهید مقداری مثل $s = j7$ که متناظر با موجی سینوسی است برگزینیم و آن را طبق شکل ۱۵ـ۳۵ (ب) با بردار $s - s_1$ نشان دهیم. تفاضل $s - s_1$ که برداری است از نقطه s_1 به نقطه s نیز در شکل ۱۵ـ۳۵ (ج) ترسیم شده است. دقت کنید که $s_1 + (s - s_1) = s$. از لحاظ عددی $s - s_1 = j7 - (-3 + j4) = 3 + j3 = 4.24\angle 45^\circ$ که با مقدار روی شکل تطابق دارد.

بیایید ببینیم چگونه تعبیر گرافیکی تفاضل $(s - s_1)$ ما را در تعیین پاسخ فرکانس یاری می‌نماید. به ادمیتانس زیر توجه کنید:

$$\mathbf{V}(s) = s + 2$$

این عبارت دارای صفری در $s_2 = -2 + j0$ است. عامل $s + 2$ را هم می‌توان به صورت $s - s_2$ نوشت و با برداری از محل صفر، s_2، به فرکانس s نشان داد. اگر پاسخ سینوسی موردنظر باشد، s باید روی محور $j\omega$ قرار گیرد (شکل ۱۵ـ۳۶ (الف)). اکنون می‌توانیم اندازه $s + 2$ را برحسب تغییرات ω از صفر تا بی‌نهایت تصور کنیم. وقتی s صفر است، بردار، اندازه 2 و زاویه 0° را دارد. بنابراین $\mathbf{Y}(0) = 2$. با افزایش ω، مقدار آن به آهستگی ابتدا شروع به افزایش می‌کند و زاویه فاز هم در ابتدا به طور خطی افزایش یافته و سپس با میل ω به بی‌نهایت مقدار آن به 90° می‌رسد. اندازه و زاویه $\mathbf{Y}(s)$ در شکل ۱۵ـ۳۶ (ب) ملاحظه می‌شود.

اکنون بیایید مثال واقعی‌تری را با ملاحظه تابع حوزه فرکانس که به صورت نسبت دو جمله بیان شده است دنبال کنیم:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{s + 2}{s + 3}$$

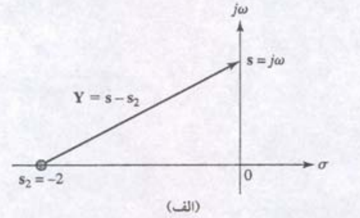
باز هم s را با یک تابع تحریک سینوسی متناظر می‌گیریم و بردارهای $s + 2$ و $s + 3$ را رسم می‌کنیم، یکی را از صفر به فرکانس موردنظر روی محور $j\omega$ و دیگری از قطب به آن نقطه وصل می‌کنیم. دو بردار در شکل ۱۵ـ۳۷ (الف) رسم شده‌اند. نسبت این دو بردار، اندازه‌ای برابر نسبت اندازه‌های دو بردار و زاویه‌ای برابر با تفاضل زوایای فاز بردار صورت و بردار مخرج دارد. با حرکت‌دادن s بر روی محور $j\omega$ و لحاظ نسبت فاصله هر صفر و هر قطب از $s = j\omega$، می‌توان تغییر مقدار $\mathbf{V}(s)$ را برحسب ω پیدا کرد. این نسبت در $\omega = 0$ برابر $\frac{2}{3}$ بوده و با میل ω به بی‌نهایت به سمت 1 میل می‌نماید (شکل ۱۵ـ۳۷ (ب)).

بررسی تفاضل دو زاویه فاز نشان می‌دهد که در $\omega = 0$ زاویه $\mathbf{V}(j\omega)$ برابر 0° می‌باشد. این زاویه ابتدا با افزایش ω بالا می‌رود، چون زاویه بردار $s + 2$ بزرگ‌تر از زاویه $s + 3$ است. سپس با افزایش بیشتر ω کم می‌شود. نهایتاً در فرکانس بی‌نهایت به 0° می‌رسد و در این حالت هر دو بردار دارای زوایای 90° می‌باشند. این نتایج در شکل ۱۵ـ۳۷ (ج) کشیده شده است. هرچند هیچ علامت‌گذاری کمّی روی این منحنی‌ها به چشم نمی‌خورد ولی مقادیر کمّی را به راحتی می‌توان به‌دست‌آورد. مثلاً پاسخ مختلط $s = j4$ از نسبت زیر به‌دست‌می‌آید:

$$\mathbf{V}(j4) = \frac{\sqrt{4+16}\angle \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)}{\sqrt{9+16}\angle \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{20}{25}}\angle\left(\tan^{-1}2 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

$$= 0.894\angle 10.3^\circ$$



شکل ۱۵ـ۳۶ (الف) برداری که ادمیتانس $\mathbf{Y}(s) = s + 2$ را برای $s = j\omega$ نشان می‌دهد.

در طراحی مدارها برای تولید پاسخی مطلوب، رفتار بردارهای ترسیمی از فرکانس‌های بحرانی مربوط به یک نقطه عمومی روی محور $j\omega$، کمک عمده‌ای می‌کند. مثلاً اگر بخواهیم برجستگی پاسخ فاز در شکل ۱۵ـ۳۷ (ج) بزرگ‌تر شود، باید تفاوت زاویه‌های دو بردار را بیشتر نماییم. برای این کار یا باید در شکل ۱۵ـ۳۷ (الف)، صفر را به مبدأ نزدیک‌تر و یا قطب را از مبدأ دور کنیم و یا هر دو کار را انجام دهیم.

ایده طلب کمک از گرافیک در تعیین تغییر اندازه و زاویه با فرکانس برای یک تابع در حوزه فرکانس در فصل ۱۶ کاربرد دارد. در آن‌جا رفتار فرکانسی فیلترهای گزینده فرکانسی یا مدارهای تشدید را بررسی خواهیم کرد. این مفاهیم در درک سریع و روشن رفتار شبکه‌های الکتریکی و دیگر سیستم‌های مهندسی نقشی اساسی دارد. روال در زیر خلاصه شده است.

۱. برج قطب و صفر تابع در حوزه فرکانس موردنظر و روی صفحه s رسم کنید و یک نقطه تست که قرار است تابع در آن محاسبه شود را هم مشخص نمایید.

۲. از همه قطب‌ها و صفرها، برداری به نقطه فوق رسم کنید.

۳. طول این بردارها و زاویه‌ای که با محور حقیقی می‌سازند را به‌دست‌آورید.

۴. دامنه تابع حوزه فرکانس از تقسیم حاصلضرب طول بردارهای مربوط به صفرها، بر حاصل‌ضرب طول بردارهای مربوط به قطب‌ها به‌دست‌می‌آید. ممکن‌است ضریبی هم درنظرگرفته شود زیرا برج‌های $\mathbf{F}(s)$ و $k\mathbf{F}(s)$ یکسانند.

۵. تفاضل مجموع زوایای بردارهای مربوط به صفرها و مجموع زوایای بردارهای مربوط به قطب‌ها را به‌دست‌آورید. این تفاضل زاویه تابع حوزه فرکانس را در نقطه مورد بررسی نشان می‌دهد. این زاویه به ضریب حقیقی تابع k بستگی ندارد.

تمرین

۱۵ـ۱۴ سه برج قطب ـ صفر در شکل ۱۵ـ۳۸ نشان داده شده‌اند. هر یک از آن‌ها به یک بهره ولتاژ G مربوط است. برای هر کدام از آرایش‌ها، بهره را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s بیان‌کنید.

۱۵ـ۱۵ آرایش قطب ـ صفر برای ادمیتانس $\mathbf{Y}(s)$ دارای یک قطب در $s = -10 + j0\,s^{-1}$ و یک صفر در $s = z_1 + j0$ است که $z_1 < 0$ می‌باشد. فرض کنید $\mathbf{Y}(0) = 0.1s$ باشد. z_1 را طوری معین کنید که (الف) $\text{ang}\mathbf{Y}(j5) = 20^\circ$ و (ب) $|\mathbf{Y}(j5)| = 0.2s$ باشد.

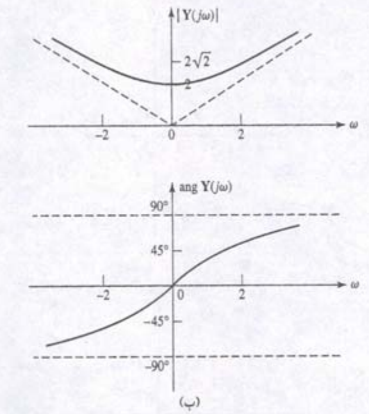
جواب ۱۵ـ۱۴: $(15s^2 + 45s) / (s^2 + 6s + 8)$، $(2s^3 + 22s^2 + 88s + 120)/(s^2 + 4s + 8)$ و $(3s^2 + 27)/(s^2 + 2s)$.

جواب ۱۵ـ۱۵: -4.73 Np/s، -2.50 Np/s.

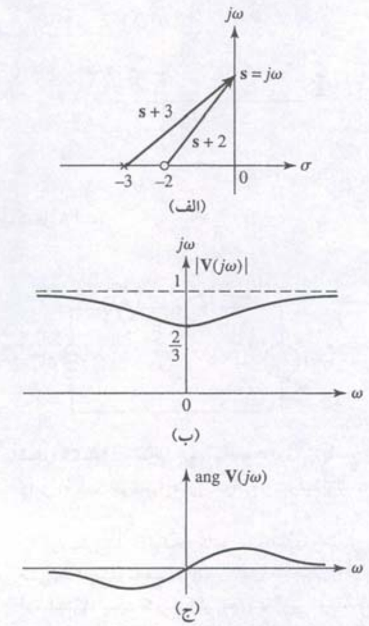
۱۵ـ۷ پاسخ طبیعی و صفحه s

در آغاز این فصل، نشان دادیم که چگونه می‌توان در حوزه فرکانس از طریق تبدیل لاپلاس، گستره وسیعی از مدارهای متغیر با زمان را با حذف معادلات مشتق ـ انتگرالی بررسی نموده و به جای آن معادلات جبری را به کار برد. اطلاعات زیادی در نمودار قطب و صفر یک پاسخ واداشته در صفحه s نهفته است. در این بخش خواهیم دید که چگونه یک پاسخ جریان کامل، پاسخ طبیعی و واداشته که به وسیله یک تابع تحریک دلخواه تولید می‌شود را می‌توان به سرعت از آرایش قطب ـ صفر پاسخ جریان واداشته و مقادیر اولیه نوشت. روش به‌طور مشابه در یافتن پاسخ ولتاژ کامل تولید شده با یک منبع دلخواه نیز معتبر است.

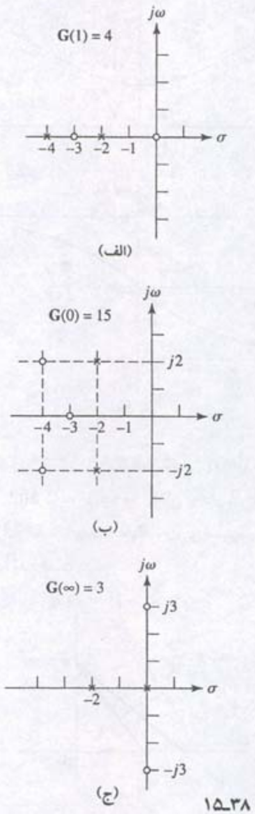
بگذارید روش را با ملاحظه ساده‌ترین مثال، یعنی مدار RL سری شکل ۱۵ـ۳۹ معرفی کنیم. منبع ولتاژ کلی $v_s(t)$ پس از بسته‌شدن کلیدی در $t = 0$، جریان $i(t)$ را تولید می‌کند. پاسخ کامل $i(t)$ از ترکیب پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته در $t > 0$ به‌دست‌می‌آید که $i(t) = i_n(t) + i_f(t)$ می‌باشد.



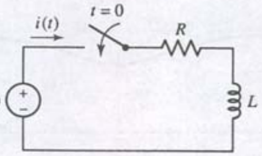
شکل ۱۵ـ۳۶ (ب) منحنی $|\mathbf{Y}(j\omega)|$ و $\text{ang}\ \mathbf{Y}(j\omega)$ که با توجه به رفتار بردار $s + 2$ و به ازای sهای مختلف روی محور $j\omega$ به‌دست‌آمده است.



شکل ۱۵ـ۳۷ (الف) بردارهای ترسیمی از دو فرکانس بحرانی در پاسخ ولتاژ $\mathbf{V}(s) = (s + 2)/(s + 3)$. (ب و ج) منحنی‌های اندازه و فاز $\mathbf{V}(j\omega)$ که از خارج قسمت دو بردار بخش (الف) به‌دست‌آمده‌اند.



شکل ۱۵ـ۳۸



شکل ۱۵ـ۳۹ مثالی برای به‌دست‌آوردن پاسخ کامل به کمک فرکانس‌های بحرانی و شرایط‌اولیه.

راستی کار در یک فرکانس مختلط چه معنی می‌دهد؟ چگونه می‌توان فرکانس مختلطی را در آزمایشگاه ایجاد کرد. در این‌جا بهتر است ببینیم چگونه آن را ابداع کردیم؟ در واقع این تعریف مربوط است به توصیف یک تابع سینوسی که در یک تابع نمایی ضرب شده است. این سیگنال‌ها به راحتی با تجهیزات آزمایشگاهی تولید می‌شوند. بنابراین کافی است که مقدار σ و ω را تنظیم کنیم تا در $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ کار کنیم.

پاسخ واداشته را با کار در حوزه زمان پیدا می‌کنیم و البته فرض می‌شود که $v_s(t)$ فرمی اساسی داشته و قابل انتقال به حوزه فرکانس باشد. در غیر این صورت مثلاً اگر $v_s(t) = 1/(1 + t^2)$ باشد، بهتر است به سراغ معادلات دیفرانسیل برویم. برای مدار شکل ۱۵ـ۳۹ داریم:

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{R + \mathbf{s}L}$$

یا

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{1}{L}\,\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{s} + R/L} \qquad (۱۸)$$

اکنون بیایید پاسخ طبیعی را درنظربگیریم. با توجه به تجربه قبلی می‌دانیم که پاسخ به فرم نمایی میرا با ثابت زمانی L/R است ولی وانمود می‌کنیم اولین باری است که با آن مواجه می‌شویم. بنا به تعریف پاسخ طبیعی مستقل از تابع تحریک است. تابع تحریک فقط در اندازه پاسخ طبیعی نقش دارد. برای این‌که فرم صحیح را بیابیم، همه منابع مستقل را می‌کُشیم. در این‌جا $v_s(t)$ را اتصال کوتاه می‌کنیم. سپس سعی خواهیم کرد پاسخ طبیعی را به عنوان حالت حدی از پاسخ واداشته بنگاریم. به سراغ عبارت حوزه فرکانس معادله (۱۸) می‌رویم و $\mathbf{V}_s = 0$ را در آن قرار می‌دهیم. در بدو امر چنین به‌نظر می‌رسد که $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ هم باید صفر شود ولی اگر در یک فرکانس مختلطی کار می‌کنیم که قطب ساده $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ است، لزوماً چنین نیست. یعنی صورت و مخرج هر دو ممکن‌است صفر باشند به نحوی که ضرورتاً $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ صفر نباشد.

بیایید این ایده جدید را از زاویه دیگری بنگریم. ما توجه خود را به نسبت پاسخ واداشته موردنظر به نیروی محرکه معطوف می‌کنیم. این نسبت را با $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ نشان می‌دهیم و آن را تابع تبدیل یا تابع انتقال می‌نامیم. داریم:

$$\frac{\mathbf{I}_f(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1}{L(\mathbf{s} + R/L)}$$

در این مثال تابع تبدیل، امپدانسی است که در مقابل $\mathbf{V}_s$ قرار دارد. ما با تنظیم $\mathbf{V}_s = 0$ به دنبال پاسخ طبیعی (بی‌منبع) هستیم. با این وجود چون $\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_s\mathbf{H}(\mathbf{s})$ است، اگر $\mathbf{V}_s = 0$ باشد، مقدار جریان غیرصفر به شرطی حاصل می‌شود که در قطب $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ کار کنیم. بنابراین تابع تبدیل از اهمیت خاصی برخوردار است.

به مدار RL سری خود بازمی‌گردیم. می‌بینیم که قطب تابع تبدیل در $\mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0$ واقع است (شکل ۱۵ـ۴۰). اگر ماکار را در این فرکانس مختلط انجام دهیم، تنها جریان محدودی که می‌تواند حاصل شود باید ثابتی در حوزه $\mathbf{s}$ باشد. پس پاسخ طبیعی چنین خواهد بود.

$$\mathbf{I}(\mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0) = A$$

که A ثابت نامشخصی است. اکنون مایلیم این پاسخ را به حوزه زمان بازگردانیم. برای این کار عکس تبدیل لاپلاس را به کارمی‌بریم. معهذا قبلاً مقداری را برای $\mathbf{s}$ مشخص کرده‌ایم، و چنین کاری درست نیست. در عوض به بخش حقیقی تابع کلی e^{st} نگاه می‌کنیم، به‌طوری‌که

$$i_n(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{st}\} = \mathrm{Re}\{Ae^{-Rt/L}\}$$

در این حالت داریم:

$$i_n(t) = Ae^{-Rt/L}$$

آن‌گاه پاسخ کل برابر است با:

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + i_f(t)$$

به محض مشخص‌شدن مقادیر اولیه برای این مدار، A معین می‌گردد. پاسخ واداشته $i_f(t)$ با یافتن تبدیل لاپلاس معکوس $\mathbf{I}_f(\mathbf{s})$ به دست می‌آید.

تصویر کلی‌تر

شکل‌های ۱۵ـ۴۱ (الف) و (ب) اتصال یک منبع به شبکه بدون منبع مستقل را نشان می‌دهد. پاسخ موردنظر که ممکن‌است جریانی مثل $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ یا ولتاژی چون $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ باشد، با تابع تبدیلی بیان می‌شود که همه فرکانس‌های بحرانی را نمایش دهد. دقیق‌تر بگوییم ما پاسخ $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ را در شکل ۱۵ـ۴۱ (الف) برمی‌گزینیم:

$$\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = k\,\frac{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_1)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_3)\ldots}{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_2)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_4)\ldots} \qquad (۱۹)$$

قطب‌های $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ در $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_4, \ldots$ هستند و بنابراین ولتاژ معین $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ در هر یک از این فرکانس‌ها باید فرم عملیاتی ممکنی برای پاسخ طبیعی باشد. بنابراین منبع ولتاژ صفر ولتی را به پایانه‌های ورودی اعمال می‌کنیم (که همان اتصال کوتاه باشد) بنابراین پاسخ طبیعی به هنگام اتصال کوتاه‌شده پایانه‌های ورودی باید فرم زیر را داشته باشد:

$$v_{2n}(t) = \mathbf{A}_2e^{s_2t} + \mathbf{A}_4e^{s_4t} + \ldots$$

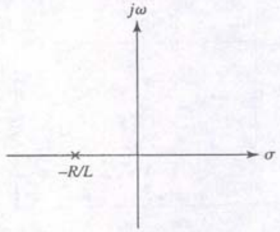
که هر $\mathbf{A}$ باید برحسب مقادیر اولیه محاسبه شود (شامل هر منبع ولتاژ اعمال‌شده به پایانه‌های ورودی).

برای یافتن فرم پاسخ طبیعی $i_{1n}(t)$ در شکل ۱۵ـ۴۱ (الف)، باید قطب‌های تابع تبدیل $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$ را به‌دست‌آوریم. توابع تبدیل اعمال‌شده به آن‌چه در شکل ۱۵ـ۴۱ (ب) دیده می‌شود $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$ و $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$ می‌باشند و آن‌گاه قطب‌های آن‌ها پاسخ‌های طبیعی $i_{1n}(t)$ و $v_{2n}(t)$ را به ترتیب معین می‌کنند.

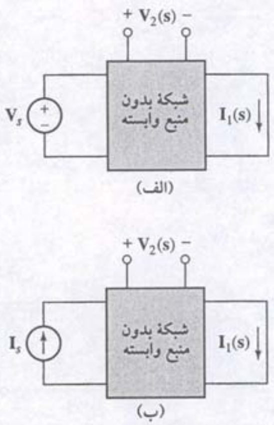
اگر پاسخ طبیعی برای شبکه بی‌منبع مستقل موردنظر باشد، آن‌گاه منبع $\mathbf{I}_s$ یا $\mathbf{V}_s$ در هر نقطه مناسبی می‌تواند وارد شود، تنها محدودیت این کار این‌است‌که با کشتن آن منبع، شبکه اصلی باید به‌دست‌آید. سپس تابع تبدیل و قطب‌های آن را به‌دست‌می‌آوریم و فرکانس‌های طبیعی را مشخص می‌کنیم. دقت کنید که منبع در هر جا که باشد باید فرکانس‌های یکسانی به‌دست‌آید. اگر شبکه منبع داشته باشد می‌توان آن را کشت و در جای مناسب‌تری از مدار منبعی قرار داد.

حالت خاص

قبل از پرداختن به چند مثال، لازم است با حالت خاصی که ممکن‌است پیش آید آشنا شویم. این حالت زمانی رخ می‌دهد که شبکه شکل ۱۵ـ۴۱ (الف) یا (ب) حاوی دو یا چند بخش جدا از هم باشد. مثلاً ممکن‌است ترکیب موازی سه شبکه را داشته باشیم: R_1 سری با C، R_2 سری با L و یک اتصال کوتاه. واضح است که منبع ولتاژ سری با R_1 و C نمی‌تواند جریانی را در R_2 و L تولید نماید. یعنی تابع تبدیل صفر است. مثلاً برای یافتن فرم پاسخ طبیعی ولتاژ القاگر، منبع ولتاژ باید در شبکه R_2L نصب شود. این حالت خاص را می‌توان با بررسی شبکه و قبل از قراردادن در آن تشخیص داد. اگر این کار را نکنیم تابع تبدیل صفر خواهد شد. اگر $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 0$ باشد، هیچ اطلاعاتی درباره فرکانس‌های پاسخ طبیعی به‌دست‌نمی‌آید و باید محل مناسب‌تری برای منبع به‌دست‌آورد.



شکل ۱۵ـ۴۰ حذف صفر و قطب تابع تبدیل $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ در قطب $\mathbf{s} = -\frac{R}{L}$.



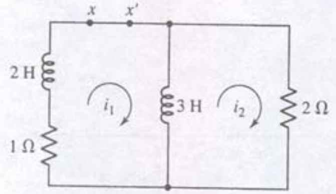
شکل ۱۵ـ۴۱ قطب‌های پاسخ $I_1(s)$ یا $V_2(s)$ ناشی از یک (الف) منبع ولتاژ V_s و (ب) منبع جریان I_s. قطب‌ها تعیین‌کننده پاسخ طبیعی $i_{1n}(t)$ یا $v_{2n}(t)$ می‌باشند و هنگامی رخ می‌دهد که V_s با یک اتصال کوتاه، یا I_s با مدار باز و یا انرژی اولیه موجود جایگزین گردد.

مثال ۱۵ـ۱۲

برای مدار شکل ۱۵ـ۴۲، عبارتی برای i_1 و i_2 در $t > 0$ معین کنید. مقادیر اولیه $i_1(0) = i_2(0) = 11$ می‌باشند.

اجازه بدهید تا منبع ولتاژ $\mathbf{V}_s$ را بین x و x′ قرار دهیم و تابع تبدیل $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$ را به‌دست‌آوریم. این تابع تبدیل ادمیتانس دیده شده به وسیله منبع ولتاژ نیز هست. داریم:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{2\mathbf{s} + 1 + 6\mathbf{s}/(3\mathbf{s} + 2)} = \frac{(3\mathbf{s} + 2)\mathbf{V}_s}{6\mathbf{s}^2 + 13\mathbf{s} + 2}$$



شکل ۱۵-۴۲ مداری که در آن پاسخ طبیعی i_1 و i_2 مورد تقاضا هستند.

یا

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_s} = \frac{\frac{1}{2}(s+\frac{2}{3})}{(s+2)(s+\frac{1}{6})}$$

با تجربه اخیر می‌توان پیش‌بینی کرد که i_1 باید فرم زیر را داشته باشد:

$$i_1(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t/6}$$

حل با استفاده از مقادیر اولیه برای محاسبه A و B کامل می‌گردد. چون به $i_1(0) = 11$ آمپر داده شده پس

$$11 = A + B$$

معادله اضافی لازم با نوشتن معادله KVL حول مدار حاصل می‌گردد:

$$1i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0$$

و با حل مشتق داریم:

$$\frac{di_1}{dt}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}[2i_2(0) + 1i_1(0)] = -\frac{22\;11}{2} + = -2A - \frac{1}{6}B$$

بنابراین $A = 8$ و $B = 3$ بوده و پاسخ طبیعی موردنظر چنین است:

$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6} \quad A$$

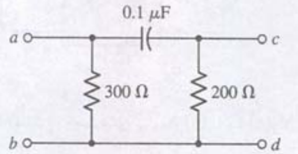
فرکانس‌های طبیعی که i_2 را تشکیل می‌دهند متعلق به i_1 هم هستند. برای محاسبه ثابت‌های اختیاری روش مشابهی به کار می‌رود و داریم:

$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6} \quad A$$

تمرین

۱۵-۱۶ اگر منبع جریان $i_1(t) = u(t)$ A را به دو سر a و b در شکل ۱۵-۴۳ وصل کنیم و جهت جریان به سمت a باشد، $H(s) = V_{cd}/I_1$ را پیدا کنید و پاسخ طبیعی موجود در $v_{cd}(t)$ را به‌دست‌آورید.

جواب: $120s/(s + 20,000)\Omega$ و $-20,000s^{-1}$.



شکل ۱۵-۴۳

روشی را که برای محاسبه ضرایب دامنه پاسخ طبیعی دنبال می‌کنیم مفصل است، مگر این‌که مقادیر اولیه پاسخ موردنظر به وضوح معلوم باشند. با این وجود، ما نباید سرعت و سادگی در تهیه پاسخ طبیعی فراموش کنیم.

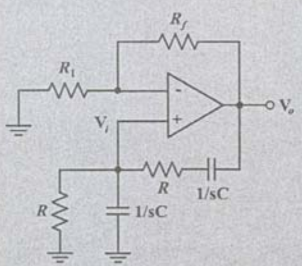
کاربرد عملی

طراحی مدارهای نوسان‌ساز

شکل ۱۵-۴۴

در چند نقطه از این کتاب ما رفتار انواع مدارها را در واکنش به محرک‌های سینوسی بررسی کردیم. با این وجود تولید موج سینوسی خود عنوانی جالب است. مثلاً ایجاد امواج سینوسی بزرگ به کمک آهنربا و سیم‌پیچ‌ها کاری سرراست است ولی چنین روشی برای امواج کوچک‌تر چندان ساده نیست. برای کاربردهای جریان پایین در چند آمپر یا کمتر، روشی بهتر استفاده از اسیلاتور است که به آن **پسخورد مثبت** مدار تقویت‌کننده هم می‌گویند. مدارهای اسیلاتور بخش عمده‌ای از تولیدات مصرفی مانند گیرنده ماهواره‌ای استقرار در فضا (GPS) شکل ۱۵-۴۴ است.

یک مدار سرراست ولی مفید اسیلاتور پل-وین در شکل ۱۵-۴۵ است.



شکل ۱۵-۴۵ مدار نوسان‌ساز پل‌وین.

مدار همان تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر است که در آن R_1 بین ورودی وارونگر و زمین وصل شده است. همچنین مقاومت R_f بین خروجی، پایه وارونگر قرار گرفته است. بنابراین R_f آنچه را که مسیر **پسخورد منفی** نامیده می‌شود ایجاد می‌نماید، زیرا خروجی تقویت‌کننده را به ورودی وارونگر متصل می‌سازد. پس هر افزایش ΔV_o در خروجی منجر به کاهش ورودی خواهد شد و این به نوبه خود خروجی کوچک‌تری را سبب می‌شود. این فرآیند پایداری ولتاژ خروجی V_o را افزایش می‌دهد. بهره تقویت‌کننده که به صورت نسبت V_o به V_i تعریف می‌شود با نسبت اندازه‌های R_1 و R_f تعیین می‌گردد.

حلقه پسخورد مثبت که متشکل از ترکیب دو عنصر مقاومت - خازن است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_p = R \parallel (1/sC) \text{ و } Z_s = R + \frac{1}{sC}$$

انتخاب R و C به ما اجازه طراحی نوسان‌سازی با فرکانس خاصی را می‌دهد (خازن‌های درونی تقویت‌کننده خود حداکثر فرکانس را محدود می‌کنند). برای این‌که رابطه‌ای بین R و C و فرکانس نوسان بیابیم، به جست‌وجوی عبارتی برای بهره تقویت‌کننده، یعنی V_o/V_i می‌گردیم.

دو قاعده تقویت‌کننده در فصل ۶ را به خاطر می‌آورید. با بررسی مدار شکل ۱۵-۴۵ ملاحظه می‌کنید که Z_p و Z_s تقسیم‌کننده ولتاژی را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$V_i = V_o \frac{Z_p}{Z_p + Z_s} \qquad (۲۰)$$

با ساده‌سازی و جابگزینی $Z_p = R \parallel (1/sC) = R/(1 + sRC)$ و $Z_s = R + 1/sC = (1 + sRC)/sC$ داریم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{\frac{R}{1+sRC}}{\frac{1+sRC}{sC} + \frac{R}{1+sRC}} = \frac{sRC}{1 + 3sRC + s^2R^2C^2} \qquad (۲۱)$$

چون مایل به دانستن کار حالت ماندگار تقویت‌کننده هستیم، s را با $j\omega$ جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2R^2C^2} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2R^2C^2 + 3j\omega RC} \qquad (۲۲)$$

عبارت فوق برای بهره فقط وقتی $\omega = 1/RC$ باشد حقیقی است. پس با انتخاب R و C می‌توان تقویت‌کننده‌ای با فرکانس خاص $f = \omega/2\pi = 1/2\pi RC$ طراحی کرد.

به‌عنوان‌مثال بیایید یک نوسان‌ساز پل‌وین برای تولید یک موج سینوسی با فرکانس 20 Hz بسازیم که در محدوده فرکانس‌های پایین صوتی کار می‌کند. می‌خواهیم فرکانس $\omega = 2\pi f = (6.28)(20) = 125.6$ rad/s را داشته باشیم. با تعیین مقدار R، مقدار C مشخص می‌گردد و برعکس. با فرض داشتن خازن $1\mu F$ مقاومت لازم $R = 7962\Omega$ خواهد بود. چون مقدار مقاومت فوق استاندارد نیست، باید چند مقاومت را با هم سری کنیم تا آن را به دست آوریم. با این وجود با مراجعه به شکل ۱۵-۴۵ و آماده‌کردن مدار شبیه‌سازی با PSpice ملاحظه می‌شود که R_f و R_1 هم معلوم نیستند.

هرچند معادله (۲۰) رابطه صحیح بین V_o و V_i را معلوم می‌کند، معادله دیگری برای ارتباط این دو می‌نویسیم:

$$0 = \frac{V_i}{R_1} + \frac{V_i - V_o}{R_f}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

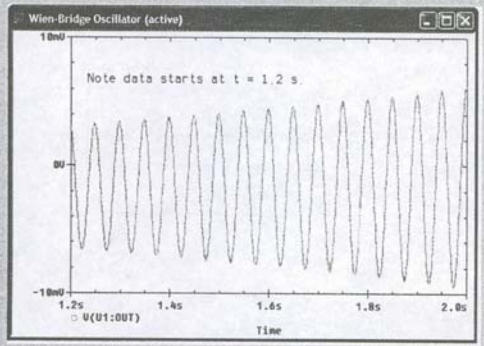
$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \qquad (۲۳)$$

با جایگزینی $\omega = 1/RC$ در معادله (۲۲) داریم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{1}{3}$$

بنابراین کافی است که R_1 و R_f را طوری انتخاب کنیم که $R_f/R_1 = 2$ باشد. متأسفانه اگر پاسخ گذرا را از تحلیل PSpice ملاحظه کنیم، انتخاب $R_1 = 1k\Omega$ و $R_f = 2k\Omega$ خروجی مناسبی نمی‌دهد. برای این‌که مطمئن شویم سیستم ناپایدار است (شرط لازم برای آغاز به نوسان) لازم است نسبت R_f/R_1 را کمی بیش از 2 انتخاب نماییم. خروجی شبیه‌سازی شده طرح نهایی $(R_1 = 1k\Omega, R_f = 2.2k\Omega, C = 1\mu F, R = 7962\Omega)$ در شکل ۱۵-۴۶ ملاحظه می‌گردد. توجه کنید که دامنه موج سینوسی روی نمودار رو به افزایش است: در عمل عناصر غیرخطی برای تثبیت اندازه ولتاژ مدار لازمند.

شکل ۱۵-۴۷ با فرض $H(s) = V_{out}/V_{in}$ به دنبال شبکه‌ای با H(s) مشخص‌شده هستیم.



شکل ۱۵-۴۶ خروجی شبیه‌سازی شده نوسان‌ساز.

۱۵-۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها $H(s) = V_{out}/V_{in}$

بسیاری از مباحث این فصل به قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل مربوط می‌شد. ما آن‌ها را در صفحه فرکانس مختلط مستقر کردیم، آن‌ها را برای بیان توابع تبدیل به صورت مضاربی از چندجمله‌ای‌های s بیان کردیم، پاسخ‌های واداشته را از آن‌ها محاسبه نمودیم، و در بخش قبل هم قطب‌ها را برای تشکیل پاسخ طبیعی به کاربردیم.

اکنون بیایید ببینیم چگونه می‌توان شبکه‌ای ساخت که تابع تبدیل دلخواهی داشته باشد. در واقع ما بخش کوچکی از یک مسئله بزرگ را بررسی کرده و با تابع تبدیل $H(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$ طبق شکل ۱۵-۴۷ کار خواهیم کرد. به خاطر سادگی H(s) را به فرکانس‌های بحرانی روی محور منفی σ محدود خواهیم کرد (از جمله مبدأ). بنابراین توابع تبدیلی مانند موارد زیر را ملاحظه می‌کنیم:

$$H_1(s) = \frac{10(s+2)}{s+5}$$

یا

$$H_2(s) = \frac{-5s}{(s+8)^2}$$

یا

$$H_3(s) = 0.1s(s+2)$$

بگذارید با تعریف بهره ولتاژ شبکه شکل ۱۵-۴۸ که حاوی یک op amp ایده‌آل است آغا
کنیم. ولتاژ بین دو پایانه ورودی op amp اصولاً صفر است و امپدانس ورودی آن بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین می‌توان مجموع جریان‌های وارده به ورودی وارونگر را صفر تصور کرد:

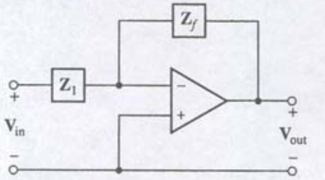
$$\frac{V_{in}}{Z_1} + \frac{V_{out}}{Z_f} = 0$$

یا

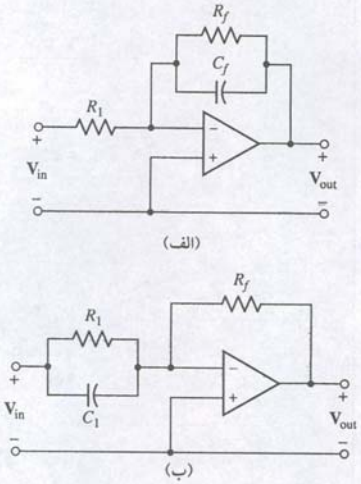
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1}$$

اگر Z_f و Z_1 هر دو مقاومت باشند، مدار به صورت یک تقویت‌کننده معکوس‌گر یا احتمالا **تضعیف‌کننده** عمل می‌کند (اگر نسبت کمتر از واحد باشد). معهذا توجه ما به حالاتی است ک در آن یکی از امپدانس‌ها مقاومت و دیگری یک شبکه RC باشد.

در شکل ۱۵-۴۹ (الف)، اجازه بدهید $Z_1 = R_1$ و Z_f ترکیب موازی R_f و C_f باشد، بنابراین:



شکل ۱۵-۴۸ برای یک op amp ایده‌آل $H(s) = V_{out}/V_{in} = -Z_f/Z_1$



شکل ۱۵-۴۹ (الف) تابع تبدیل $H(s) = V_{out}/V_{in}$ قطبی در $s = -1/R_1C_1$. (ب) در این‌جا صفری در $s = -1/f_1C_1$ داریم.

$$Z_f = \frac{R_f/sC_f}{R_f + (1/sC_f)} = \frac{R_f}{1 + sC_fR_f} = \frac{1/C_f}{s + (1/R_fC_f)}$$

و

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -\frac{1/R_1C_f}{s + (1/R_fC_f)}$$

تابع تبدیل فوق یک فرکانس معین بحرانی، یعنی قطبی در $s = -1/R_fC_f$ دارد.

به شکل ۱۵-۴۹ (ب) می‌رویم. در این‌جا اجازه بدهید Z_f یک مقاومت و Z_1 ترکیب موازی RC باشد:

$$Z_1 = \frac{1/C_1}{s + (1/R_1C_1)}$$

و

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -R_fC_1\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)$$

تنها فرکانس بحرانی، صفری واقع در $s = -1/R_1C_1$ است.

برای تقویت‌کننده ایده‌آل، خروجی یا امپدانس تونن برابر صفر است و بنابراین V_{out} و V_{out}/V_{in} توابعی از هیچ باری چون Z_L، در دو سر پایانه‌های خروجی نیستند. این مطلب در مورد ورودی تقویت‌کننده دیگری هم که به آن وصل شود صحت دارد و بنابراین ممکن‌است مدارهایی را که قطب‌ها و صفرهایی مشخص دارند به‌طور متوالی به هم وصل کنیم و در آن خروجی هر op amp به ورودی op amp دیگر مستقیماً متصل گردد و به این ترتیب تابع تبدیل دلخواهی را تولید نماییم.

مثال ۱۵-۱۳

مداری طراحی کنید که تابع تبدیل آن $H(s) = V_{out}/V_{in} = 10(s+2)/(s+5)$ باشد.

قطب واقع در $s = -5$ را می‌توان از شبکه‌ای به صورت شکل ۱۵-۴۹ (الف) به‌دست‌آورد. اگر این شبکه را A بنامیم داریم، $1/R_{fA}C_{fA} = 5$. به طور دلخواه $R_{fA} = 100k\Omega$ را برمی‌گزینیم. بنابراین $C_{fA} = 2\mu F$ می‌شود. برای این بخش از مدار:

$$H_A(s) = -\frac{1/R_{1A}C_{fA}}{s + (1/R_{fA}C_{fA})} = -\frac{5 \times 10^5/R_{1A}}{s+5}$$

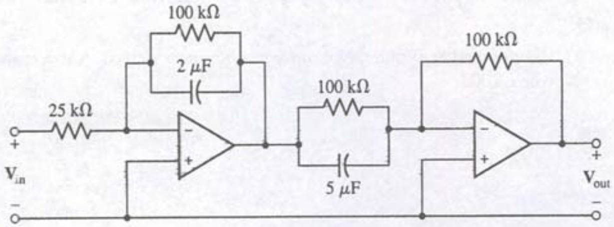
سپس صفری را در $s = -2$ درنظرمی‌گیریم. از شکل ۱۵-۴۹ (ب)، $1/R_{1B}C_{1B} = 2$ و با $R_{1B} = 100k\Omega$، داریم $C_{1B} = 5\mu F$. پس

$$H_B(s) = -R_{fB}C_{1B}\left(s + \frac{1}{R_{1B}C_{1B}}\right) = -5 \times 10^{-6}R_{fB}(s+2)$$

و

$$H(s) = H_A(s)H_B(s) = 2.5\,\frac{R_{fB}}{R_{1A}}\,\frac{s+2}{s+5}$$

ما طراحی را با انتخاب $R_{fB} = 100k\Omega$ و $R_{1A} = 25k\Omega$ کامل می‌کنیم. نتیجه در شکل ۱۵-۵۰ دیده می‌شود. خازن‌ها در این شکل نسبتاً بزرگ‌تر ولی دلیل آن فرکانس‌های پایین انتخابی برای قطب و صفر H(s) است. اگر H(s) به $\frac{10(s+2000)}{(s+5000)}$ کاهش یابد، می‌توانیم مقادیر 2 و 5nF را به کاربربریم.



شکل ۱۵-۵۰ این شبکه حاوی دو op amp ایده‌آل است و تابع تبدیل ولتاژ $H(s) = V_{out}/V_{in} = 10(s+2)/(s+5)$

تمرین

۱۵-۱۷ مقادیر مناسبی برای Z_1 و Z_2 در هر سه طبقه متوالی تقویت‌کننده معین کنید تا تابع تبدیل $H(s) = -20s^2/(s + 1000)$ ایجاد شود.

جواب: $\infty \parallel 1\mu F$ ،$1\ M\Omega$ ،$\infty \parallel 1\mu F$ ،$1\ M\Omega$ ،$10nF \parallel 100k\Omega$ و $.5\ M\Omega$

۱۵-۹ خلاصه فصل و مرور

- مقاومت‌ها در حوزه فرکانس با امپدانسی به همان مقدار نشان داده می‌شوند.
- القاگرها در حوزه فرکانس با امپدانس sL نشان داده می‌شوند. اگر جریان اولیه غیرصفر باشد، آنگاه امپدانس باید با منبع ولتاژ $-Li(0^-)$ به‌طور سری و یا با منبع جریان $i(0^-)/s$ به‌طور موازی وصل گردد.
- خازن‌ها در حوزه فرکانس با امپدانس با $1/sC$ نمایش داده می‌شوند. اگر ولتاژ اولیه غیرصفر باشد، آنگاه امپدانس باید با منبع ولتاژ $v(0^-)/s$ سری و یا با منبع جریان $Cv(0^-)$ موازی باشد.
- تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s منجر به معادلات همزمانی برحسب چندجمله‌ای‌های s می‌گردد. خصوصاً متلب ابزار خوبی برای حل چنین سیستم‌هایی از معادلات است.
- تجمیع و تبدیل منبع و قضایای تونن و نورتن همگی در حوزه s هم اعمال می‌شوند.
- تابع تبدیل مدار $H(s)$ به صورت نسبت خروجی حوزه زمان به ورودی حوزه زمان است. هر یک از کمیت‌ها می‌توانند ولتاژ یا جریان باشند.
- صفرهای $H(s)$ مقادیری هستند که به ازای آن‌ها $H(s)$ صفر می‌شود. قطب‌های $H(s)$ مقادیری هستند که به ازای آن‌ها $H(s)$ بی‌نهایت می‌شود.
- کانولوشن مفاهیم ریاضی و گرافیکی تعیین خروجی یک مدار را از پاسخ ضربه $h(t)$ فراهم می‌کند.
- روش‌های گرافیکی متعددی برای نمایش عبارات حوزه s برحسب قطب‌ها و صفرها وجود دارد. چنین نمودارهایی برای طراحی یک مدار با پاسخ مطلوب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱۵-۱۰ خواندنی‌های کمکی

More details regarding **s**-domain analysis of systems, use of Laplace transforms, and properties of transfer functions can be found in:

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

A good discussion of various types of oscillator circuits can be found in:

R. Mancini, *Op Amps for Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

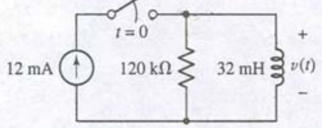
and

G. Clayton and S. Winder, *Operational Amplifiers*, 5th ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

مسائل

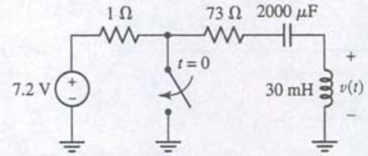
۱۵-۱ $Z(s)$ و $Y(s)$

۱. همه معادل‌های حوزه s ممکن در مدار شکل ۱۵-۵۱ را رسم کنید.



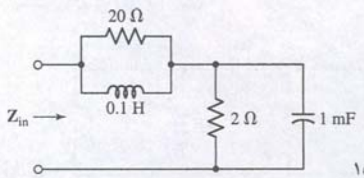
شکل ۱۵-۵۱

۲. همه معادل‌های حوزه s ممکن مدار شکل ۱۵-۵۲ را رسم نمایید.



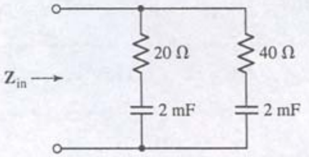
شکل ۱۵-۵۲

۳. به شکل ۱۵-۵۳ مراجعه کنید و (الف) $Z_{in}(s)$ را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای از s پیدا کنید. (ب) $Z_{in}(-80)$ را به‌دست‌آورید، (ج) $Z_{in}(j80)$، (د) ادمیتانس شاخه RL موازی، $Y_{RL}(s)$ را به صورت نسبت چندجمله‌ای‌های s مشخص کنید. (ه) کار را برای $Y_{RC}(s)$ تکرار نمایید. (و) نشان دهید که $Z_{in} = (Y_{RL} + Y_{RC})/Y_{RL}Y_{RC}$.



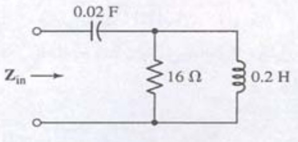
شکل ۱۵-۵۳

۴. امپدانس معادل تونن نظاره‌شده از پایانه مدار شکل ۱۵-۵۴ را بیابید.



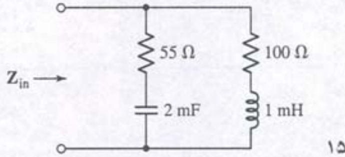
شکل ۱۵-۵۴

۵. برای شکل ۱۵-۵۵، (الف) $Z_{in}(s)$ را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای از s پیدا کنید. (ب) $Z_{in}(j8)$ را به فرم دکارتی درآورید. (ج) $Z_{in}(-2 + j6)$ را به فرم قطبی درآورید. (د) برای این‌که در $s = -5 + j0$، امپدانس $Z_{in} = 0$ باشد، مقاومت 16Ω را تا چه مقداری باید تغییر داد. (ه) برای $Z_{in} = \infty$ در $s = -5 + j0$، مقاومت فوق را چقدر باید تغییر داد.



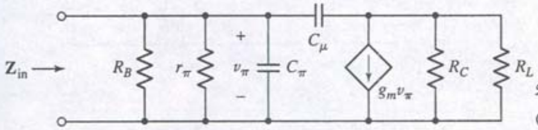
شکل ۱۵-۵۵

۶. (الف) امپدانس معادل تونن از دید پایانه‌های مدار شکل ۱۵-۵۶ را بدست‌آورید. (ب) مقدار امپدانس را به عنوان تابعی از فرکانس ω برای $\sigma = 0$ رسم نمایید.



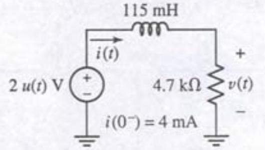
شکل ۱۵-۵۶

۷. امپدانس ورودی Z_{in} مدار شکل ۱۵-۵۷ را معین کنید. این مدار مدلی خطی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری پیوندی دوقطبی است و برای فرکانس‌هایی تا چند MHz معتبر است. جواب را به صورت دو چند جمله‌ای بیان کنید.



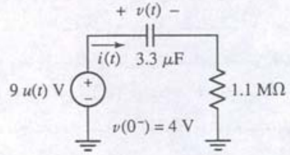
شکل ۱۵-۵۷

۸. در مدار شکل ۱۵-۵۸ با شروع کار از حوزه s، $v(t)$ را پیدا کنید.



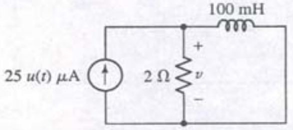
شکل ۱۵-۵۸

۹. از تکنیک‌ها تحلیل حوزه s برای تعیین جریان خازن، $i(t)$، در شکل ۱۵-۵۹ استفاده نمایید.



شکل ۱۵-۵۹

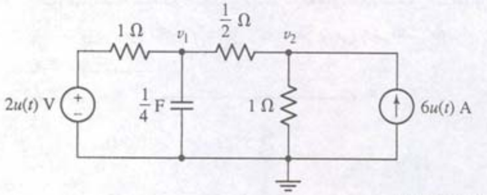
۱۰. (الف) مدار شکل ۱۵-۶۰ را به حوزه s ببرید. (ب) عبارتی برای توان جذب‌شده پیدا کنید.



شکل ۱۵-۶۰

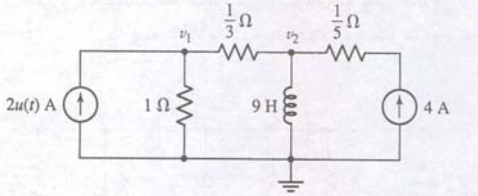
۱۵-۲ تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s

۱۱. مدار شکل ۱۵-۶۱ را ملاحظه کنید. با تکنیک حوزه s، ولتاژ گره‌های $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را اگر $v_1(0^-) = -2\ V$ باشد، پیدا کنید.



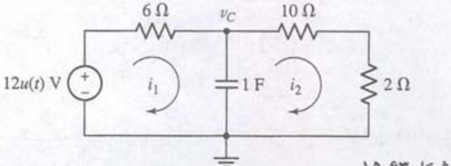
شکل ۱۵ـ۶۱

۱۲. مدار شکل ۱۵ـ۶۲ را ملاحظه کنید. (الف) با تکنیک حوزه s، ولتاژ گره‌های $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را پیدا کنید. (ب) $v_1(t)$ را رسم نمایید.



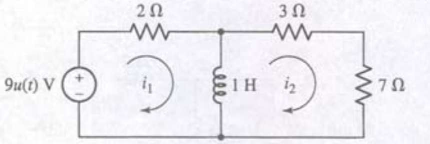
شکل ۱۵ـ۶۲

۱۳. مدار ساده مش شکل ۱۵ـ۶۳ حاوی دو مش است: (الف) $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را با تحلیل مش در حوزه s معین کنید به شرطی که $v_C(0^-) = 9$ V باشد. (ب) با PSpice صحت پاسخ خود را تحقیق کنید. برچسب‌های مناسب گذاشته و با شبیه‌سازی خود نتیجه را با نتیجه بخش (الف) مقایسه کنید.



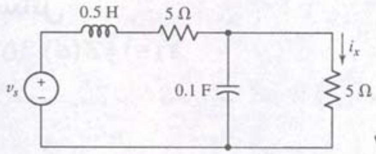
شکل ۱۵ـ۶۳

۱۴. مدار شکل ۱۵ـ۶۴ دارای دو مش است: (الف) هر دو جریان $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را با روش تحلیل مش در فضای s معین کنید به شرطی که $i_1(0^-) - i_2(0^-) = 8$ A باشد. (ب) صحت نتیجه را با PSpice تحقیق کنید. برچسب‌های مناسب گذاشته و نتیجه شبیه‌سازی را با حل بخش (الف) مقایسه کنید.



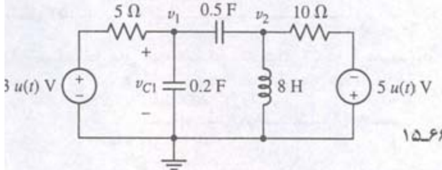
شکل ۱۵ـ۶۴

۱۵. (الف) در شکل ۱۵ـ۶۵ با فرض $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)u(t)$، در حوزه فرکانس I_x را به‌دست‌آورید. (ب) $i_x(t)$ را بیابید.



شکل ۱۵ـ۶۵

۱۶. ولتاژ گرهی $v_1(t)$ در مدار شکل ۱۵ـ۶۶ را بیابید. انرژی اولیه صفر فرض می‌شود.

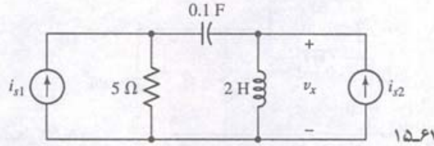


شکل ۱۵ـ۶۶

۱۷. عبارت حوزه زمان را برای جریان حلقه وسط مدار شکل ۱۵ـ۶۶ به‌دست‌آورید. انرژی اولیه صفر است.

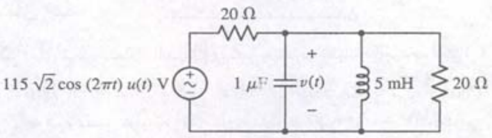
۱۸. ولتاژ گرهی $v_1(t)$ را در مدار شکل ۱۵ـ۶۶ پیدا کنید. ولتاژ اولیه خازن $v_C(0^-) = 9V$ است ولی هیچ عنصر دیگری از ابتدا انرژی ذخیره نکرده است.

۱۹. اگر در مدار شکل ۱۵ـ۶۷ جریان $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos4t\ u(t)$ A و $i_{s2} = 30e^{-3t}\sin4t\ u(t)$ A باشد، (الف) در حوزه فرکانس V_x را به‌دست‌آورید. (ب) $v_x(t)$ را بیابید.



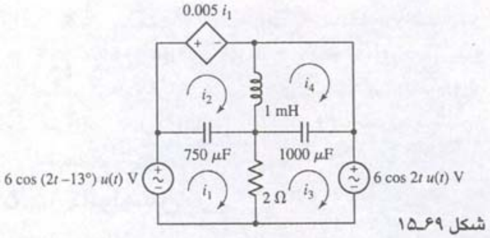
شکل ۱۵ـ۶۷

۲۰. (الف) عبارتی در حوزه زمان برای $v(t)$ در شکل ۱۵ـ۶۸ معین کنید به‌شرطی‌که $v(0^-) = 75V$ بوده و هیچ انرژی در القاگر ذخیره نشده باشد. (ب) پاسخ خود را به بخش (الف) برای تعیین جریان حالت ماندگاری که از منبع 115V جاری است به‌کاربرید. (ج) با تحلیل فیزوری پاسخ بند (ب) را تأیید کنید.



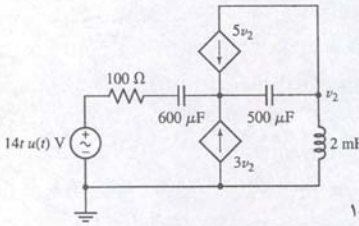
شکل ۱۵ـ۶۸

۲۱. جریان‌های حلقه $i_1(t)$ و $i_2(t)$ در شکل ۱۵ـ۶۹ را معین کنید به‌شرطی‌که جریان القاگر 1mH، $(i_2 - i_4)$، برابر 1A در $t = 0^-$ باشد. نشان دهید که پاسخ شما با پاسخ حاصل از تحلیل فیزوری در حالت ماندگار برابر است.



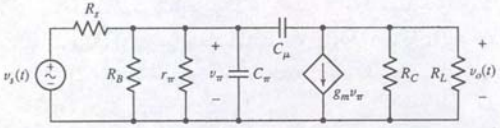
شکل ۱۵ـ۶۹

۲۲. با فرض نبود انرژی ذخیره‌شده در شکل ۱۵ـ۷۰ مقدار v_2 را در t برابر با (الف) 1ms، (ب) 100ms و (ج) 10s حساب کنید.



شکل ۱۵ـ۷۰

۲۳. اگر منبع ولتاژ وابسته در شکل ۱۵ـ۷۱ با شوک توان در حین رعد و برق آسیب دیده باشد به نحوی که دیگر کار نکند (یعنی اکنون یک مدار باز است) عبارتی برای توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 2Ω به‌دست‌آورید. فرض کنید که فقط انرژی اولیه القاگر در مدار است به نحوی که جریان در القاگر 1mH، $(i_2 - i_4)$ در $t = 0^-$ فقط 1mA است.



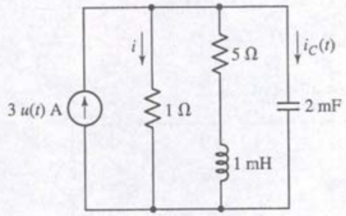
شکل ۱۵ـ۷۱

۲۴. (الف) برای مدار شکل ۱۵ـ۷۱ که یک مدل خطی مدار تقویت‌کننده ترانزیستوری پیوندی دوقطبی امیتر مشترک است، عبارتی برای بهره ولتاژ V_o/V_s به‌دست‌آورید. می‌توانید انرژی اولیه خازن را صفر فرض کنید. پاسخ خود را به صورت نسبت چندجمله‌ای‌های s مرتب‌شده بیان کنید. (ب) در این تابع تبدیل چند قطب وجود دارد.

۱۵ـ۳ تکنیک‌های دیگر در تحلیل مدار

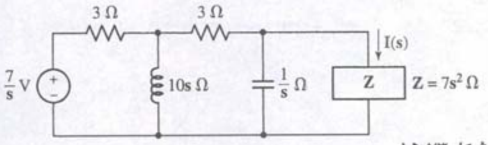
۲۵. (الف) مدار شکل ۱۵ـ۷۲ را به حوزه s ببرید. (ب) معادل تونن از دید مقاومت 1Ω را پیدا کنید. (ج) مدار ساده‌شده را برای یافتن عبارت برای $i(t)$ که جریان لحظه‌ای در مقاومت 1Ω است تحلیل کنید.

۲۶. منبع جریان در شکل ۱۵ـ۷۲ را با منبع ولتاژ 20u(t) V جایگزین کنید، مرجع مثبت در بالا باشد. (الف) مدار را به حوزه s ببرید. (ب) معادل نورتن از دید مقاومت 1Ω چیست. (ج) مدار ساده‌شده را برای تهیه $i_C(t)$ تحلیل کنید.



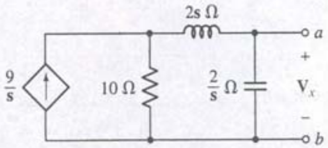
شکل ۱۵ـ۷۲

۲۷. برای مدار حوزه s شکل ۱۵ـ۷۳، معادل تونن را از دید امپدانس $7s^2$Ω معین کنید و از آن برای تعیین $I(s)$ استفاده کنید.



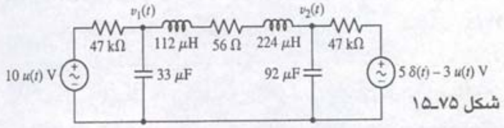
شکل ۱۵ـ۷۳

۲۸. برای مدار حوزه s شکل ۱۵ـ۷۴، معادل تونن را در دو سر پایانه‌های a و b به دست آورید.



شکل ۱۵ـ۷۴

۲۹. (الف) از روش تجمیع در حوزه s برای یافتن $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در مدار شکل ۱۵ـ۷۵ استفاده کنید. (ب) $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.

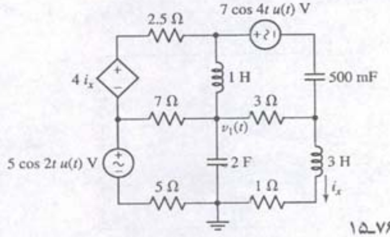


شکل ۱۵ـ۷۵

۳۰. توان جذب‌شده $p(t)$ به وسیله مقاومت 56Ω را در شکل ۱۵ـ۷۵ با تقریب اول تبدیل منبع در حوزه s معین کنید.

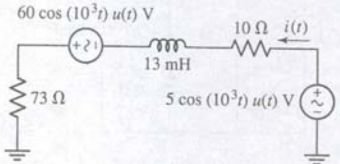
۳۱. (الف) معادل نورتن حوزه s از دید منبع 10u(t) V شکل ۱۵ـ۷۵ را بیابید. (ب) جریان خارج‌شده از منبع 10u(t) V در t = 1.5ms را معین کنید.

۳۲. (الف) از روش تجمیع برای یافتن عبارت $V_1(s)$ در شکل ۱۵ـ۷۶ در حوزه s استفاده کنید. (ب) $v_1(t)$ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۵ـ۷۶

۳۳. (الف) با تبدیل منبع در حوزه s، $\mathbf{I(s)}$ را در مدار شکل ۱۵.۷۷ بیابید. (ب) $i(t)$ را به‌دست‌آورید. (ج) مقدار حالت ماندگار $i(t)$ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۵.۷۷

۱۵.۴ قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل

۳۴. برای توابع تبدیل زیر، قطب‌ها و صفرها را معین کنید:

(الف) $\dfrac{7s}{s(3s^2-9s+4)}$

(ب) $\dfrac{s^2-1}{(s^2+2s+4)(s^2+1)}$

۳۵. همه قطب‌ها و صفرهای هر تابع حوزه s زیر را پیدا کنید:

(الف) $\dfrac{3s^2}{s(s^2+4)(s-1)}$

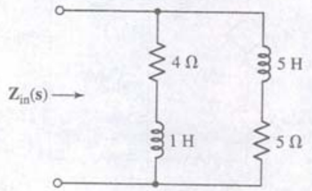
(ب) $\dfrac{s^2+2s-1}{s^2(4s^2+2s+1)(s^2-1)}$

۳۶. ترکیب سری یک مقاومت 5Ω و یک خازن 0.2F با ترکیب سری مقاومت 2Ω و القاگر 5H موازی است. (الف) ادمیتانس ورودی $\mathbf{Y_1(s)}$ را برای ترکیب موازی به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s به‌دست‌آورید. (ب) همه قطب‌ها و صفرهای $\mathbf{Y_1(s)}$ را معین کنید. (ج) اگر مقاومت 12Ω با $\mathbf{Y_1(s)}$ موازی بسته شود، همه قطب‌های ادمیتانس ورودی را مشخص کنید. (د) همه صفرهای ورودی را اگر مقاومت 10Ω با $\mathbf{Y_1(s)}$ سری باشد، مشخص نمایید.

۳۷. همه قطب‌ها و صفرهای (الف) امپدانس ورودی تعریف‌شده در شکل ۱۵.۵۴ را معین کنید. (ب) امپدانس ورودی تعریف‌شده در شکل ۱۵.۵۶ را تعیین نمایید.

۳۸. ادمیتانس $\mathbf{Y(s)}$ دارای صفرهایی در $s = 0$ و $s = -10$ و قطب‌هایی در $s = -5$ و $s = -20s^{-1}$ است. اگر با $s \to \infty$ داشته باشیم $\mathbf{Y(s)} \to 12S$، مطلوبست (الف) $\mathbf{Y(j10)}$، (ب) $\mathbf{Y(-j10)}$ و (ج) $\mathbf{Y(-15)}$، و (د) قطب‌ها و صفرها $\mathbf{Y(s)} + 5$.

۳۹. (الف) $\mathbf{Z_{in}(s)}$ را در شبکه شکل ۱۵.۷۸ به‌دست‌آورید. (ب) همه فرکانس‌های بحرانی $\mathbf{Z_{in}(s)}$ را بیابید.



شکل ۱۵.۷۸

۴۰. یک مدار مفروض، تابع تبدیل $\mathbf{H(s)} = (s+3)/[(s+5)(s^2+6s+25)]$ را دارد. پاسخ خروجی در حوزه s را برای ورودی‌های زیر به‌دست‌آورید. (الف) $\delta(t)$، (ب) $e^{-4t}u(t)$، (ج) $[2\cos 15t]u(t)$، (د) $te^{-t}u(t)$ و (ه) قطب‌ها و صفرهای هر پاسخ خروجی را بیابید.

۱۵.۵ کانولوشن

۴۱. پاسخ ضربه یک سیستم خطی برابر است با $h(t) = 5\sin\pi t[(u(t) - u(t-1)]$. یک سیگنال ورودی $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$ اعمال می‌شود. برای ترسیم خروجی $y(t)$ از کانولوشن استفاده کنید.

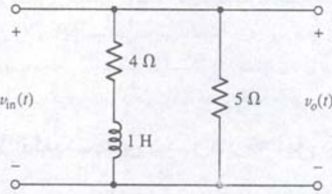
۴۲. فرض کنید $f_1(t) = e^{-5t}u(t)$ و $f_2(t) = (1-e^{-2t})u(t)$ باشد. با روش‌های زیر عبارت $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ را پیدا کنید. (الف) کانولوشن در حوزه زمان (ب) $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F_1(s)F_2(s)}\}$.

۴۳. وقتی که یک ضربه $\delta(t)$ V به یک شبکه دو ورودی اعمال شود، ولتاژ خروجی $v_o(t) = 4u(t) - 4u(t-2)$ V را به‌دست‌آورید. $v_o(t)$ را اگر ولتاژ ورودی $2u(t-1)$V باشد، پیدا کرده رسم کنید.

۴۴. فرض کنید $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$ و $x(t) = u(t) - \delta(t)$ باشد. مطلوبست (الف) $y(t) = h(t) * x(t)$ با روش کانولوشن در حوزه زمان (ب) $\mathbf{H(s)}$ و $\mathbf{X(s)}$ را به‌دست‌آورده و سپس $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H(s)X(s)}\}$ را بیابید.

۴۵. پاسخ ولتاژ ضربه یک مدار خاص به صورت $h(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$ داده شده است. پاسخ‌های حوزه s و حوزه t را به‌دست‌آورید. اگر ولتاژ تحریک $v_{in}(t)$ برابر باشد با (الف) $3\delta(t)$ V، (ب) $3u(t)$ V، (ج) $3u(t) - 3u(t-2)$V، (د) $3\cos 3t$ V، (ه) پاسخ‌های ولتاژ (الف) تا (د) را در حوزه زمان بکشید.

۴۶. (الف) پاسخ ضربه $h(t)$ شبکه شکل ۱۵.۷۹ را معین کنید. (ب) از کانولوشن برای تعیین $v_o(t)$ استفاده کنید، به شرطی که $v_{in}(t) = 8u(t)$ V باشد.

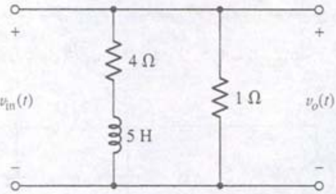


شکل ۱۵.۷۹

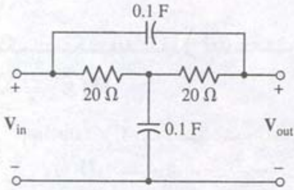
۴۷. (الف) پاسخ ضربه $h(t)$ شبکه شکل ۱۵.۸۰ را به دست آورید. (ب) از کانولوشن برای تعیین $v_o(t)$ استفاده کنید، به شرطی که $v_{in}(t) = 8e^{-t}u(t)$ V باشد.

۱۵.۶ صفحه فرکانس مختلط

۴۸. برای شبکه شکل ۱۵.۸۱، نسبت $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V_{out}/V_{in}}$ را پیدا کنید و همه فرکانس‌های بحرانی را بیابید.

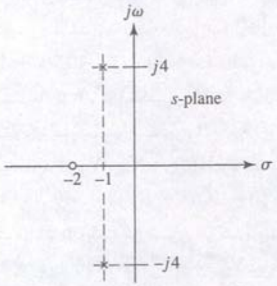


شکل ۱۵.۸۰



شکل ۱۵.۸۱

۴۹. آرایش قطب ـ صفر $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V_2(s)/V_1(s)}$ را در شکل ۱۵.۸۲ به‌دست‌آورید. $\mathbf{H(0)} = 1$ فرض شود. $|\mathbf{H(s)}|$ را برای موارد زیر رسم کنید: (الف) δ، اگر $\omega = 0$ باشد. (ب) ω اگر $\delta = 0$ باشد. (ج) $|\mathbf{H(j\omega)}|_{max}$ را به‌دست‌آورید.



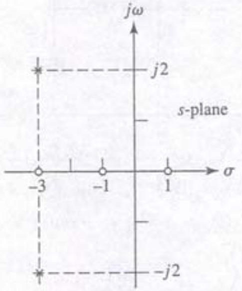
شکل ۱۵.۸۲

۵۰. یک‌قطعه ماشین‌الکتریکی دارای مشخصه امپدانسی با دو صفر در $s=-1$، یک قطب $s = -0.5 + j\sqrt{3/2}$ است و در $s = 0$ برابر 1Ω می‌باشد (الف) برج قطب ـ صفر را برای این امپدانس به‌دست‌آورید. (ب) مدل و ورق الاستیک اندازه امپدانس را رسم کنید. (ج) ترکیبی از مقاومت‌ها، القاگرها و خازن‌هایی را که امپدانس برابری دارند، پیدا کنید (راهنمایی: از عبارت حوزه s به عقب کار کنید).

۵۱. با فرض بهره ولتاژ $\mathbf{H(s)} = (10s^2 + 55s + 75)/(s^2 + 16)$: مطلوبست فرکانس‌های بحرانی در صفحه s، (ب) $\mathbf{H(0)}$ و $\mathbf{H(\infty)}$ را مشخص نمایید. (ج) اگر یک مدلی از $|\mathbf{H(s)}|$ دارای ارتفاع 3 سانتی‌متری در مبدأ باشد، در $s = j3$ چه ارتفاعی دارد؟ (د) به‌طور تقریبی $|\mathbf{H(\sigma)}|$ را در برابر σ و $|\mathbf{H(j\omega)}|$ در برابر ω رسم کنید.

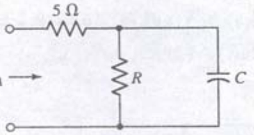
۵۲. در یک آزمایشگاه سری دولتی، یک جعبه فلزی بد شکل به وسیله محققی که نهارش به وسیله رفقا آسیب دیده بود پیدا شد درحالی‌که اثری از غذا نبود، محقق تصمیم گرفت ادمیتانس جعبه را اندازه بگیرد و چنین درمی‌یابد که ادمیتانس را می‌توان به صورت $\mathbf{Y(s)} = (5s^2 + 5s + 2)/(5s^2 + 15s + 2)$ S مدل‌سازی کرد. (الف) برج قطب و صفر آن را رسم کنید. (ب) مدل ورق الاستیک مقدار ادمیتانس را رسم کنید. (ج) محل غذای گم‌شده را پیدا کنید به‌شرطی‌که ضرایب چندجمله‌ای مخرج مربوط به عرض جغرافیایی (درجه، دقیقه و ثانیه) و ضرایب چندجمله‌ای صورت مربوط به طول جغرافیایی (درجه، دقیقه و ثانیه) محل غذا باشد.

۵۳. برج قطب و صفر در شکل ۱۵.۸۳ مربوط به بهره جریان $\mathbf{H(s)} = \mathbf{I_{out}/I_{in}}$ است. فرض کنید $\mathbf{H(-2)} = 6$ است. (الف) $\mathbf{H(s)}$ را به صورت نسبت چندجمله‌ای‌هایی از s نشان دهید. (ب) $\mathbf{H(0)}$ و $\mathbf{H(\infty)}$ را به‌دست‌آورید. (ج) مقدار و جهت هر پیکان از فرکانس بحرانی به j2 را معین کنید.



شکل ۱۵.۸۳

۵۴. شبکه سه عنصری شکل ۱۵.۸۴ دارای امپدانس ورودی $\mathbf{Z_A(s)}$ است که صفری در $s = -10 + j0$ دارد. اگر مقاومت 20Ω به طور سری با شبکه قرار گیرد، صفر امپدانس جدید به $s = -3.6 + j0$ جابه‌جا می‌شود. R و C را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۵.۸۴

۵۵. فرض کنید $\mathbf{H(s)} = \dfrac{100(s+2)}{(s^2+2s+5)}$ باشد، (الف) نمودار قطب و صفر را برای $\mathbf{H(s)}$ نشان دهید. (ب) $\mathbf{H(j\omega)}$ را به‌دست‌آورید. (ج) $|\mathbf{H(j\omega)}|$ را پیدا کنید. (د) $|\mathbf{H(j\omega)}|$ را در برابر ω ترسیم کنید. (ه) ω_{max} را به‌دست‌آورید. در این فرکانس $|\mathbf{H(j\omega)}|$ ماکزیمم است.

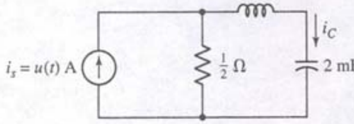
۱۵.۷ پاسخ طبیعی و صفحه s

۵۶. برای شکل ۱۵.۸۵ فرض کنید $\mathbf{Z_{in}(s)} = (5s + 20)/(s + 2)\Omega$ باشد. مطلوبست (الف) ولتاژ $v_{ab}(t)$ بین پایانه‌های مدار باز، اگر $v_{ab}(t) = 25$ V باشد. (ب) جریان $i_{ab}(t)$ حالت اتصال کوتاه پایانه‌های a و b، اگر $i_{ab}(0) = 3$A باشد.

شکل ۱۵.۸۵

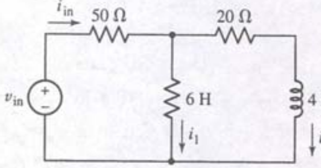
۵۷. فرض کنید در شبکه غیرفعال شکل ۱۵.۸۵ $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = (s^2 + 4s + 20)/(s + 1)\Omega$ باشد. جریان لحظه‌ای وارد به پایانه a یعنی $i_a(t)$ را پیدا کنید، با این فرض که $v_{ab}(t)$ برابر باشد با (الف) $160e^{-6t}$V، (ب) $160e^{-6t}u(t)$ V، (ج) $i_a(0) = 0$ و (د) $\frac{di_a}{dt} = 32$ A/s در $t = 0$.

۵۸. (الف) برای مدار شکل ۱۵.۸۶، $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_C/\mathbf{I}_s$ را معین کنید. (ب) قطب‌های $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ را به‌دست‌آورید. (ج) برای مدار RLC مقدار α، ω_0 و ω_d را پیدا کنید. (د) پاسخ واداشته $i_{C,f}(t)$ به‌طور کامل. (هـ) فرم پاسخ طبیعی $i_{C,n}(t)$ را بیابید. (و) مقادیر $i_C(0^+)$ و di_C/dt در $t = 0^+$ را معین کنید. (ز) پاسخ کامل $i_C(t)$ را بنویسید.



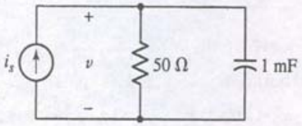
شکل ۱۵.۸۶

۵۹. برای مدار شکل ۱۵.۸۷: (الف) قطب‌های $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{in}/\mathbf{V}_{in}$ را پیدا کنید. (ب) فرض کنید $i_1(0^+) = 5$A و $i_2(0^+) = 2$A باشد. همچنین اگر $\mathbf{V}_{in}(t) = 500u(t)$ V باشد $i_n(t)$ را به‌دست‌آورید.



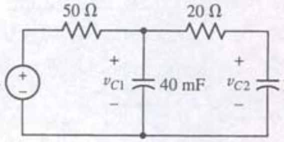
شکل ۱۵.۸۷

۶۰. (الف) برای مدار شکل ۱۵.۸۸، $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s(\mathbf{s})$ را پیدا کنید. اگر $i_s(t)$ برابر موارد زیر باشد $v(t)$ را بیابید. (ب) $2u(t)$ A، (ج) $4e^{-10t}$A و (د) $4e^{-10t}u(t)$ A.



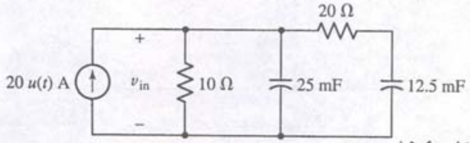
شکل ۱۵.۸۸

۶۱. برای مدار شکل ۱۵.۸۹: (الف) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{C2}/\mathbf{V}_s$ را پیدا کنید. (ب) فرض کنید $v_{C2}(0^+) = v_{C1}(0^+) = 0$ باشد آن‌گاه اگر $v_s(t) = u(t)$ V باشد $v_{C2}(t)$ را بیابید.



شکل ۱۵.۸۹

۶۲. با مراجعه به شکل ۱۵.۹۰، امپدانس $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$ را از دید منبع معین کنید. این عبارت را برای تعیین $v_{in}(t)$ در $t > 0$ به‌کارببرید.



شکل ۱۵.۹۰

۱۵.۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$

۶۳. برای مدار op amp شکل ۱۵.۴۸، نسبت چندجمله‌ای برحسب s را برای $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ به‌دست‌آورید. فرض کنید مقادیر امپدانس برابر است با (به Ω): (الف) $\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = 10^3 + (10^8/s)$، $\mathbf{Z}_f(\mathbf{s}) = 5000$، (ب) $\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = 5000$، $\mathbf{Z}_f(\mathbf{s}) = 10^3 + (10^8/s)$، (ج) $\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = 10^3 + (10^8/s)$ و $\mathbf{Z}_f(\mathbf{s}) = 10^4 + (10^8/s)$.

۶۴. در مدار شکل ۱۵.۴۹ (ب) بگذارید $R_f = 20k\Omega$ باشد، آن‌گاه C_1 و R_1 را طوری مشخص کنید که $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ در دو طبقه برابر باشد با (الف) 50-، (ب) $-10^{-3}(s + 10^4)$، (ج) $-10^{-4}(s + 10^3)$ و (د) $10^3(s + 10^5)$.

۶۵. در مدار op amp شکل ۱۵.۴۹ (الف)، $R_f = 20k\Omega$ را درنظربگیرید و سپس مقادیر R_1 و C_1 را طوری در دو طبقه به‌دست‌آورید که $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ برابر باشد با (الف) 50-، (ب) $-10^3/(s+10^4)$، (ج) $-10^4/(s + 10^3)$ و (د) $100/(s + 10^5)$.

۶۶. چند op amp را به‌طور سری به‌کارببرید تا تابع تبدیل $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in} = -10^{-4}s(s + 10^2)/(s + 10^3)$ ایجاد شود. فقط مقاومت‌های 10kΩ را به‌کارببرید. از اتصال کوتاه و مدار باز استفاده کنید ولی همه مقادیر ظرفیت را مشخص نمایید.

۶۷. یک نوسان‌ساز یا اسیلاتور پل‌وین طراحی کنید. فقط از مقاومت‌های استاندارد استفاده کنید. طراحی را با شبیه‌سازی PSpice تأیید کنید.

۶۸. یک اسیلاتور پل‌وین با فرکانس 60 Hz طراحی نمایید. طرح خود را با شبیه‌سازی PSpice تأیید کنید.

۶۹. یک مدار اسیلاتور طراحی کنید تا یک سیگنال سینوسی 440 Hz تولید شود. فقط از مقاومت‌های استاندارد استفاده نمایید. با مدار شما چه نتی از موسیقی معادل است؟

۷۰. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی‌اش یک موج سینوسی 220 Hz یک موج 440Hz سینوسی باشد. پاسخ خود را با PSpice تست کنید. آیا دو موج سینوسی با هم همفازند.

فصل شانزدهم

پاسخ فرکانس

مفاهیم کلیدی

- فرکانس تشدید مدارهای القاگر و خازنی
- ضریب کیفیت
- پهنای باند
- مقیاس‌بندی فرکانس و اندازه
- تکنیک‌های نمودار بُود
- فیلترهای پایین و بالاگذر
- طراحی فیلتر میان‌گذر
- فیلترهای فعال

مقدمه

اسخ فرکانس را قبلاً در چند فصل دیدیم، ولی خواننده ممکن است بپرسد پس چه لزومی ارد که اکنون عنوان کلی فصل را به آن اختصاص دهیم. مفهوم پاسخ فرکانس که به شدت در مه زمینه علوم مهندسی اهمیت دارد، مبنای درک فاکتورهای ثبات و پایداری در سیستم‌ها حساب می‌آید. این سیستم‌ها می‌توانند الکتریکی، مکانیکی، شیمیایی یا بیولوژیکی شند. همچنین خواهیم دید که مفاهیم پاسخ فرکانس در بسیاری از کاربردهای مهندسی رق به کار گرفته شده و به ورای موضوع پایداری گسترش یافته است. مثلاً در کار با یستم‌های مخابراتی اغلب با تفکیک فرکانس مواجه می‌شویم (مثلاً ایستگاه رادیویی ناص). این کار هنگامی امکان‌پذیر است که درک کاملی از پاسخ فرکانس مدارهای فیلتر یا مافی را داشته باشیم. به طور خلاصه می‌توان چندین صفحه در توجیه پاسخ فرکانس رشت. با این وجود، ترجیح می‌دهیم با چرخش به جنبه الکتریکی به اصل موضوع پرداخته با طراحی مدارهای فیلتر ساده در کاربردهای روزانه مانند تقویت‌کننده‌های صوتی به اوج رسیم.

-۱۶ تشدید موازی

را ما این‌قدر بر توابع تحریک سینوسی اصرار می‌ورزیم در حالی که در عمل به ندرت با ن‌ها مواجهیم؟ البته صنعت تولید برق را می‌توانیم مستثنی بدانیم. هر چند که کلاً موجی ینوسی است و در تمام این بحث با تحریک سینوسی سروکار داریم، ولی در آن‌جا هم اهی لازم می‌شود که فرکانس‌های دیگر ناشی از غیرخطی بودن بعضی از عناصر را لحاظ نیم. از طرفی در اکثر سیستم‌های الکتریکی توابع تحریک سینوسی نیستند. در یستم‌های انتقال اطلاعات یک موج سینوسی به خودی خود بی‌ارزش است و حاوی للاعات محدودی می‌باشد زیرا مقادیر آینده آن از گذشته قابل پیش‌بینی است. علاوه بر ن پس از یک پریود هر موج غیرسینوسی پریودیک هم حاوی هیچ اطلاعات اضافی ست.

اکنون فرض کنید تابع تحریک خاصی متشکل از مؤلفه‌های سینوسی بوده و محدوده رکانسی آن 10 تا 100 Hz باشد. تصور کنید این موج به شبکه‌ای اعمال شود که خاصیت زیر دارد. هر موج سینوسی که فرکانس آن صفر تا 200 Hz باشد و در پایانه‌های ورودی شبکه اهر شود، دامنه خروجی بدون **اعوجاج** دو برابر دامنه ورودی، و اختلاف فاز ورودی – روجی صفر خواهد داشت. بنابراین تابع خروجی این شبکه دو برابر ورودی و بدون

اعوجاج است. با این وجود، اگر شبکه دارای پاسخ فرکانسی بود که مقادیر ورودی سینوسی بین 10 الی 50 Hz با ضریب متفاوتی نسبت به فرکانس 50 الی 100 Hz ضرب می‌شد، آن‌گاه خروجی اعوجاج می‌داشت. در این حالت دیگر خروجی تقویت شده شبیه ورودی نخواهد بود. البته این موج اعوجاج‌دار ممکن است گاهی مطلوب باشد و گاهی هم نامطلوب. یعنی پاسخ فرکانس ممکن است عمداً طوری انتخاب شود که بعضی از مؤلفه‌های فرکانس یک تابع تحریک را حذف و یا بعضی را تقویت نماید.

چنین رفتاری، خاص مدارهای تیون شده یا مدارهای تشدید (رزنانس) است که آن‌ها را در این فصل خواهیم دید. در بحث تشدید همه روش‌های موردبحث در نمایش پاسخ فرکانس را اعمال خواهیم کرد.

تشدید

در این بخش پدیده مهمی را که ممکن است در مدارهای حاوی القاگر و خازن رخ دهد، مطالعه می‌کنیم. این پدیده **تشدید** یا **رزنانس** نامیده می‌شود و با احتیاط می‌توان آن را وضعیتی دانست که پاسخ یک سیستم فیزیکی به یک تابع تحریک با دامنه ثابت، به حداکثر خود می‌رسد. با این وجود، ما اغلب برای توابع غیرسینوسی هم صحبت از تشدید می‌کنیم. سیستم تشدید می‌تواند الکتریکی، مکانیکی، هیدرولیکی، صوتی یا نوع دیگری باشد. ولی ما توجه خود را عمدتاً به سیستم‌های الکتریکی معطوف می‌داریم.

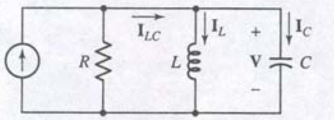
تشدید پدیده آشنایی است. مثلاً بالا و پایین پریدن در تکان‌های یک اتومبیل، در صورت داشتن فرکانس مناسب (این مقدار حدود یک پرش در هر ثانیه است) و ضربه‌گیرهای نامناسب می‌تواند خودرو را به حالت نوسان درآورد. در هر حال اگر فرکانس جهش اضافه یا کم شود، پاسخ لرزشی خودرو به میزان قابل توجهی کم می‌شود. تشریح بیشتر این موضوع می‌تواند خواننده اپرایی باشد که می‌تواند جام کریستال را با نت تنظیم شده در فرکانس مناسبی بشکند. در هر یک از این مثال‌ها از فرکانسی صحبت می‌کنیم که تا رخداد تشدید تنظیم می‌گردد. می‌توان حتی سایز، شکل و ماده سیستم مکانیکی لرزنده را تنظیم کرد. ولی این کار به لحاظ فیزیکی چندان ساده نیست.

شرایط تشدید در سیستم فیزیکی بسته به هدف ممکن است مطلوب باشد و یا نباشد. در مثال خودرو لرزش با دامنه زیاد ممکن است در سرعت‌های کم دلچسب باشد ولی قطعاً در سرعتی چون 105 km/h چندان مطلوب نیست.

اکنون بیایید تشدید را دقیق‌تر تعریف کنیم. در یک شبکه الکتریکی دو پایانه حاوی حداقل یک القاگر و یک خازن، تشدید را حالتی تعریف می‌کنیم که در آن امپدانس ورودی شبکه مقاومتی خالص باشد. بنابراین:

> مداری در حالت تشدید است که ولتاژ و جریان در پایانه ورودی‌اش همفاز باشند.

همچنین خواهیم دید که پاسخی با دامنه حداکثر هنگامی در شبکه تولید می‌شود که مدار در حالت تشدید باشد.



شکل ۱ـ۱۶ ترکیب موازی RLC که مدار تشدید موازی نام دارد.

ابتدا تعریف تشدید را به یک شبکه RLC که با منبع سینوسی تحریک شکل ۱–۱۶ موازی است، اعمال می‌کنیم. در بسیاری از وضعیت‌های عملی، این مدار با تقریب جزئی قابل ساخت در آزمایشگاه است و در آن یک القاگر فیزیکی به یک خازن فیزیکی متصل شده و ترکیب موازی به وسیله یک منبع انرژی که امپدانس خروجی بالایی دارد، تحریک می‌گردد. ادمیتانس حالت ماندگار از دید منبع جریان ایده‌آل برابر است با:

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad (۱)$$

همان‌طور که گفتیم تشدید هنگامی رخ می‌دهد که ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی همفاز باشند. شرط برقراری چنین حالتی برابر است با

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} = 0$$

به تشدید با تنظیم L، C و یا ω می‌توان رسید. ما توجه خود را به حالتی که در آن ω تغییر کند، معطوف می‌نماییم. به این ترتیب فرکانس تشدید ω_0 برابر است با:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{rad/s} \qquad (۲)$$

یا

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{Hz} \qquad (۳)$$

این فرکانس تشدید ω_0 همان فرکانس تشدید تعریف شده در معادله (۱۰) از فصل ۹ می‌باشد.

در این‌جا آرایش قطب – صفر تابع ادمیتانس با مزایای قابل توجهی قابل استفاده است. با فرض

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

یا

$$Y(s) = C\,\frac{s^2 + s/RC + 1/LC}{s} \qquad (۴)$$

می‌توان با تجزیه به عوامل، صفرهای Y(s) را مشخص کرد.

$$Y(s) = C\,\frac{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}{s}$$

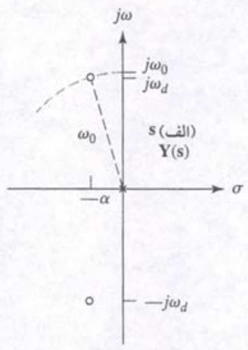
که در آن α و ω_d همان کمیت‌هایی هستند که ما در پاسخ طبیعی مدار RLC موازی بخش ۵–۹ در مورد آن‌ها صحبت کردیم. یعنی α **ضریب میرایی** نهایی است.

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

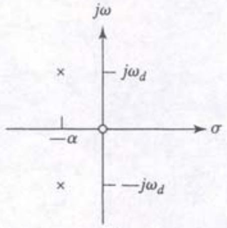
و ω_d فرکانس **تشدید طبیعی** است (با فرکانس تشدید ω_0 اشتباه نشود).

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

آرایش قطب و صفر در شکل ۲–۱۶(الف) مستقیماً از فرم حاصل‌ضرب به دست آمده است.



(الف)



(ب)

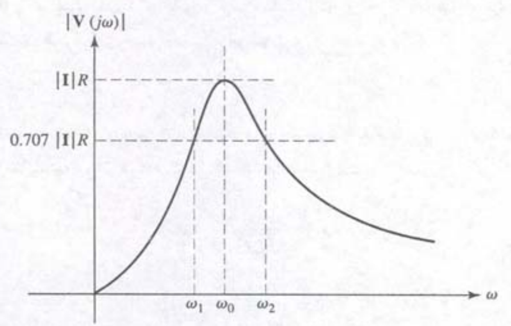
شکل ۲ـ۱۶ (الف) آرایش قطب ـ صفر ادمیتانس ورودی یک مدار تشدید موازی در صفحه s ملاحظه می‌شود. $\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$. (ب) آرایش قطب ـ صفر امپدانس ورودی. در این نمودار قطب‌ها و صفرهای واقع در بی‌نهایت لحاظ نشده‌اند.

با ملاحظه رابطه بین α، ω_d و ω_0 واضح است که فاصله مبدأ در صفحه s تا یکی از صفرهای ادمیتانس، عددی برابر ω_0 می‌باشد. پس با فرض داشتن آرایش قطب – صفر، فرکانس تشدید را می‌توان به طور گرافیکی هم به دست آورد. ما با استفاده از مبدأ در صفحه s فقط یک قوس را طی می‌کنیم و از یک صفر عبور می‌نماییم. تقاطع این قوس و محور $j\omega$ محل $s = j\omega_0$ را به دست می‌دهد. واضح است که ω_0 کمی بزرگتر از فرکانس تشدید طبیعی ω_d است، ولی با افزایش نسبت ω_d به α، نسبت آن‌ها به سمت واحد یا یک میل می‌کند.

تشدید و پاسخ ولتاژ

اکنون بیایید اندازه پاسخ یعنی ولتاژ V(s) در شکل ۱–۱۶ را به‌عنوان تابعی از فرکانس متغیر منبع تحریک بررسی کنیم. اگر منبع را یک منبع جریان سینوسی با دامنه ثابت فرض کنیم، پاسخ ولتاژ متناسب با ادمیتانس ورودی است. این پاسخ از نمودار قطب – صفر امپدانس به دست می‌آید:

$$Z(s) = \frac{s/C}{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}$$



شکل ۳ـ۱۶ اندازه پاسخ یک مدار تشدید موازی برحسب فرکانس.

که در شکل ۲-۱۶(ب) دیده می‌شود. البته پاسخ از صفر شروع شده و در مقدار ماکزیممی در حوالی فرکانس تشدید طبیعی به اوج می‌رسد و سپس دوباره در $\omega = \infty$ به صفر باز می‌گردد. پاسخ فرکانس در شکل ۳-۱۶ ملاحظه می‌شود. حداکثر مقدار پاسخ به صورت R ضربدر دامنه منبع جریان ترسیم شده است و به این معنی است که R مقدار ماکزیمم امپدانس ورودی مدار است. به‌علاوه پاسخ حداکثر دقیقاً در فرکانس ω_0 اتفاق می‌افتد. دو فرکانس دیگر که بعداً به کار خواهند رفت، ω_1 و ω_2 می‌باشند که معیاری از عرض یا پهنای باند پاسخ فرکانس را به دست می‌دهد. ابتدا نشان می‌دهیم که مقدار ماکزیمم R است و این ماکزیمم در فرکانس ω_0 به دست می‌آید.

ادمیتانس، طبق معادله (۱) دارای یک رسانایی (کنداکتانس) ثابت و یک سوسپتانس است که در تشدید حداقل مقدار خود (صفر) را دارد. بنابراین اندازه حداقل ادمیتانس در تشدید رخ می‌دهد و برابر 1/R است. پس اندازه امپدانس ماکزیمم در حالت تشدید برابر R خواهد بود.

به این ترتیب در فرکانس تشدید، ولتاژ دو سر مدار تشدید مدار شکل ۱-۱۶ درواقع IR می‌باشد، یعنی کل جریان منبع I از مقاومت عبور خواهد کرد. البته جریان در L و C نیز وجود دارد. در القاگر جریان برابر است با $\mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{V}_{L,0} / j\omega_0 L = \mathbf{I}R / j\omega_0 L$ و در خازن در حالت تشدید برابر است با $\mathbf{I}_{C,0} = (j\omega_0 C)\,\mathbf{V}_{C,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I}$ چون در تشدید $1/\omega_0 C = \omega_0 L$ است درمی‌یابیم که

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} \qquad (۵)$$

و

$$\mathbf{I}_{C,0} + \mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{I}_{LC} = 0$$

پس جریان خالص در ترکیب LC صفر است. حداکثر مقدار پاسخ و فرکانسی که در آن این حداکثر رخ می‌دهد، همیشه به سادگی به دست نمی‌آیند. در مدارهای تشدیدی که شکل استاندارد ندارند، دامنه پاسخ به صورت تحلیلی بیان می‌شود و این فرم معمولاً به صورت مجذور مجموع مربعات قسمت‌های حقیقی و موهومی پاسخ می‌باشد. سپس باید از عبارات حاصل مشتق بگیریم، مشتق را برابر صفر قرار دهیم و فرکانس ماکزیمم پاسخ را به دست آوریم. با گذاشتن این فرکانس در رابطه پاسخ، مقدار ماکزیمم پاسخ به دست می‌آید. می‌توانید روش فوق‌الذکر را در مورد همین مثال به‌عنوان تمرین اعمال نمایید، ولی این کار چندان هم لازم نیست.

ضریب کیفیت

باید تأیید کرد که هر چند ارتفاع منحنی پاسخ فقط به R وابسته است ولی پهنی یا شیب دامنه‌های پاسخ هم به R و هم به مقادیر L و C بستگی دارد. به زودی عرض پاسخ را با کمیت تعریف شده دقیق‌تری به نام **عرض باند** بیان خواهیم کرد ولی بهتر است که ابتدا آن را با پارامتر مهمتری به نام **ضریب کیفیت** Q مرتبط سازیم.

خواهیم دید که تیزی منحنی هر مدار تشدید با حداکثر انرژی ذخیره شده در مدار در مقایسه با انرژی از دست رفته در حین یک پریود پاسخ تعیین می‌شود. ما Q را چنین تعریف می‌کنیم:

دقت کنید که ضریب کیفیت را با بار یا توان رآکتیو که همگی با Q نشان داده می‌شوند، اشتباه نکنید.

$$Q = \text{ضریب کیفیت} = 2\pi\,\frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در هر پریود}} \qquad (۶)$$

ثابت تناسب 2π به این علت در تعریف گنجانده شد تا عبارت حاصل برای Q ساده‌تر شود. چون انرژی فقط در القاگر و خازن ذخیره می‌شود و فقط در مقاومت تلف می‌گردد، پس باید Q را برحسب انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در این دو عنصر و انرژی متوسط تلف شده در مقاومت بیان نماییم.

$$Q = 2\pi\,\frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{max}}{P_R T}$$

که T تناوب یا پریود فرکانس موج سینوسی است که Q در آن محاسبه می‌شود.

اکنون بگذارید این تقریب را به مدار موازی RLC شکل ۱-۱۶ اعمال کنیم و مقدار Q را در فرکانس تشدید محاسبه نماییم. این مقدار از Q را Q_0 می‌خوانند. تابع جریان تحریک زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$i(t) = \mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

پاسخ ولتاژ متناظر آن در حالت تشدید برابر است با:

$$v(t) = Ri(t) = R\mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

پس انرژی ذخیره شده در خازن چنین است:

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2}\cos^2 \omega_0 t$$

انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر با رابطه زیر داده می‌شود:

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{L}\int v\,dt\right)^2 = \frac{1}{2L}\left[\frac{R\mathbf{I}_m}{\omega_0}\sin \omega_0 t\right]^2$$

بنابراین

$$w_L(t) = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2}\sin^2 \omega_0 t$$

پس انرژی لحظه‌ای کل ثابت است.

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2}$$

لذا این مقدار ثابت باید حداکثر هم باشد. برای یافتن انرژی از دست رفته در یک دوره تناوب در مقاومت، توان متوسط جذب شده را به دست می‌آوریم (بخش ۲-۱۱).

$$P_R = \tfrac{1}{2}\mathbf{I}_m^2 R$$

اگر رابطه فوق را در یک پریود ضرب کنیم، داریم:

$$P_R T = \frac{1}{2f_0}\mathbf{I}_m^2 R$$

به این ترتیب ضریب کیفیت در تشدید به دست می‌آید:

$$Q_0 = 2\pi\,\frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C/2}{\mathbf{I}_m^2 R/2f_0}$$

یا

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC \qquad (۷)$$

این رابطه و معادله ۸ فقط برای مدار ساده RLC شکل ۱-۱۶ معتبر است. عبارت معادل و مفید دیگری برای Q با یک جایگزینی ساده به دست می‌آید.

$$Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{|X_{C,0}|} = \frac{R}{|X_{L,0}|} \qquad (۸)$$

بنابراین برای این مدار خاص، کاهش مقاومت، Q_0 را کاهش می‌دهد. هر چقدر مقاومت کمتر شود، انرژی بیشتری در عنصر تلف می‌گردد. افزایش ظرفیت خازنی، Q_0 را افزایش می‌دهد، ولی افزایش القاکنایی، Q_0 را کاهش خواهد داد. البته این عبارات این مطالب برای مداری که در فرکانس رزنانس کار کند صحت دارد.

تعابیر دیگری از Q

در مدار تشدید موازی، ثابت بدون بعد Q_0 تابعی از هر سه عنصر مدار است. با این وجود مفهوم Q محدود به یک مدار است و یا حتی سیستم‌های الکتریکی نیست. این ضریب در هر پدیده تشدیدی مفید است. مثلاً یک توپ گلف را در نظر بگیرید. اگر وزن توپ را W فرض کنیم و آن را از ارتفاع h_1 در بالای یک سطح افقی صاف رها کنیم، توپ پس از برخورد تا ارتفاع h_2 که کمتر از h_1 است بالا خواهد آمد. انرژی اولیه توپ Wh_1 و انرژی تلف شده در یک پریود $W(h_1 - h_2)$ می‌باشد پس ضریب Q_0 برابر است با:

$$Q_0 = 2\pi \frac{h_1W}{(h_1 - h_2)W} = \frac{2\pi h_1}{h_1 - h_2}$$

یک توپ گلف با کیفیت عالی به ارتفاع اولیه خود باز می‌گردد و دارای Q_0 بینهایت است. برای توپ‌های معمولی این مقدار حدود 35 می‌باشد. باید توجه کرد که Q در این مثال مکانیکی از پاسخ طبیعی محاسبه شده است و نه از پاسخ واداشته. Q در یک مدار الکتریکی هم ممکن است از اطلاعات پاسخ طبیعی حاصل گردد و آن را می‌توان در معادلات (۱۰) و (۱۱) که در زیر آمده مشاهده کرد.

تفسیر مفید دیگر Q هنگامی حاصل می‌شود که جریان‌های القاگر و خازن در معادله (۵) را مورد بررسی قرار دهیم:

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} = jQ_0\mathbf{I} \qquad (۹)$$

توجه کنید که جریان خازن یا القاگر برابر است با Q_0 ضربدر منبع جریان که با یکدیگر $180°$ اختلاف فاز دارند. بنابراین اگر در فرکانس تشدید به مدار موازی با $Q_0 = 50$ جریان 2 mA را اعمال کنیم، در مقاومت 2 mA و در خازن و القاگر 100 mA جریان خواهیم داشت. بنابراین یک مدار تشدید موازی مانند یک تقویت کننده جریان وابسته به‌عنوان تقویت کننده توان عمل نمی‌کند، زیرا شبکه یک شبکه غیرفعال است.

اکنون مایلیم پارامترهای مختلف مربوط به مدار تشدید موازی را با یکدیگر مرتبط سازیم. سه پارامتر α، ω_d و ω_0 را قبلاً در بحث پاسخ طبیعی معرفی کردیم. بنا به تعریف، تشدید اساساً مربوط به پاسخ واداشته است، زیرا برحسب امپدانس ورودی (مقاومت خالص) بیان می‌شود و امپدانس ورودی هم فقط در حالت ماندگار سینوسی مفهوم دارد. دو پارامتر مهم در یک مدار تشدید شاید فرکانس تشدید ω_0 و ضریب کیفیت Q_0 باشد. می‌توان ضریب نمایی میرایی و فرکانس تشدید طبیعی را برحسب ω_0 و Q_0 بیان کرد:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0 / \omega_0 C)C}$$

یا

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \qquad (۱۰)$$

و

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

یا

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \qquad (۱۱)$$

ضریب میرایی

به منظور مراجعات بعدی بهتر است یک رابطه دیگر برحسب ω_0 و Q_0 بنویسیم. جمله درجه دوم در مخرج معادله (۴)،

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

در مبحث نظریه سیستم‌ها و تئوری کنترل خودکار، عبارت فوق را با استفاده از پارامتر بدون بعدی به نام **ضریب میرایی** ζ (زتا) می‌نویسند.

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

مقایسه این عبارات اجازه می‌دهد تا ζ با دیگر پارامترها ارتباط یابد.

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \qquad (۱۲)$$

مثال ۱-۱۶

مقادیر عددی ω_0، α، ω_d و R را برای یک مدار تشدید با $L = 2.5$ mH، $Q_0 = 5$ و $C = 0.01\ \mu F$ بنویسید.

از معادله (۲) داریم $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} = 200$ krad/s و $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 31.8$ kHz.
با استفاده از معادله (۱۰) به سرعت می‌توان α را به دست آورد.

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{2 \times 10^5}{(2 \times 5)} = 2 \times 10^4 \text{ Np/s}$$

اکنون به سراغ رابطه قدیمی خود در فصل ۹ می‌رویم.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

به این ترتیب درمی‌یابیم که:

$$\omega_d = \sqrt{(2 \times 10^5)^2 - (2 \times 10^4)^2} = 199.0 \text{ krad/s}$$

بالاخره مقدار مقاومت موازی را نیاز داریم که معادله (۷) آن را به ما خواهد داد:

$$Q_0 = \omega_0 RC$$

بنابراین

$$R = \frac{Q_0}{\omega_0 C} = \frac{5}{(2 \times 10^5 \times 10^{-8})} = 2.50 \text{ k}\Omega$$

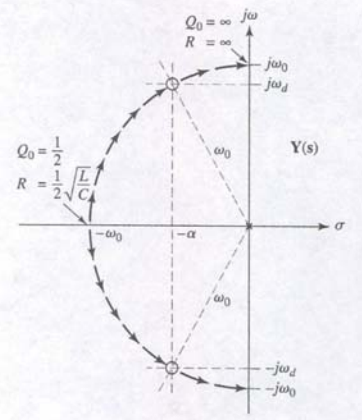
تمرین

۱۶-۱ یک مدار تشدید موازی متشکل از $R = 8$ kΩ، $L = 50$ mH و $C = 80$ nF می‌باشد. مطلوب است (الف) ω_0، (ب) Q_0، (ج) ω_d، (د) α و (هـ) ζ.

جواب ۱-۱۶: 15.811 krad/s، 10.12، 15.792 krad/s، 781 Np/s و 0.0494.

۱۶-۲ در مدار تشدید موازی که $\omega_0 = 1000$ rad/s، $\omega_d = 998$ rad/s و $Y_{in} = 1$ mS در حالت تشدید می‌باشد، مقادیر R، L و C را در آن به دست آورید.

جواب ۲-۱۶: 1000 Ω، 126.4 mH و 7.91 μF.



شکل ۴ـ۱۶ دو صفر ادمیتانس $Y(s)$ در $s = -\alpha \pm j\omega_d$ قرار دارند و با افزایش R از $\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ تا ∞ در مسیر نشان‌داده‌شده جابه‌جا می‌شوند.

اکنون اجازه دهید تا Q_0 را برحسب مکان قطب‌ها و صفرهای ادمیتانس $Y(s)$ یک مدار RLC موازی بیان کنیم. ω_0 را ثابت نگه می‌داریم. این کار را مثلاً با تغییر R و ثابت نگهداشتن L و C می‌توان انجام داد. با افزایش Q_0 روابط مربوط به α، Q_0 و ω_0 نشان می‌دهد که صفرها به محور $j\omega$ نزدیک‌تر می‌شوند. همچنین ملاحظه می‌شود که صفرها هم از محور حقیقی σ دور می‌شوند. طبیعت دقیق حرکت وقتی روشن‌تر می‌شود که به خاطر آوریم برای تعیین محل $s = j\omega_0$ روی محور $j\omega$ باید یک دایره به مرکز مبدأ رسم کنیم تا از یک صفر بگذرد و به محور مثبت $j\omega$ برسد. چون ω_0 ثابت نگه‌داشته می‌شود، شعاع باید ثابت باشد و بنابراین صفرها باید با افزایش Q_0 به سمت محور مثبت $j\omega$ سوق یابند.

دو صفر در شکل ۴-۱۶ مشخص شده‌اند و پیکان‌ها مسیری که با افزایش R اختیار می‌شود را نشان می‌دهند. وقتی R بینهایت است، Q_0 هم بینهایت می‌باشد و دو صفر در $s = \pm j\omega_0$ روی محور $j\omega$ خواهد بود. با کاهش R، صفرها به سمت محور σ در روی قوس حرکت می‌کنند و در روی آن به هم پیوسته و جفت صفر را در $s = -\omega_0$ به وجود می‌آورند و در این نقطه $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ یا $Q_0 = \frac{1}{2}$ می‌باشد. این وضعیت متناظر با حالت میرای بحرانی است که در آن $\omega_d = 0$ و $\alpha = \omega_0$ بود. مقادیر کمتر R و نیز Q_0 کمتر موجب می‌شوند تا صفرها جدا شوند و روی محور منفی σ در دو جهت حرکت کنند ولی این مقادیر کم Q_0 متعلق به مدارهای تشدید نیستند و لزومی ندارد آن‌ها را بیش از این ردیابی کنیم.

بعداً معیار $Q_0 > 5$ را برای توصیف یک مدار با Q بالا به کار خواهیم برد. وقتی $Q_0 = 5$ باشد، صفرها در $s=-0.1\,\omega_0 \pm j\,0.995\,\omega_0$ بوده و بنابراین ω_0 و ω_d با هم فقط نیم درصد اختلاف دارند.

۱۶-۲ عرض باند و مدارهای Q بالا

بحث خود را در مورد تشدید موازی با تعریف فرکانس و عرض باند نصف توان ادامه می‌دهیم و سپس بهره‌برداری خوبی از این مفاهیم در تهیه اطلاعاتی راجع‌به پاسخ تقریبی مدارهایی با Q بالا به دست می‌آوریم. اکنون "پهنای" منحنی پاسخ مانند آن‌چه در شکل ۳-۱۶ ملاحظه شد را بهتر می‌توان تعریف کرد و به Q_0 ارتباط داد. ابتدا دو فرکانس نصف توان ω_1 و ω_2 را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که در ازای آن‌ها دامنه ادمیتانس ورودی مدار تشدید موازی $\sqrt{2}$ برابر ادمیتانس در حالت تشدید است. چون منحنی پاسخ شکل ۳-۱۶ ولتاژ تولید شده در دو سر مدار موازی به وسیله منبع جریان سینوسی تابعی از فرکانس است، فرکانس‌های نصف توان نقاطی را نشان می‌دهند که در آن‌ها این ولتاژ $1/\sqrt{2}$ یا 0.707 برابر ولتاژ در حالت تشدید است. برای امپدانس ورودی هم رابط مشابهی وجود دارد. ما ω_1 را فرکانس نصف توان پایین و ω_2 را فرکانس نصف توان بالا می‌نامیم.

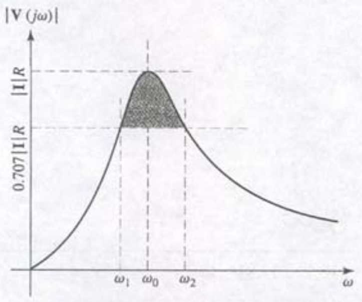
دلیل این نامگذاری این‌است‌که اگر ولتاژ 0.707 برابر ولتاژ تشدید باشد، مجذور آن نصف مجذور ولتاژ تشدید است. پس توانی که در این فرکانس به مقاومت داده می‌شود، نصف توانی است که در فرکانس تشدید داده می‌شود.

عرض باند

پهنا یا عرض باند (نصف توان) یک مدار تشدید، تفاوت دو فرکانس نصف توان است.

$$\mathcal{B} \equiv \omega_2 - \omega_1 \qquad (۱۳)$$

سعی می‌کنیم عرض باند را پهنای منحنی پاسخ تصور کنیم حتی اگر منحنی از $\omega = 0$ تا $\omega = \infty$ وسعت داشته باشد. دقیق‌تر بگوییم پهنای باند نصف توان در حقیقت قسمتی از منحنی است که دامنه پاسخ در آن از 70.7% ماکزیمم پاسخ بزرگتر یا مساوی آن است (شکل ۵ـ۱۶).



شکل ۵ـ۱۶ پهنای باند پاسخ مدار هاشور خورده است. این قسمت متعلق به ناحیه‌ای از پاسخ است که 70.7% از حداکثر مقدار ماکزیمم را دارد.

اکنون بیایید پهنای باند را برحسب Q_0 و فرکانس تشدید بیان کنیم. برای انجام آن ابتدا ادمیتانس مدار RLC موازی را می‌نویسیم.

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

برحسب Q_0 داریم:

$$Y = \frac{1}{R} + j\,\frac{1}{R}\left(\frac{\omega\omega_0 CR}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega\omega_0 L}\right)$$

یا

$$Y = \frac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \qquad (۱۴)$$

دوباره می‌بینیم که اندازه ادمیتانس در نقطه تشدید برابر $\frac{1}{R}$ است و اندازه ادمیتانس $\sqrt{2}/R$ در فرکانسی وجود دارد که کمیت موهومی داخل کروشه برابر 1 باشد. پس:

$$Q\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = 1 \qquad و \qquad Q\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = -1$$

به خاطر داشته باشید که $\omega_2 > \omega_0$ و $\omega_1 < \omega_0$.

پس از حل داریم و

$$\omega_1 = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} - \frac{1}{2Q_0}\right] \qquad (۱۵)$$

$$\omega_2 = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} + \frac{1}{2Q_0}\right] \qquad (۱۶)$$

گرچه عبارات فوق چندان ساده نیستند، ولی تفاضل آن‌ها فرمول خیلی ساده‌ای را برای عرض باند فراهم می‌سازد:

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

با ضرب معادله (۱۵) در معادله (۱۶) می‌توان نشان داد که ω_0 دقیقاً میانگین هندسی فرکانس‌های نصف توان است. یعنی:

$$\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$$

یا

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

مدارهایی که Q_0 بالاتری دارند عرض باندشان باریک است، یعنی منحنی پاسخ آن‌ها تیزتر است. این مدارها قابلیت گزینش فرکانسی بیشتری و یا ضریب کیفی بزرگتری را دارا هستند.

تقریب برای مدارهای با Q

بسیاری از مدارهای تشدید عملاً طوری ساخته می‌شوند تا Q_0 بزرگتری داشته باشند تا از مزیت عرض باند باریک و قابلیت گزینش فرکانسی بیشتری استفاده شود. وقتی Q_0 بزرگتر از 5 باشد، ممکن است تقریب‌های خوبی برای فرکانس‌های نصف توان بالا و پایین و پاسخ در حوالی فرکانس تشدید داشت. بگذارید مدار با Q بزرگتر مثلاً مساوی یا بیش از 5 انتخاب شود. آرایش قطب و صفر $Y(s)$ برای مدار RLC با Q_0 بزرگتر از 5 در شکل ۶-۱۶ دیده می‌شود. چون:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

سپس

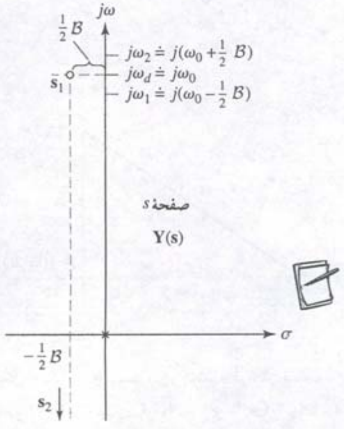
$$\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

و محل در صفر s_1 و s_2 می‌توانند چنین تقریب شوند:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \approx -\frac{1}{2}\mathcal{B} \pm j\omega_d$$

به طریقی مشابه محل دو فرکانس نصف توان روی محور $j\omega$ را می‌توان چنین به دست آورد:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right] \approx \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2Q_0}\right)$$



شکل ۶ـ۱۶ آرایش قطب ـ صفر $Y(s)$ برای یک مدار موازی RLC. دو صفر که دقیقاً در $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ Np/s (یا rad/s) و در سمت چپ محور $j\omega$ واقع است. این فاصله از محور σ برابر $j\omega_0$ rad/s فاصله دارد. فاصله دو فرکانس نصف توان دقیقاً $\mathcal{B}$ rad/s و هر یک تا فرکانس تشدید حدوداً $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ فاصله دارند.

یا

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B} \qquad (۱۷)$$

بنابراین در یک مدار با Q بزرگ فرکانس‌های نصف توان تقریباً به فاصله مساوی از فرکانس تشدید بوده و این فاصله نصف عرض باند است. این مطلب در شکل ۶-۱۶ ملاحظه می‌شود.

رابطه تقریبی برای ω_1 و ω_2 در معادله (۱۷) را می‌توان با هم جمع کرد تا رابطه واسط حسابی ω_0 با ω_1 و ω_2 در مدارهای Q بزرگ ملاحظه شود.

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

اکنون بر روی محور $j\omega$ نقطه‌ای را تصور می‌کنیم که کمی از $j\omega_0$ بالاتر باشد. برای تعیین ادمیتانس ناشی از شبکه RLC موازی در این فرکانس، سه بردار از فرکانس‌های بحرانی به نقطه تست رسم می‌نماییم. اگر نقطه تست به $j\omega_0$ نزدیک باشد، فاصله قطب تا آن تقریباً $j\omega_0$ و فاصله صفر پایین تا آن تقریباً $j2\omega_0$ خواهد بود. بنابراین ادمیتانس تقریباً برابر است با

$$Y(s) \approx C\,\frac{(j2\omega_0)(s - s_1)}{j\omega_0} \approx 2C(s - s_1) \qquad (۱۸)$$

که C مطابق معادله (۴)، ظرفیت خازن است. برای این‌که بتوانیم تقریب خوبی از $(s - s_1)$ به دست آوریم، نواحی حول صفر s_1 را در شکل ۷-۱۶ بزرگ می‌کنیم.

در مختصات کارتزین داریم:

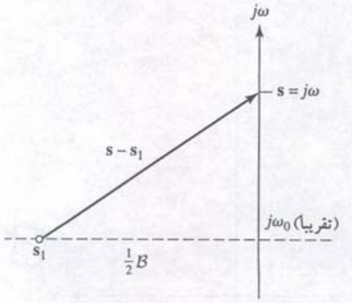
$$s - s_1 \approx \frac{1}{2}\mathcal{B} + j(\omega - \omega_0)$$

اگر ω_0 را با ω_d جایگزین نماییم، این عبارت دقیق است. اکنون این معادله را در مقدار تقریبی Y(s)، معادله (۱۸) می‌گذاریم و از $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ فاکتور می‌گیریم.

$$Y(s) \approx 2C\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}\right)\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

یا

$$Y(s) \approx \frac{1}{R}\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$



شکل ۷-۱۶ قسمت بزرگ‌شدهٔ آرایش قطب - صفر Y(s) یک مدار RLC موازی با Q_0 بزرگ.

کسر $(\omega - \omega_0) / (\frac{1}{2}\mathcal{B})$ را «تعداد نیم عرض باندها از فرکانس تشدید» تفسیر کرده و با N نشان می‌دهیم. پس:

$$Y(s) \approx \frac{1}{R}(1 + jN) \qquad (۱۹)$$

که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \qquad (۲۰)$$

است. در فرکانس نصف توان بالا، $\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}\mathcal{B}$، $N = +1$ است و ما نصف عرض باند بالای فرکانس تشدید قرار داریم. در فرکانس نصف توان پایین $\omega \approx \omega - \frac{1}{2}\mathcal{B}$، $N = -1$ است که ما در نصف عرض باند پایین‌تر از فرکانس تشدید واقعیم. معادله (۱۹) برای استفاده خیلی ساده‌تر از روابط دقیق قبلی است. این رابطه اندازه ادمیتانس را چنین به دست می‌دهد:

$$|Y(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}$$

ضمن این‌که زاویه $Y(j\omega)$ با عکس تانژانت N داده می‌شود:

$$\text{ang}\, Y(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

مثال ۲-۱۶

مقدار تقریبی ادمیتانس شبکه RLC موازی را که در آن $R = 40\ k\Omega$، $L = 1H$ و $C = \frac{1}{64}\ \mu F$ است، معین کنید به شرطی که فرکانس کار $\omega = 8.2\ krad/s$ باشد.

- **اهداف مسئله را شناسایی کنید.**

از ما خواسته شده است تا مقدار تقریبی ادمیتانس Y(s) را در $\omega = 8.2\ krad/s$ برای یک شبکه ساده RLC حساب کنیم. این بدان معنی است که Q_0 حداقل برابر با 5 است و فرکانس کار چندان از فرکانس تشدید دور نیست.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

مقادیر R، L و C و نیز فرکانسی که در آن Y(s) محاسبه شده است، داده شده‌اند. این مقادیر برای محاسبه دقیق یا تقریبی ادمیتانس کافی است.

- **ارائه طرح.**

در به کارگیری عبارت تقریبی برای ادمیتانس، ابتدا باید ضریب کیفیت Q_0 و عرض باند را معین کنیم، در فرکانس تشدید ω_0 از معادله به صورت $1/\sqrt{LC} = 8\ krad/s$ به دست می‌آید. بنابراین $Q_0 = \omega_0 RC = 5$ و عرض باند $\omega_0 / Q_0 = 1.6\ krad/s$ خواهد شد. مقدار Q_0 برای این مدار کفایت استفاده از تقریب Q بالا را می‌نماید.

- **معادلات مناسب را به دست آورید.**

معادله (۱۹) بیان می‌دارد که

$$Y(s) \approx \frac{1}{R}(1 + jN)$$

بنابراین

$$|Y(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2} \quad \text{و} \quad \text{ang}\, Y(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

ما هنوز به N نیاز داریم. این مقدار به ما می‌گوید چند نصف عرض باند ω از فرکانس تشدید ω_0 فاصله داریم:

$$N = (8.2 - 8) / 0.8 = 0.25$$

- **اقدام به حل.**

اکنون آماده‌ایم روابط تقریبی خود را برای اندازه و زاویه ادمیتانس شبکه به کار ببریم.

$$\text{ang}\ Y \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04°$$

و

$$|Y| \approx 25\sqrt{1 + (0.25)^2} = 25.77\ \mu S$$

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

محاسبه دقیقی از ادمیتانس معادله (۱) نشان می‌دهد که

$$Y(j8200) = 25.75\angle 13.87°\ \mu S$$

بنابراین روش تقریبی منجر به مقادیری از اندازه و زاویه ادمیتانس منتهی می‌شود که نسبتاً در این فرکانس دقیق‌اند (بهتر از 2%).

تمرین

۱۶-۳ یک مدار تشدید موازی با Q نسبتاً بالا دارای $f_0 = 440\ Hz$ با $Q_0 = 6$ است. معادلات (۱۵) و (۱۶) را برای تهیه مقادیر (الف) f_1 و (ب) f_2 به کار ببرید. اکنون معادله (۱۷) را برای محاسبه تقریبی مقادیر (ج) f_1 و (د) f_2 به کار ببرید.

جواب: 404.9 Hz، 478.2 Hz، 403.3 Hz و 476.7 Hz.

هدف استفاده از این تقریب‌ها برای مدارهای Q بزرگ نزدیک تشدید معتبر است. قبلاً توافق کردیم که معیار بالا بودن Q، $Q_0 \geq 5$ باشد، ولی نگفتیم منظور از نزدیک‌بودن به فرکانس تشدید چیست؟ می‌توان نشان داد که برای خطای کمتر از 5% باید $Q_0 \geq 5$ و $0.9\ \omega_0 \leq \omega \leq 1.1\ \omega_0$ در نظر گرفته شود. گرچه این عرض باند باریک ممکن است کوچک به نظر برسد، ولی در مقایسه با فرکانس‌های مورد علاقه ما می‌تواند زیاد هم باشد. مثلاً رادیوهای AM معمولاً در فرکانس تشدید 455 kHz تنظیم شده و عرض باند آن 10 kHz است. پس Q_0 آن 45.5 است. یعنی فرکانس‌های نصف توان حدود 450، 460 kHz می‌باشد. با این وجود تقریب مابین 409.5 تا 500.5 kHz معتبر است (با خطایی کمتر از 5%) یعنی تقریباً بخش عمده منحنی را شامل می‌شود. تنها انتهای منحنی پاسخ خارج این ناحیه واقع است و به کار بردن تقریب فوق در آن محدوده خطای بزرگی تولید می‌کند.

بحث درباره مدار تشدید موازی را با مروری بر نتایج به دست آمده خاتمه می‌دهیم:

- فرکانس تشدید ω_0 فرکانسی است که در آن بخش موهومی ادمیتانس ورودی و یا زاویه ادمیتانس صفر می‌شود. آنگاه $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ خواهد بود.
- Q_0 کیفیت مدار را تعیین می‌کند و 2π برابر نسبت انرژی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در هر پریود با تناوب است. از این تعریف نتیجه می‌شود که $Q_0 = \omega_0 RC$.
- دو فرکانس نصف توان ω_1 و ω_0 فرکانس‌هایی هستند که در آن‌ها دامنه ادمیتانس $\sqrt{2}$ برابر حداقل مقدار ادمیتانس است. در این فرکانس‌ها پاسخ ولتاژ 70.7 درصد ماکزیمم پاسخ ولتاژ می‌باشد.
- مقدار دقیق فرکانس‌های ω_1 و ω_2 عبارتند از:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

- عبارات تقریبی برای ω_1 و ω_2 (Q بالا) عبارتند از:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- پهنای باند نصف توان $\mathcal{B}$ برابر است با:

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- ادمیتانس ورودی هم ممکن است برای Q بالا به صورت تقریب بیان گردد:

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1+jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

که

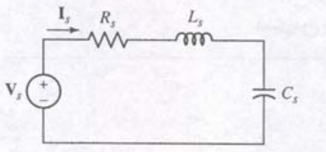
$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

این تخمین برای $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$ معتبر است.

۳-۱۶ تشدید سری

گرچه ممکن است کاربرد مدار RLC سری کمتر از مدار RLC موازی باشد، ولی هنوز ارزش بررسی دارد. ما مدار شکل ۸-۱۶ را ملاحظه خواهیم کرد. باید متذکر شد که برای تمام عناصر زیرنویس s در نظر گرفته شده است تا هنگام مقایسه با عناصر مدار موازی اشتباهی رخ ندهد.

بحث ما در مورد مدار تشدید موازی دو بخش نسبتاً طولانی را به خود اختصاص داد. می‌توانیم مدار سری را هم به همین ترتیب بررسی کنیم، ولی بهتر است از مفهوم دوگانگی یا همزادی استفاده کرده و از تکرارهایی بیمورد خودداری نماییم. برای سهولت، بگذارید بر روی نتایج آخرین پاراگراف تکیه کرده و آن را با زبان دوگانگی در مورد مدار RLC سری هم بیان کنیم، چراکه نتایج مهمی در آن‌جا به دست آمد.



شکل ۸-۱۶ مدار تشدید سری.

جمع‌بندی خود را در مورد مدار تشدید سری با خلاصه کردن مطالب و یافته‌های مهم انجام می‌دهیم:

این پاراگراف مشابه پاراگراف آخر بخش ۲-۱۶ است ولی مطالب RLC موازی با زبان دوگانگی به RLC سری تبدیل شده است.

- فرکانس تشدید ω_{0s} فرکانسی است که در آن امپدانس ورودی یا زاویه امپدانس صفر می‌شود. پس $\omega_{0s} = 1/\sqrt{L_sC_s}$.
- ضریب کیفیت مدار Q_{0s} به صورت 2π ضربدر نسبت انرژی ماکزیمم حداکثر به انرژی تلف شده در هر پریود در مدار است. با این تعریف می‌بینیم که $Q_{0s} = \omega_{0s} L_s / R_s$.
- دو فرکانس نصف توان ω_{1s}، ω_{0s} به‌عنوان فرکانسی تعریف می‌شوند که در آن‌ها مقدار امپدانس $\sqrt{2}$ برابر اندازه امپدانس مینیمم است. همچنین در این فرکانس‌ها پاسخ جریان 70.7 درصد پاسخ حداکثر می‌باشد.
- عبارات دقیق برای ω_1 و ω_2 برابر است با:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

- رابطه تقریبی برای ω_1 و ω_2 (Q_0-بالا) عبارتند از:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- $\mathcal{B}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- ادمیتانس ورودی هم می‌تواند برای Q_{0s} بالا به صورت تقریبی زیر بیان شود:

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1+jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

این تخمین برای $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$ معتبر است.

ز این‌جا به بعد دیگر مقادیر مدار سری را با زیرنویس s مشخص نمی‌کنیم مگر این‌که ضرورتی وجود داشته باشد.

مثال ۳-۱۶

ولتاژ $v_s = 100\cos\omega t$ mV به یک مدار تشدید سری متشکل از یک مقاومت 10 Ω، یک خازن 200 nF و یک القاگر 2 mH وصل شده است. هر دو روش دقیق و تقریبی را برای محاسبه دامنه جریان به‌کار ببرید به شرطی که $\omega = 48$ krad/s باشد.

رکانس تشدید مدار با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2\times10^{-3})(200\times10^{-9})}} = 50\ \text{krad/s}$$

جون در فرکانس $\omega = 48$ krad/s کار می‌کنیم که در فاصله 10% از فرکانس تشدید ست، منطقی است تا روابط تقریبی خود را برای تخمین امپدانس شبکه به‌کار ببریم، به شرطی که با Q بالا کار کنیم.

$$\mathbf{Z}_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

که N پس از تعیین Q_0 محاسبه می‌شود. چون مدار سری است. پس:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50 \times 10^3)(2 \times 10^{-3})}{10} = 10$$

که به معنی Q بالا است. پس :

$$\mathcal{B} = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50 \times 10^3}{10} = 5 \text{ krad/s}$$

تعداد نصف عرض باند بالاتر از تشدید (N) عبارت است از:

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\mathcal{B}/2} = \frac{48-50}{2.5} = -0.8$$

بنابراین:

$$\mathbf{Z}_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2}\,\angle \tan^{-1} N = 12.81 \angle -38.66^\circ\ \Omega$$

اندازه تقریبی جریان عبارت است ز :

$$\frac{|\mathbf{V}_s|}{|\mathbf{Z}_{eq}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806 \text{ mA}$$

با استفاده از عبارت دقیق داریم $\mathbf{I} = 7.746 \angle 39.24^\circ$ mA. پس :

$$|\mathbf{I}| = 7.746 \text{ mA}$$

تمرین

۱۶-۴ یک مدار تشدید سری دارای عرض باند 100 Hz و حاوی یک القاگر 20 mH و خازن 2 μF است. مطلوب است (الف) f_0، (ب) Q_0، (ج) Z_{in} در تشدید و (د) f_2.
جواب: 796 Hz، 796، 12.57 + j0 Ω و 846 Hz.

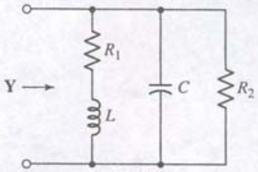
شاخصه مدار تشدید سری، امپدانس حداقل آن در حالت تشدید است، در حالی که مدار تشدید موازی، امپدانس حداکثر را در تشدید دارا است. در مدار موازی جریان‌های القاگر و خازنی، Q_0 برابر جریان منبع است. در مدارهای سری ولتاژ القاگر و خازن، Q_{0s} برابر ولتاژ منبع می‌باشد. بنابراین مدار سری تقویت ولتاژی در تشدید ایجاد می‌کند.

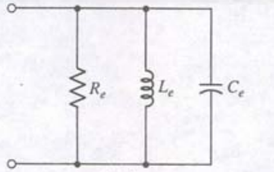
در جدول ۱-۱۶، مقایسه‌ای از نتایج تشدید سری و موازی و نیز عبارات دقیق و تقریبی ارائه شده است.

۱۶-٤ دیگر فرم‌های تشدید

مدارهای RLC موازی و سری در بخش قبل، از نوع ایده‌آل بودند. این نوع مدارها چیزی جز تقریبی از یک مدار فیزیکی متشکل از یک سیم‌پیچ، یک مقاومت کربنی و یک خازن تانتالیم سری یا موازی نیستند. دقت این مدل ایده‌آل به گستره فرکانس کار، Q مدار، مواد به کار رفته در عناصر فیزیکی، سایز عناصر و فاکتورهای دیگر بستگی دارد. ما در این‌جا تکنیک‌های تعیین بهترین مدل را برای یک سیستم فیزیکی مطالعه نمی‌کنیم زیرا در این صورت دانستن نظریه میدان‌های الکترومغناطیس و خواص مواد موردنیاز است. با این وجود می‌خواهیم مسائل پیچیده را به یکی از دو مدل ساده سری و موازی بدل سازیم.

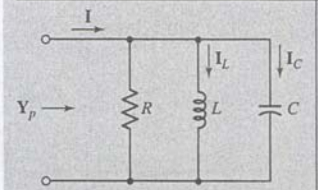
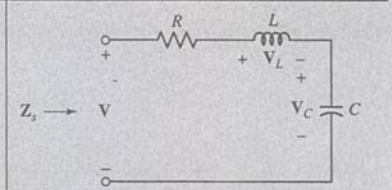
شبکه شکل ۹-۱۶(الف) نسبتاً مدل دقیقی برای ترکیب موازی القاگر، خازن و مقاومت است مقاومت R_1 یک مقاومت فرضی است که تلفات اهمی، تلفات هسته‌ای و تلفات تشعشعی القاگر فیزیکی را نشان می‌دهد. تلفات دی‌الکتریک خازن و مقاومت فیزیکی مدار RLC با مقاومت R_2 نشان داده شده است. در این مدل نمی‌توان عناصر را با هم ترکیب کرده و مدل ساده‌تری که در تمام فرکانس‌ها معادل مدار اصلی باشد، به دست آورد. با این وجود، نشان خواهیم داد که معادل ساده‌تری می‌توان ساخت تا در یک باندی از فرکانس که معمولاً به قدر کافی عریض است، معتبر باشد و همه فرکانس موردنظر را پوشش دهد. این مدار معادل چیزی شبیه به شکل ۹-۱۶(ب) خواهد بود.





شکل ۹-۱۶ (الف) مدل مفیدی از یک شبکه فیزیکی که از عناصر فیزیکی موازی القاگر، خازن و مقاومت ساخته شده است. (ب) مداری که می‌تواند در یک باند فرکانس باریک معادل مدار بخش (الف) باشد.

جدول ۱-۱۶ خلاصه‌ای از مدارهای تشدید.

	
$Q_0 = \omega_0 RC \quad \alpha = \frac{1}{2RC}$	$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$
$\lvert\mathbf{I}_L(j\omega_0)\rvert = \lvert\mathbf{I}_C(j\omega_0)\rvert = Q_0\lvert\mathbf{I}(j\omega_0)\rvert$	$\lvert\mathbf{V}_L(j\omega_0)\rvert = \lvert\mathbf{V}_C(j\omega_0)\rvert = Q_0\lvert\mathbf{V}(j\omega_0)\rvert$
$\mathbf{Y}_p = \frac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$	$\mathbf{Z}_s = R\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

عبارات دقیق

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \quad \mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha$$

عبارات تقریبی

$$(Q_0 \geq 5 \quad 0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0)$$

$$\omega_d \approx \omega_0 \quad \omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

$$\omega_0 \approx \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\mathbf{Y}_p \approx \frac{\sqrt{1+N^2}}{R}\angle \tan^{-1} N \qquad \mathbf{Z}_s \approx R\sqrt{1+N^2}\angle \tan^{-1} N$$

قبل از این‌که چگونگی پی‌ریزی چنین مدار معادلی را بیاموزیم، بگذارید ابتدا مدار شکل ۹-۱۶(الف) را ملاحظه کنیم. فرکانس زاویه‌ای تشدید برای این شبکه برابر $1/\sqrt{LC}$ نیست. ولی اگر R_1 به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه فرکانس تشدید به مقدار فوق نزدیک خواهد شد. تعریف تشدید تفاوتی نمی‌کند و می‌توان فرکانس تشدید را با صفر کردن مقدار موهومی ادمیتانس ورودی به دست آورد:

$$\text{Im}\{\mathbf{Y}(j\omega)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right\} = 0$$

$$\text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L}\right\}$$
$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right\} = 0$$

درنتیجه، شرط تشدید چنین است:

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

و بنابراین

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2} \qquad (۲۱$$

توجه کنید که ω_0 کمتر از $1/\sqrt{LC}$ است، ولی در صورت کوچک بودن R_1/L، ω_0 به $1/\sqrt{LC}$ خیلی نزدیک خواهد شد.

حداکثر مقدار امپدانس ورودی هم شایان توجه است. مقدار آن R_2 نیست و در ω_0 (یا در $\omega = 1/\sqrt{LC}$) هم رخ نمی‌دهد. اثبات این عبارات را نشان نمی‌دهیم زیرا به سرعت به عبارات جبری پیچیده تبدیل می‌شوند. با این وجود موضوع سراسر است. بگذارید موضوع را با یک مثال روشن کنیم.

مثال ۴-۱۶

با به‌کارگیری $R_1 = 2\ \Omega$، $L = 1$ H، $C = 125$ MF و $R_2 = 3\ \Omega$ در شکل ۹-۱۶ (الف) فرکانس تشدید و امپدانس در حالت تشدید را معین کنید.

با جایگزینی مقادیر فوق در معادله (۲۱) داریم:

$$\omega_0 = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

و به این ترتیب قادر خواهیم بود امپدانس ورودی را محاسبه کنیم.

$$Y = \frac{1}{3} + j2(\frac{1}{8}) + \frac{1}{2 + j(2)(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.583.5$$

و سپس امپدانس ورودی در حالت تشدید برابر است با

$$Z(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714\ \Omega$$

اگر $R_1 = 0$ می‌بود، فرکانس تشدید چنین می‌شد.

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

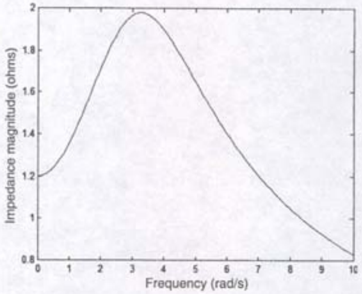
و امپدانس ورودی خواهد شد:

$$Z(j2.83) = 1.947\angle -13.26^\circ\ \Omega$$

با این وجود از شکل ۱۰-۱۶ ملاحظه می‌شود فرکانسی که در آن مقدار امپدانس حداکثر رخ می‌دهد برابر با $\omega_m = 3.26$ rad/s می‌باشد و این مقدار حداکثر نیز چنین است:

$$Z(j3.26) = 1.980\angle -21.4^\circ\ \Omega$$

مقدار امپدانس در حالت تشدید با حداقل مقدار آن حدود 16% تفاوت دارد. هر چند که چنین خطایی را می‌توان در بسیاری از موارد عملی نادیده گرفت ولی در جلسه امتحان آخر ترم نمی‌توان از آن به سادگی گذشت. در آخرین بخش نشان خواهیم داد که Q مربوط به القاگر در فرکانس 2 rad/s برابر واحد است. این خطا درواقع به دلیل وجود 16% خطا است.



شکل ۱۰-۱۶ نمودار $|Z|$ در برابر ω که با برنامه متلب زیر تولید شده است.

```
EDU» omega = linspace(0,10,100);
EDU» for i = 1:100
Y(i) = 1/3 + j*omega(i)/8 + 1/(2 + j*omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU» plot(omega,abs(Z));
EDU» xlabel('frequency (rad/s)');
EDU» ylabel('impedance magnitude (ohms)');
```

تمرین

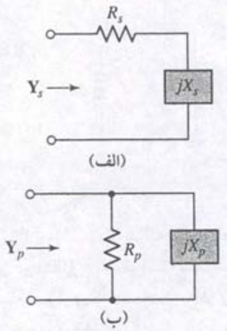
۵-۱۶ اگر در شکل ۹-۱۶(الف)، $R_1 = 1\ k\Omega$ و $C = 2.533$ PF باشد، القاگر مناسبی برای انتخاب فرکانس تشدید 1 MHz اختیار کنید (راهنمایی: $\omega = 2\pi f$ است).

جواب: 10 mH

ترکیبات معادل سری و موازی

برای تبدیل مدار مفروضی چون شکل ۹-۱۶(الف) به مدار معادل دیگری مانند شکل ۹-۱۶(ب)، مراجعه می‌کنیم. ابتدا باید Q ترکیب سری یا موازی یک مقاومت و یک راکتانس (خازنی یا القایی) را مورد بحث قرار دهیم. مدار سری شکل ۱۱-۱۶(الف) را در نظر می‌گیریم. Q مربوط به این شبکه مجدداً به صورت 2π برابر نسبت انرژی ذخیره شده به انرژی تلف شده در هر پریود تعریف می‌شود و می‌توان آن را در هر فرکانس انتخابی محاسبه کرد. به بیان دیگر، Q

تابعی از فرکانس ω است ولی آن را در فرکانس تشدید شبکه‌ای که مدار سری قسمتی از آن است، محاسبه می‌کنیم، با این وجود این فرکانس تا دستیابی به مدار کامل معلوم فرض نمی‌شود. به خواننده توصیه می‌شود تا نشان دهد که Q در این مدار سری برابر $|X_s|/R_s$ است در حالی که Q شبکه موازی در شکل ۱۱-۱۶(ب) برابر $R_p/|X_p|$ می‌باشد.



شکل ۱۱-۱۶ (الف) یک شبکه سری که از یک مقاومت R_s و یک القاگر با خازن با راکتانس X_s تشکیل شده و ممکن است به (ب) یک شبکه موازی تبدیل شود که در یک فرکانس خاص، $Y_s = Y_p$ باشد. عکس مطلب هم صحیح است.

بگذارید ببینیم مقادیر R_p، X_p چه باید باشد تا شبکه موازی شکل ۱۱-۱۶(ب) و شبکه سری شکل ۱۱-۱۶(الف) در فرکانس خاصی معادل شود. Y_s و Y_p را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$Y_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$
$$= Y_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

و بنابراین

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \qquad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

با تقسیم این دو رابطه هم داریم:

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

نتیجه می‌شود که Qهای شبکه‌های سری و موازی باید برابر باشند.

$$Q_p = Q_s = Q$$

پس معادلات تبدیل به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \tag{۲۲}$$

$$X_p = X_s(1 + \frac{1}{Q^2}) \tag{۲۳}$$

اگر R_p و X_p مقادیر مفروض باشند، می‌توان R_s و X_s را هم به دست آورد.

اگر $Q \geq 5$ باشد، با استفاده از روابط تقریبی مختصر خطایی وجود خواهد داشت.

$$R_p \approx Q^2 R_s \tag{۲۴}$$

$$X_p \approx X_s \qquad (C_p \approx C_s \quad \text{یا} \quad L_p \approx L_s) \tag{۲۵}$$

مثال ۵-۱۶

معادل موازی ترکیب سری یک القاگر 100 mH و مقاومت 5 Ω را در فرکانس 1000 rad/s به دست آورید. جزئیات این شبکه مشخص نیست.

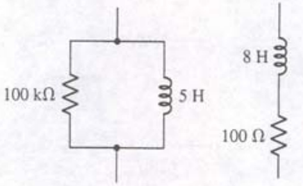
در $\omega = 1000$ rad/s، $X_s = 1000\ (100 \times 10^{-3}) = 100\ \Omega$. Q این ترکیب سری برابر است با

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

چون Q به قدر کافی بالا است (20 خیلی بزرگتر از 5 است)، معادلات (۲۴) و (۲۵) را به کار می‌بریم.

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2000 \quad \text{و} \quad L_p \approx L_s = 100 \text{ mH}$$

در این‌جا می‌بینیم که القاگر 100 mH سری با مقاومت 5 Ω همان امپدانس ورودی را تولید می‌کند که یک القاگر 100 mH با مقاومت 2000 Ω در فرکانس 1000 rad/s تولید می‌نماید.



شکل ۱۲ـ۱۶ (الف) یک شبکه سری که معادل موازی آن در $\omega = 1000$ خواسته شده است. (ب) یک شبکه موازی که معادل سری آن در $\omega = 1000$ مورد تقاضا است.

برای کنترل دقت اکووالانس، امپدانس ورودی را برای هر شبکه در 1000 rad/s ارزیابی می‌کنیم. درمی‌یابیم که:

$$\mathbf{Z}_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1\angle 87.1^\circ\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9\angle 87.1^\circ\ \Omega$$

و نتیجه می‌گیریم که این تقریب در فرکانس خاصی که تبدیل در آن صورت می‌گیرد، بسیار دقیق است. دقت در فرکانس 900 rad/s هم رضایت‌بخش است. زیرا:

$$\mathbf{Z}_s(j900) = 90.1\angle 86.8^\circ\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j900) = 89.9\angle 87.4^\circ\ \Omega$$

تمرین

۶-۱۶ در $\omega = 1000\text{rad/s}$، شبکه موازی معادل ترکیب سری شکل ۱۲-۱۶(الف) را به دست آورید.

۷-۱۶ معادل سری را برای شبکه موازی شکل ۱۲-۱۶(ب) به دست آورید. فرض کنید $\omega = 1000$ rad/s باشد.

جواب ۶-۱۶: 8 H و 640 k Ω

جواب ۷-۱۶: 5 H و 250 Ω

به عنوان مثالی دیگر در جایگزینی یک مدار تشدید پیچیده‌تر با معادل RLC سری یا موازی، اجازه بدهید مسئله‌ای را در وسایل اندازه‌گیری الکترونیک بررسی کنیم. شبکه ساده RLC را در شکل ۱۳-۱۶(الف) ملاحظه نمایید که با یک منبع ولتاژ سینوسی در فرکانس تشدید تحریک شده است. مقدار مؤثر (rms) ولتاژ منبع 0.5 V است و ما می‌خواهیم مقدار مؤثر ولتاژ را در دو سر خازن با یک ولت‌متر الکترونیک اندازه بگیریم. مقاومت داخلی ولت‌متر 100000 Ω است. یعنی یک ولت‌متر را می‌توان با یک ولتمتر ایده‌آل موازی با یک مقاومت 100 kΩ نشان داد.

یک وسیله اندازه‌گیری ایده‌آل قادر است کمیت خاص مورد نظری را بدون ایجاد مزاحمت برای مدار تحت تست اندازه بگیرد. هر چند این بعید است ولی وسایل مدرن به حالت ایده‌آل خیلی نزدیک شده‌اند.

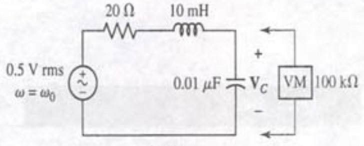
قبل از اینکه ولت‌متر وصل شود، فرکانس تشدید 10^5 rad/s، $Q_0 = 50$، جریان 25 mA و ولتاژ rms در دو سر خازن 2.5 V محاسبه شده است. همان‌طور که در انتهای بخش ۳-۱۶ دیدیم این ولتاژ Q_0 برابر ولتاژ اعمال شده است. بنابراین اگر ولتمتر ایده‌آل باشد، حتی اگر به دو سر خازن وصل شود، باید 25 V را بخواند.

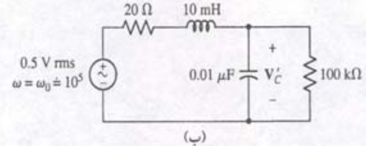
با اتصال ولتمتر واقعی، شکل ۱۳-۱۶(ب) حاصل می‌گردد. برای اینکه یک مدار RLC سری به دست آید، لازم است تا شبکه RC موازی با یک RC سری جایگزین شود. بگذارید Q در این شبکه RC خیلی بالا باشد به نحوی که خازن سری معادل برابر با خازن موازی گردد. ما این کار را بدین علت انجام می‌دهیم تا فرکانس تشدید را برای مدار RLC سری نهایی تقریب کنیم. بنابراین اگر مدار سری هم حاوی خازن 0.01 μF باشد، فرکانس تشدید در 10^5 rad/s باقی می‌ماند. ما این فرکانس تشدید تخمینی را برای محاسبه Q در شبکه RC موازی لازم داریم که برابر است با:

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5(10^5)(10^{-8}) = 100$$

چون این مقدار بزرگتر از 5 است، فرضیات فوق صادق بوده و شبکه RC سری معادل از یک خازن $C_s = 0.01\ \mu F$ و یک مقاومت

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10\ \Omega$$





شکل ۱۳ـ۱۶ (الف) یک مدار تشدید مفروض که در آن ولتاژ خازن باید با یک ولتمتر الکترونیک غیرایده‌آل اندازه‌گیری شود. (ب) تأثیر ولتمتر در مدار لحاظ شده است و مقدار V'_C را می‌خواند.

تشکیل می‌شود. به این ترتیب مدار معادل شکل ۱۳-۱۶(ج) به دست آمده است. Q تشدید در این مدار اکنون 33.3 است و بنابراین ولتاژ دو سر خازن در مدار شکل ۱۳-۱۶(ج) برابر $16\frac{2}{3}$ خواهد بود. ولی ما فقط لازم است تا $|V'_C|$ که ولتاژ دوسر ترکیب RC است را به دست آوریم:

$$|V'_C| = \frac{0.5}{30}\ |10 - j1000| = 16.67\ V$$

ولتاژ دوسر خازن و $|V'_C|$ اساساً برابرند. چون افت ولتاژ دوسر مقاومت 10Ω بسیار کوچک است.

نتیجه نهایی این که یک ولتمتر خوب هم می‌تواند تأثیر زیادی روی پاسخ مدارهای با Q بالا داشته باشد. تأثیر مشابهی را می‌توان در استفاده از یک آمپرمتر ایده‌آل در مدار انتظار داشت. این بخش را با یک داستان به پایان می‌بریم.

یکی بود یکی نبود، دانشجویی بود به نام پِت که استادی به نام دکتر ایبل داشت. یک روز بعدازظهر دکتر ایبل سه قطعه مداری، شامل یک مقاومت، یک القاگر، یک خازن با مقادیر نامی 20 Ω، 20 mH و 1 μF را به پت داد. از او خواسته شد تا یک منبع ولتاژ با فرکانس متغیر را به ترکیب سری این سه عنصر ببندد و ولتاژ دو سر مقاومت را به صورت تابعی از فرکانس اندازه بگیرد و سپس مقادیر عددی فرکانس تشدید، Q در تشدید و عرض نصف توان را محاسبه نماید. همچنین از او خواسته شد تا نتایج آزمایش را قبل از اندازه‌گیری تخمین بزند. پت که کارش در کلاس چندان جالب نبود، مدار را در ذهنش به صورت شکل ۱۴-۱۶ تصور کرد و سپس محاسبه زیر را انجام داد:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125\ \text{Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$\mathcal{B} = \frac{f_0}{Q_0} = 159\ \text{Hz}$$

سپس به آزمایشی که دکتر ایبل از او خواسته بود پرداخت، آن‌ها را با نتایج خود مقایسه کرد. حاصل آن چیزی جز تغییر رشته از برق به اقتصاد نبود! این نتایج چنین بود:

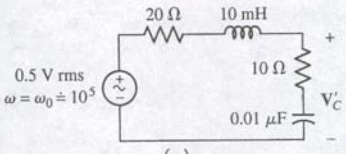
$$f_0 = 1000\ \text{Hz} \qquad Q_0 = 0.625 \qquad \mathcal{B} = 1600\ \text{Hz}$$

ت می‌دانست که تفاوت بین مقادیر نظری و آزمایشی در حد تقریب‌های مهندسی و یا ناشی ز خطای دستگاه‌های اندازه‌گیری توجیهی ندارد. متأسفانه نتایج به پروفسور تحویل شد.

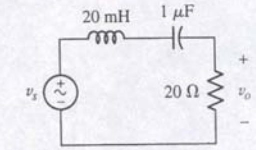
دکتر ایبل که از این خطاها زیاد دیده بود و حتی خودش عملاً بعضی را موجب شده بود لبخندی زد و توجه پت را به Q سنجی (با پل امپدانس) که در اغلب آزمایشگاه‌ها یافت می‌شود، جلب نمود و به او گفت بهتر است ببینی عناصری که در دست داری در فرکانس‌های نزدیک به تشدید، مثلاً 1000 Hz چه هستند.

پت آن کار را انجام داد و فهمید که مقدار مقاومت 18 Ω، القاکنایی را 21.4 mH و ضریب کیفیت 1.2، ظرفیت 1.41 μF و ضریب تلفات (عکس ضریب کیفیت) 0.123 می‌باشد.

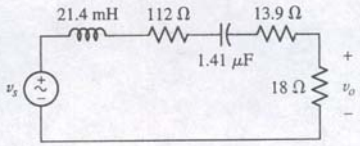
به این ترتیب پت امیدوار شد و مدلی با ترکیب سری 21.4 mH و مقاومت $\omega L/Q = 112\Omega$ و مدل مناسب‌تری برای خازن با ترکیب سری ظرفیت 1.41 μF و مقاومت $1/\omega CQ = 13.9\ \Omega$ به دست آورد. با این داده‌ها، پت مدل اصلاح شده‌ای را طبق شکل ۱۵-۱۶ ارائه داد و مقادیر جدید پیش‌بینی شده را محاسبه کرد:



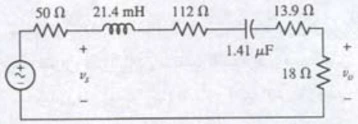
شکل ۱۳ـ۱۶ (ج) مدار تشدید سری هنگامی به‌دست‌می‌آید که شبکه RC موازی در بخش (ب) با یک شبکه RC سری که در 10^5 rad/s معادل است جایگزین شود.



شکل ۱۴ـ۱۶ اولین مدل برای یک القاگر، خازن و مقاومت سری با یک منبع.



شکل ۱۵ـ۱۶ مدل اصلاح‌شده‌ای که در آن مقادیر دقیق‌ترند و تلفات در القاگر لحاظ شده است.



شکل ۱۶ـ۱۶ مدل نهایی شامل مقاومت خروجی منبع ولتاژ.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916\text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$\mathcal{B} = 916/0.856 = 1070\text{ Hz}$$

چون این مقادیر به مقادیر اندازه‌گیری شده نزدیک‌تر بود، پت خوشحال‌تر شد. با این وجود دکتر ایبل با خشونت گفت آیا امپدانس خروجی منبع تغذیه را در نظر گرفته‌ای؟ پت گفت خیر و بلافاصله به سمت میز آزمایشگاه بازگشت.

معلوم شد که امپدانس خروجی موردنظر $50\ \Omega$ است. پت این مقدار را به نمودار مدار مطابق شکل ۱۶-۱۶ اضافه نمود. با به کارگیری مقدار مقاومت جدید $193.9\ \Omega$ مقادیر اصلاح شده Q_0 و $\mathcal{B}$ چنین به دست آمدند.

$$Q_0 = 0.635 \qquad \mathcal{B} = 1442\text{ Hz}$$

چون اکنون همه مقادیر تجربی و تئوری در محدوده 10% است، شوق ادامه رشته برق موجب شد تا تکالیف خود را زودتر از شروع کلاس انجام دهد. دکتر ایبل با رضایت سری تکان داد و زیرلب زمزمه کرد:

هنگامی که وسایل واقعی را به کار می‌بری به مدلی که انتخاب می‌کنی نگاه کن
قبل از هر محاسبه‌ای فکر کن Zها و Qها را به خاطر بیاور

تمرین

۱۶-۸ ترکیب سری مقاومت $10\ \Omega$ و خازن 10 nF را که موازی با ترکیب سری مقاومت $20\ \Omega$ و القاگر 10 mH است، در نظر بگیرید. (الف) فرکانس تشدید شبکه موازی را پیدا کنید. (ب) Q را برای شاخه RC به دست آورید. (ج) Q شاخه RL را معین کنید. (د) معادل سه عنصری شبکه اصلی را بیابید.

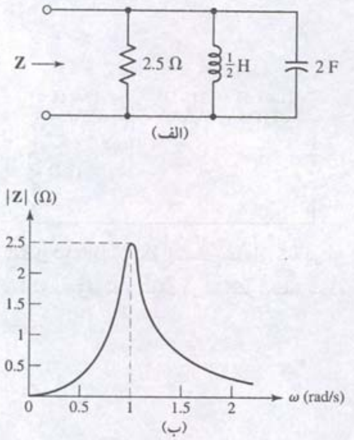
جواب: 10^5 rad/s، 100، 50 و $33.3\text{ k}\Omega \,||\, 10\text{ mH} \,||\, 10\text{ nF}$.

۱۶-۵ تغییر مقیاس

بعضی از مثال‌ها و مسائلی که تاکنون حل کردیم، مدارهای حاوی عناصر غیرفعال در حد چند اهم چند هنری و چند فاراد و فرکانس‌های هم حدود چند رادیان بر ثانیه بودند. این مقادیر عددی خاص نه به‌دلیل رایج بودنشان در عمل، بلکه به‌دلیل ساده‌شدن عملیات ریاضی و پرهیزاز توان‌های 10 در طول محاسبات انتخاب شدند. روال‌های تغییر مقیاسی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند، امکان تحلیل شبکه‌های متشکل از عناصر عملی را فراهم می‌سازند و محاسبات عددی ساده‌تری را اجازه می‌دهند. در این‌جا **تغییر مقیاس اندازه** و نیز **فرکانس** را بررسی می‌کنیم.

بیایید شکل ۱۷-۱۶(الف) را به عنوان مثالی از مدار تشدید موازی برگزینیم. مقادیر غیرعملی عناصر منجر به پاسخ غیرعادی شکل ۱۷-۱۶(ب) شده است. حداکثر امپدانس $2.5\ \Omega$، فرکانس تشدید 1 rad/s، Q برابر 5 و عرض باند 0.2 rad/s است. این مقادیر بیشتر به مشخصات یک سیستم مکانیکی شبیه‌اند تا به یک سیستم الکتریکی. مقادیر موجود بیشتر برای محاسبه مناسبند ولی برای ساخت مدار غیرعملی‌اند.

فرض کنید هدف تغییر مقیاس این شبکه به‌نحوی باشد که یک حداکثر امپدانس $5000\ \Omega$ را در فرکانس $5 \times 10^6\text{ rad/s}$ یا 796 kHz داشته باشیم. به بیان دیگر بخواهیم مقادیر محور عمودی در 2000 و محور افقی در 5×10^6 ضرب شوند. پس دو کار در پیش داریم: (۱) تغییر مقیاس در اندازه به مقدار 2000 و (۲) تغییر مقیاس فرکانس با ضریب 5×10^6.



شکل ۱۷-۱۶ (الف) یک مدار تشدید موازی که به‌عنوان مثالی در تغییر اندازه و فرکانس به‌کاررفته است. (ب) اندازه امپدانس ورودی برحسب تابعی از فرکانس نشان داده شده است.

تغییر مقیاس اندازه فرآیندی است که طی آن امپدانس شبکه دو پایانه در K_m ضرب می‌شود در حالی که فرکانس ثابت می‌ماند. ضریب K_m حقیقی و مثبت است و می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد. به طریقی مشابه منظور از **تغییر مقیاس مدار با ضریب 2 این است که در هر فرکانسی امپدانس مدار جدید 2 برابر امپدانس مدار قبل است.** اکنون باید ببینیم که مقدار هر عنصر غیرفعال چگونه باید تغییر کند. برای افزایش امپدانس ورودی یک شبکه با ضریب K_m، کافی است که امپدانس هر عنصر را با همان ضریب افزایش دهیم. پس هر مقاومت R باید با K_mR جایگزین شود. هر اندوکتانس هم باید در هر فرکانسی، امپدانسی K_m برابر داشته باشد. برای افزایش یک امپدانس sL به اندازه K_m برابر در s ثابت، القاکنایی L باید K_mL تعویض شود. به همین ترتیب هر ظرفیت C با C/K_m جایگزین می‌شود. به طور خلاصه این تغییرات شبکه‌ای را تولید می‌کند که تغییر مقیاس اندازه‌اش در K_m ضرب شده است:

$$\left.\begin{aligned} R &\to K_m R \\ L &\to K_m L \\ C &\to \frac{C}{K_m} \end{aligned}\right\} \text{تغییر مقیاس اندازه}$$

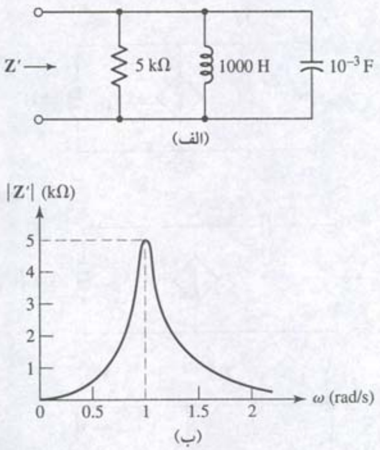
وقتی که هر عنصر در شکل ۱۷-۱۶(الف) با ضریب 2000 تغییر مقیاس اندازه پیدا کند، شبکه ۱۸-۱۶(الف) حاصل می‌شود. منحنی پاسخ شکل ۱۸-۱۶(ب) نشان می‌دهد که هیچ تغییری در منحنی پاسخ قبلی صورت نگرفته به جز این‌که محور عمودی تغییر مقیاس داده است.

اکنون بیایید این شبکه جدید را به لحاظ فرکانس تغییر مقیاس دهیم. ما تغییر فرکانس را به صورت فرآیندی تعریف می‌کنیم که در آن فرکانس در هر امپدانسی با ضریب K_f تغییر کند. دوباره از جمله کوتاهتری استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر **شبکه به لحاظ فرکانس با ضریب 2 تغییر مقیاس دهد،** همان امپدانس در فرکانسی دوبرابر به دست می‌آید. تغییر مقیاس فرکانس کلی با تغییر در مقیاس فرکانس هر عنصر غیرفعال به وجود می‌آید. واضح است که مقاومت تحت تأثیر این تغییر واقع نمی‌شود. امپدانس هر القاگر sL است و اگر قرار باشد، در فرکانس K_f برابری همان امپدانس به دست آید آن‌گاه القاکنایی L باید با القاکنایی L / K_f جایگزین شود. به طور مشابه ظرفیت C با C/K_f جایگزین می‌گردد. بنابراین اگر قرار باشد، شبکه‌ای با ضریب K_f تغییر مقیاس دهد آن‌گاه تغییرات لازم در عناصر غیرفعال چنین است.

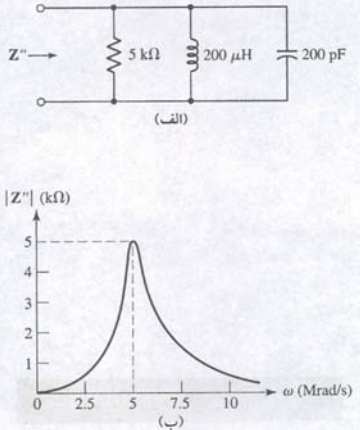
$$\left.\begin{aligned} R &\to R \\ L &\to \frac{L}{K_f} \\ C &\to \frac{C}{K_f} \end{aligned}\right\} \text{تغییر مقیاس فرکانس}$$

اگر هر عنصر از شبکه تغییر مقیاس یافته در اندازه شکل ۱۸-۱۶(الف)، به لحاظ فرکانس با ضریب 5×10^6 تغییر مقیاس دهد، شکل ۱۹-۱۶(الف) به دست می‌آید. منحنی پاسخ مربوطه در شکل ۱۹-۱۶ (ب) ملاحظه می‌گردد.

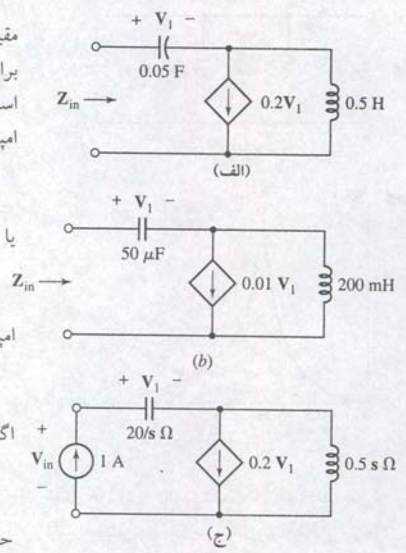
عناصر مدار در این آخرین شبکه مقادیری دارند که به‌راحتی در مدارهای فیزیکی قابل دستیابی‌اند. شبکه درواقع قابل ساخت و آزمایش است. پس اگر مدار شکل ۱۷-۱۶(الف) واقعاً معادل الکتریکی یک سیستم مکانیکی باشد، می‌توان با تغییر مقیاس مداری به دست آورد و در آزمایشگاه آن را ساخته و آزمایش کرد. به این ترتیب آزمایش‌هایی که روی یک سیستم مکانیکی گران و غیرعادی است، روی یک سیستم الکتریکی تغییر مقیاس یافته ساخته شده و به منظور تکمیل تحلیل نتایج به مقیاس اولیه بازگردانده می‌شوند.



شکل ۱۸-۱۶ (الف) شبکه ۱۷-۱۶ (الف) پس از تغییر مقیاس در اندازه با ضریب $K_m = 2000$. (ب) منحنی پاسخ مربوطه.



شکل ۱۹-۱۶ (الف) شبکه شکل ۱۸-۱۶ (الف) پس از تغییر مقیاس در فرکانس با ضریب $K_f = 5 \times 10^6$. (ب) منحنی پاسخ مربوطه.



شکل ۲۰-۱۶ (الف) شبکه‌ای با اندازه تغییر مقیاس یافته با ضریب 20 و ضریب تغییر مقیاس فرکانس 50. (ب) شبکه تغییر مقیاس‌یافته. (ج) یک منبع تست 1A به پایانه‌های ورودی اعمال‌شده تا امپدانس شبکه تغییر مقیاس نیافته در بخش (الف) به‌دست‌آید.

امپدانسی که برحسب s داده شده باشد را هم می‌توان به لحاظ اندازه و فرکانس تغییر مقیاس داد و این کار بدون هرگونه آگاهی از نوع عناصر تشکیل دهنده مدار صورت می‌گیرد. برای تغییر مقیاس $Z(s)$ از لحاظ اندازه، تعریف تغییر مقیاس اندازه نشان می‌دهد که فقط کافی است $Z(s)$ را در K_m ضرب کنیم تا اندازه تغییر مقیاس یافته امپدانس حاصل گردد. بنابراین امپدانس مدار تشدید موازی شکل ۱۷-۱۶(الف) چنین است.

$$Z(s) = \frac{s}{2s^2 + 0.4\,s + 2}$$

یا

$$Z(s) = \frac{0.5s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

امپدانس $Z'(s)$ شبکه اندازه تغییرمقیاس یافته برابر است

$$Z'(s) = K_m Z(s)$$

اگر دوباره $K_m = 2000$ بگیریم، داریم:

$$Z'(s) = (1000)\ \frac{s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

حال اگر $Z'(s)$ را از لحاظ فرکانس با ضریب 5×10^6 تغییرمقیاس دهیم، آنگاه باید $Z''(s)$ در یک فرکانس s با مقدار $Z'(s)$ در فرکانس $(5 \times 10^6)s$ برابر باشد تا $Z'(s)$ و $Z''(s)$ امپدانس یکسانی از خود به نمایش بگذارند. پس از کمی تعقل و حساب سرانگشتی درمی‌یابیم که این کار کلاً توسط رابطه زیر انجام می‌شود.

$$Z''(s) = Z'\left(\frac{s}{K_f}\right)$$

توجه کنید که $Z''(s)$ با جایگزینی هر s در $Z'(s)$ با s/K_f، به دست می‌آید. پس عبارت تحلیلی امپدانس شبکه شکل ۱۹-۱۶(الف) باید به صورت زیر باشد:

$$Z''(s) = (1000)\ \frac{s/(5 \times 10^6)}{[s/(5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][s/(5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

یا

$$Z''(s) = (1000)\ \frac{(5 \times 10^6)s}{[s + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6][s + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6]}$$

گرچه تغییر مقیاس معمولاً به عناصر غیرفعال اعمال می‌شود، منابع وابسته نیز می‌توانن از لحاظ اندازه و فرکانس تغییر مقیاس یابند. فرض می‌کنیم که خروجی هر منبع به صورت $K_x V_x$ یا $K_y i_y$ باشد، که K_x بعد ادمیتانس را برای منبع جریان وابسته دارد و برای یک منبع ولتاژ وابست بدون بُعد است. در حالی که K_y برای منبع ولتاژ وابسته بُعد اهم و برای منبع جریان وابسته بی‌بُع است. اگر شبکه حاوی منبع وابسته، از لحاظ اندازه با K_m تغییر مقیاس یابد، آنگاه لازم است که K_x یا K_y طوری رفتار کنیم که گویی عناصر متناظر با بُعدشان هستند. یعنی اگر بعد امپدانس داشتند، باید آن‌ها را در K_m ضرب کرد اگر ادمیتانس باشند، باید بر K_m تقسیم نمود و اگر بدو بُعد بود آن‌ها را تغییر نداد. تغییر مقیاس فرکانس بر منابع وابسته تأثیری ندارد.

مثال ۶-۱۶

شبکه شکل ۲۰-۱۶ را با ضریب $K_m = 20$ و $K_f = 50$ تغییرمقیاس دهید و سپس $Z_{in}(s)$ برای شبکه جدید پیداکنید.

تغییرمقیاس خازن از تقسیم 0.05 F بر ضریب $K_m = 20$ و تغییر مقیاس فرکانس از تقسیم $K_f = 50$ به دست می‌آید. با اجرای همزمان دو عمل داریم:

$$C_{\text{تغییر مقیاس یافته}} = \frac{0.05}{(20)(50)} = 50\ \mu F$$

القاگر نیز چنین تغییرمقیاس می‌یابد:

$$L_{\text{تغییر مقیاس یافته}} = \frac{(20)0.5}{50} = 200\ mH$$

در تغییر مقیاس منبع وابسته، تنها تغییر مقیاس اندازه می‌باید لحاظ شود، زیرا تغییر مقیاس در فرکانس تأثیری بر منابع وابسته ندارد. چون این منبع جریان با ولتاژ کنترل شده است، ضریب ثابت 0.2 دارای واحد A/V یا S است. نظر به اینکه ضریب، واحد ادمیتانس دارد، آن را بر K_m تقسیم می‌کنیم، پس جمله جدید $0.01\ V_1$ خواهد شد. شبکه جدید در شکل ۲۰-۱۶ (ب) ملاحظه می‌شود.

برای یافتن امپدانس شبکه جدید، لازم است منبع تست 1 A را به پایانه‌های ورودی اعمال کنیم. در هر صورت می‌توان با هر یک از مدارها کار کرد. اجازه بدهید ابتدا با شکل ۲۰-۱۶ (الف) که تغییر مقیاس نیافته کار کنیم و سپس نتیجه را تغییرمقیاس دهیم.

با توجه به شکل ۲۰-۱۶(ج):

$$V_{in} = V_1 + 0.5s(1 - 0.2\ V_1)$$

و نیز:

$$V_1 = \frac{20}{s}\ (1)$$

با اجرای جایگزینی‌های اشاره شده و به دنبال آن کمی دستکاری جبری داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1} = \frac{s^2 - 4s + 40}{2s}$$

برای تغییر مقیاس این کمیت در مدار شکل ۲۰-۱۶(ب) آن را در $K_m = 20$ ضرب و سپس s را با $s/K_f = s/50$ جایگزین می‌کنیم. پس:

$$Z_{in,\ \text{تغییر مقیاس یافته}} = \frac{0.2\ s^2 - 40s + 20000}{s}\ \Omega$$

تمرین

۹-۱۶ یک مدار تشدید موازی با $\omega_0 = 20$ rad/s و $B = 2.5$ rad/s، $C = 0.01$ F تعریف شده است. مطلوب است مقادیر R و L اگر شبکه با موارد زیر تغییر مقیاس یافته باشد. (الف) اندازه با ضریب 800، (ب) فرکانس با ضریب 10^4 و (ج) اندازه با 800 و فرکانس با 10^4.

جواب: 32 kΩ، 200 H، 40 Ω، 25μH، 32 kΩ و 20 mH.

۶-۱۶ نمودار بُود

در این بخش روشی سریع را برای ترسیم تصویر تقریبی تغییر اندازه و فاز یک تابع تبدیل برحسب ω خواهیم دید. البته می‌توان منحنی‌های دقیق‌تری را با ماشین‌حساب برنامه‌پذیر یا کامپیوتر ترسیم نمود. می‌توان آن‌ها را روی صفحه کامپیوتر مستقیماً دید. با این وجود، هدف ما تهیه تصویر بهتری از پاسخ نسبت به نمودار قطب - صفر است، البته بدون آن که محاسباتی طولانی لازم باشد.

مقیاس دسی‌بل (dB)

رسم این منحنی تقریبی پاسخ که ما قصد ساخت آن را داریم، منحنی مجانبی یا نمودار بُود و یا منحنی بُود کلمهٔ بود را به ضمّ "ب" تلفظ نمایید) نام دارد و به نام ابداع کننده‌اش اچ.دبلیو.بُود (H.W.Bode) که مهندسی در رشته برق و ریاضی‌دانی در آزمایشگاه تلفن بل بود، خوانده شده است. محور افقی محور فرکانس و با مقیاس لگاریتمی است. دامنه هم برحسب یک واحد لگاریتمی دیگر به نام دسی‌بل (db) نشان داده می‌شود. اندازه $|H(j\omega)|$ برحسب dB چنین تعریف می‌شود:

$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

که در آن از لگاریتم معمولی مبنای 10 استفاده شده است. (گاهی هم از ضریب 10 به جای 20 برای تابع تبدیل توان استفاده می‌شود ولی ما با آن در این جاکاری نداریم). عمل عکس چنین است:

$$|H(j\omega)| = 10^{(H_{dB}/20)}$$

قبل از شروع بحثی مفصل در مورد تکنیک به کار رفته برای ترسیم نمودارهای بُود بهتر است با واحد دسی‌بل آشنا شویم، چند مقدار مهم آن را بشناسیم و بعضی از خصوصیات لگاریتمی را مرور کنیم. چون $\log 1 = 0$، $\log 2 = 0.30103$ و $\log 10 = 1$ است. روابط زیر را داریم:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{dB} = 0$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{dB} = 6 \text{ dB}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{dB} = 20 \text{ dB}$$

هر افزایش $|\mathbf{H}(j\omega)|$ با ضریب 10 برابر معادل افزایش H_{dB} به میزان 20 dB است. به‌علاوه $\log 10^n = n$ است، پس $10^n = 20n$ dB. بنابراین 1000 متناظر با 60 dB است. در حالی که 0.01 متناظر -40 dB است. با استفاده از مقادیر قبلی می‌توان نشان داد:

$$20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20 \log 10 - 20 \log 2 = 20 - 6 = 14 \text{ dB}$$

پس $5 \Leftrightarrow 14$ dB است. همچنین $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ و لذا $\sqrt{2} \Leftrightarrow 3$ dB است. تابع تبدیل خود را برحسب s می‌نویسیم و هر وقت بخواهیم اندازه یا فاز را پیدا کنیم، $s = j\omega$ قرار می‌دهیم. در صورت تمایل اندازه در آن نقطه برحسب dB نوشته می‌شود.

تمرین

۱۰-۱۶ H_{dB} را در $\omega = 146$ rad/s به دست آورید به شرطی که H(s) برابر باشد با (الف) $20 / (s + 100)$، (ب) $20 (s + 100)$، (ج) $20 s$. $|\mathbf{H}(j\omega)|$ را حساب کنید اگر H_{dB} برابر باشد، (د) 29.2 dB، (هـ) -15.6 dB و (و) -0.318 dB.

جواب: -18.94 dB، 71.0 dB، 69.3 dB، 28.8، 0.1660 و 0.964.

تعیین مجانب‌ها

گام بعدی تجزیه H(s) به عوامل اول و به دست آوردن قطب‌ها و صفرها است. ابتدا صفری را در $s = -a$ در نظر می‌گیریم و آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم.

$$\mathbf{H}(s) = 1 + \frac{s}{a} \qquad (۲۶)$$

نمودار بُود برای این تابع از دو مجانب تشکیل شده که به ازای ωهای خیلی بزرگ و خیلی کوچک به H_{dB} میل می‌کند. پس با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

و بنابراین

$$H_{dB} = 20 \log \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

وقتی که $\omega << a$ باشد،

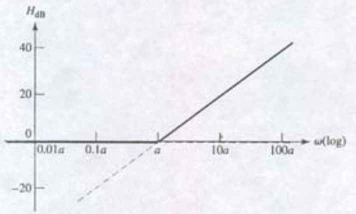
$$H_{db} \approx 20 \log 1 = 0 \qquad (\omega << a)$$

این مجانب ساده در شکل ۲۱-۱۶ مشاهده می‌شود، که به صورت خط پررنگ برای $\omega < a$ و خط شکسته برای $\omega > a$ ترسیم شده است.

وقتی $\omega >> a$ باشد،

$$H_{dB} \approx 20 \log \frac{\omega}{a} \qquad (\omega >> a)$$

در $\omega = a$، $H_{dB} = 0$؛ در $\omega = 100$، $H_{dB} = 20$ dB؛ در $\omega = 100\,a$، $H_{dB} = 40$ dB است. پس مقدار H_{dB} به‌ازای هر 10 برابر افزایش در فرکانس به اندازه 20 dB زیاد می‌شود



شکل ۲۱-۱۶ نمودار اندازهٔ بُود برای $\mathbf{H}(s) = 1 + \frac{s}{a}$ متشکل از مجانب‌های فرکانس بالا و پایین به صورت خط پر. محل برخورد دو خط مجانب را گوشه می‌گویند. منحنی بُود پاسخ را برحسب دو مجانب به‌دست‌می‌دهد. هر دو خط راست به سادگی کشیده می‌شود.

بنابراین مجانب دارای شیب 20 dB/dec است. چون H_{dB} با دوبرابرشدن ω، به اندازه 6 dB بالا می‌رود، پس می‌توان گفت که شیب 6 dB/oct است. مجانب فرکانس بالا هم در شکل ۲۱-۱۶ با خط پری برای $\omega > a$ و در $\omega < a$ به صورت خط شکسته درآمده است. دقت کنید که دو مجانب در $\omega = a$ که فرکانس نقطه صفر است، یکدیگر را قطع می‌کنند. این فرکانس را فرکانس گوشهٔ شکست، 3 dB یا فرکانس نصف توان هم می‌گویند.

دهه فاصله‌ای است که در آن فرکانس 10 برابر می‌شود، مثلاً 3Hz تا 30Hz یا 12.5 MHz تا 125 mHz. اکتاو فاصله‌ای است که در آن فرکانس دو برابر می‌شود مثلاً 7 GHz تا 14 GHz.

اصلاح منحنی‌های بود

اکنون باید ببینیم چقدر خطا در پاسخ مجانبی نهفته است. در فرکانس گوشه $(\omega = a)$ خطا نسبت به مقدار مجانب dB برابر است با:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3 \text{ dB}$$

در $\omega = 0.5\,a$ داریم:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \approx 1 \text{ dB}$$

بنابراین پاسخ واقعی یک منحنی بدون گوشه است که به فاصله 3 dB در بالای پاسخ‌های مجانبی در $\omega = a$ واقع است و نیز در $\omega = 0.5\,a$ حدود 1 dB خطا وجود دارد. (همچنین در $\omega = 2a$). این اطلاعات در مواقع لزوم برای اصلاح گوشه‌ها به کار می‌روند.

چند جمله‌ای‌ها

بسیاری از توابع تبدیل، بیش از یک صفر ساده (یا قطب ساده) دارند. با این وجود به سادگی به وسیله روش بُود قابل بررسی هستند، زیرا ما در واقع با لگاریتم کار می‌کنیم. مثلاً تابع زیر را درنظربگیرید:

$$\mathbf{H}(s) = K\left(1 + \frac{s}{s_1}\right)\left(1 + \frac{s}{s_2}\right)$$

که K مقداری ثابت، و $-s_1$ و $-s_2$ دو صفر تابع $\mathbf{H}(s)$ را تشکیل می‌دهند. H_{dB} برای این تابع به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$H_{dB} = 20 \log \left| K \left(1 + \frac{j\omega}{s_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{s_2}\right)\right| = 20 \log \left[K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2} \right]$$

یا

$$H_{dB} = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}$$

که در واقع مجموع جمله ثابت (مستقل از فرکانس) $20 \log K$، و دو جمله صفر ساده به فرم ملاحظه‌شده قبلی است. به بیان دیگر، ما می‌توانیم نموداری از برای H_{dB} به روش گرافیکی و با جمع نمودارهای مربوط به جملات جدا از هم ترسیم کنیم. این مطلب را در مثال زیر می‌شکافیم.

مثال ۷-۱۶

نمودار بُود امپدانس ورودی شبکه شکل ۲۲-۱۶ را ترسیم کنید.

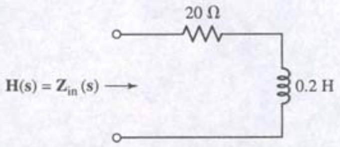
امپدانس ورودی را به این ترتیب داریم:

$$\mathbf{Z}_{in}(s) = \mathbf{H}(s) = 20 + 0.2s$$

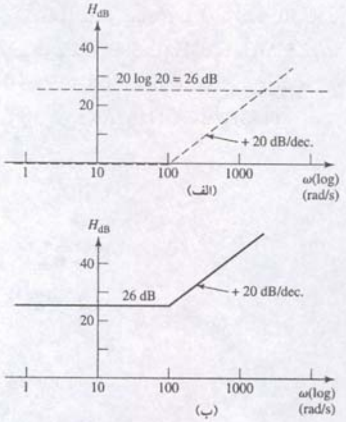
با نوشتن آن به صورت استاندارد داریم:

$$\mathbf{H}(s) = 20\left(1 + \frac{s}{100}\right)$$

دو فاکتوری که H(s) را تشکیل می‌دهند، عبارتند از صفری در $s = -100$ که منتهی به فرکانس شکستگی در $\omega = 100$ rad/s می‌گردد و ثابتی که معادل با $20 \log 20 = 26$ dB می‌شود. هر یک از این دو، به صورت خط‌چین در شکل ۲۳-۱۶(الف) دیده می‌شوند. چون ما با لگاریتم



شکل ۲۲-۱۶ اگر H(s) به صورت $Z_{in}(s)$ در این شبکه اختیار شود، آنگاه نمودار بُود برای Hdb مطابق شکل ۲۳-۱۶(ب) است.



شکل ۲۳ـ۱۶ (الف) منحنی‌های بُود برای جملات $H(s) = 20(1 + s/100)$ جداگانه رسم شده‌اند. (ب) ترکیب منحنی‌های بُود به صورت مجموع منحنی‌های بخش (الف).

$|H(j\omega)|$ کار می‌کنیم آن‌گاه هر دو نمودار مربوط به هر جمله را با هم جمع می‌کنیم. نمودار اندازه مطابق شکل ۲۳-۱۶(ب) است. هیچ تلاشی برای صاف کردن منحنی با اصلاح $+3$ dB در $\omega = 100$ rad/s صورت نگرفته است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

تمرین

۱۱-۱۶ منحنی اندازه بُود را برای $H(s) = 50 + s$.

جواب: 34 dB در $\omega < 50$ rad/s؛ شیب برابر $+20$ db/dec در $\omega > 50$ rad/s است.

پاسخ فاز

با بازگشت به تابع تبدیل معادله (۲۶) می‌خواهیم پاسخ فاز یک صفر ساده را به دست آوریم.

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \text{ang } (1 + \frac{j\omega}{a}) = \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

این عبارت را نیز می‌توان با مجانب‌ها نشان داد ولی این بار سه خط لازم است. برای $\omega << a$ داریم $\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) \approx 0^\circ$ و ما آن را به عنوان مجانب هنگام $\omega < 0.1\,a$ به کار خواهیم برد.

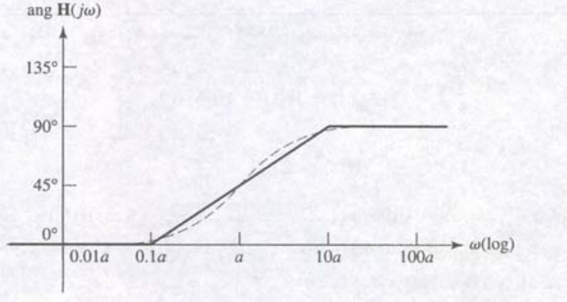
$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 0^\circ \qquad (\omega < 0.1\,a)$$

در $\omega >> a$ داریم، $\mathbf{H}(j\omega) \approx 90^\circ$ و آن را در بیش از $\omega = 10\,a$ به کار می‌بریم.

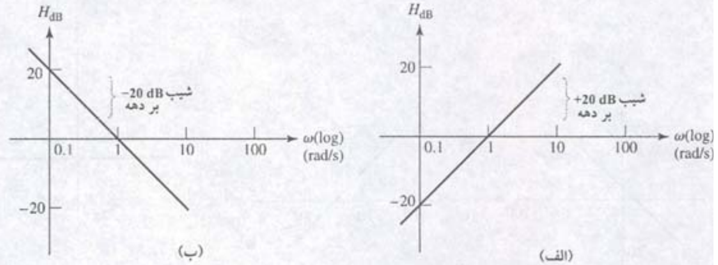
$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 90^\circ \qquad (\omega > 10\,a)$$

چون در $\omega = a$ زاویه فاز 45° است، اکنون خطوط مستقیم مجانب را از 0° در $\omega = 0.1\,a$ از طریق 45° در $\omega = a$ به 90° در $\omega = 10\,a$ رسم می‌کنیم. این خط مستقیم شیب 45° /dec را دارد که در شکل ۲۴-۱۶ با خطی شکسته نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین مجانب و پاسخ واقعی $\pm 5.71^\circ$ در $\omega = 0.1\,a$ و $10\,a$ است. خطاهای $\pm 5.29^\circ$ در $\omega = 0.394\,a$ و $2.54\,a$ رخ می‌دهند. در $\omega = 0.159\,a$ خطا صفر است. همچنین خطای صفر در a و $6.31\,a$ نیز اتفاق می‌افتد. منحنی زاویه فاز به صورت تقریب خط راست باقی گذاشته می‌شود. ولی می‌توان منحنی اصلاح شده را هم مانند آن‌چه در شکل ۲۴-۱۶ دیده می‌شود، رسم کرد.

بد نیست در این‌جا برای بررسی منحنی فاز مکثی بکنیم. برای یک صفر ساده در $s = a$، می‌بینیم که در فرکانس‌های خیلی کمتر از فرکانس گوشه، فاز تابع پاسخ برابر 0° است. اما در فرکانس‌های بالا $(\omega >> a)$، فاز 90° می‌باشد. در نزدیکی فرکانس گوشه، فاز تابع تبدیل تا حدی سریعاً تغییر می‌نماید. بنابراین زاویه فاز برای پاسخ را می‌توان در سرتاسر طراحی با انتخاب a مشخص کرد.



شکل ۲۴ـ۱۶ پاسخ زاویه مجانبی برای $H(s) = 1 + \frac{s}{a}$ به صورت سه خط راست نشان داده شده است. دو انتهای خط شیب در $0.1a$ دارای فاز 0° و در $10a$ دارای 90° فاز است.



شکل ۲۵ـ۱۶ نمودارهای مجانبی برای (الف) $H(s) = s$ و (ب) $H(s) = \frac{1}{s}$، هر دو نمودار خطوط طویلی هستند که در $\omega = 1$ از 0 db می‌گذرند و شیب ± 20 dB/dec دارند.

تمرین

۱۲-۱۶ منحنی فاز بود را برای تابع تبدیل مثال ۷-۱۶ رسم کنید.

جواب: 0° در $\omega << 10^\circ$، 90° در $\omega \geq 1000$، 45° در $\omega = 100$، 45° /dec در $10 < \omega < 1000$ (ω به rad/s).

مطالبی چند در ترسیم منحنی‌های بُود

اکنون قطب ساده زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{1 + s/a} \qquad (۲۷)$$

چون این تابع، معکوس صفر است، منحنی بُود تابع فوق منفی آن‌چه که قبلاً دیدیم می‌باشد. دامنه در $\omega = a$ برابر 0 dB و سپس شیب -20 dB / dec در $\omega > a$ می‌باشد. در $\omega < 0.1\,a$ زاویهٔ 0° را داریم. -90° را در $\omega > 10\,a$ و -45° را در $\omega = a$ و شیب -45° / dec در $0.1\,a < \omega < 10\,a$ برقرار است. به خواننده توصیه می‌شود، نمودار بود را با کار مستقیم روی معادله (۲۷) ترسیم نماید.

جمله ساده دیگری که می‌تواند در $\mathbf{H}(s)$ ظاهر شود وجود s در صورت یا مخرج است. اگر $H(s) = s$ باشد، آن‌گاه:

$$H_{dB} = 20 \log |\omega|$$

بنابراین خط مستقیم نامحدودی داریم که در $\omega = 1$ از 0 dB می‌گذرد و دارای شیب 20 dB/dec است. این خط در شکل ۲۵-۱۶(الف) ملاحظه می‌شود. اگر s در مخرج باشد، خط مستقیم نامحدود با شیب -20 dB/dec داریم که در $\omega = 1$ از 0 dB می‌گذرد شکل ۲۵-۱۶(ب).

جمله ساده دیگر در $\mathbf{H}(s)$، ثابت K می‌باشد. این جمله خط مستقیمی است افقی که به اندازه 20 log K بالای محور افقی قرار دارد. اگر $|K| < 1$ باشد، این خط زیر محور افقی خواهد بود.

مثال ۸ـ۱۶

منحنی بُود را برای بهره مدار شکل ۲۶-۱۶ بیابید.

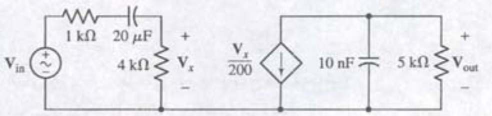
ما از سمت چپ مدار به سمت راست کار می‌کنیم و عبارت بهره ولتاژ را می‌نویسیم.

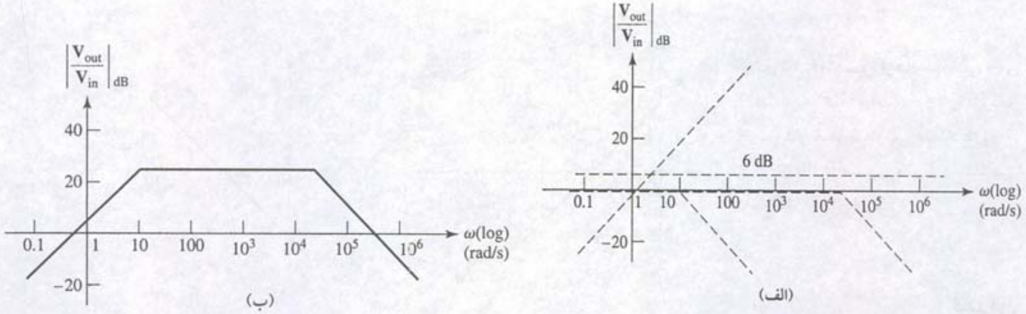
$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{4000}{5000 + 10^6/20s} \left(-\frac{1}{200}\right) \frac{5000(10^8/s)}{5000 + 10^8/s}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20.000)} \qquad (۲۸)$$

شکل ۲۶ـ۱۶ اگر $H(s) = V_{out}/V_{in}$ باشد این تقویت‌کننده منحنی اندازه بُود شکل ۲۷ـ۱۶ (ب) را دارد و زاویه فاز آن نیز در شکل ۲۸ـ۱۶ است.





شکل ۲۷_۱۶ (الف) منحنی‌های اندازه بُود جداگانه برای عوامل (2-) ، (s) ، $(1 + s/10)^{-1}$. (ب) چهار قطب جدا از هم بخش (الف) با هم جمع شده‌اند تا منحنی‌های اندازه بُود برای تقویت‌کننده شکل ۲۶_۱۶ به‌دست آید.

آن‌چه می‌بینیم یک ثابت $20 \log |-2| = 6$ dB ، نقاط شکست در $\omega = 10$ rad/s و $\omega = 20000$ rad/s به آن اضافه‌شده تا منحنی اندازه بُود شکل ۲۷-۱۶(ب) به دست آید.

تمرین

۱۳-۱۶ منحنی اندازه بُود را برای H(s) برابر با (الف) 50/(s + 100)، (ب) (s + 10)/(s + 100) (ج) (s + 10)/s بیابید.

جواب: (الف) در $\omega < 100$ ، 6 dB-، در $\omega > 100$ ، 20 dB/dec- ، (ب) در $\omega < 10$ ، 20dB-، در $10 < \omega < 100$ ، 20 dB/dec+ ، در $\omega > 100$ ، 0 dB و (ج) در $\omega > 10$ ، 0 dB، در $\omega < 10$ ، 20 dB/dec-.

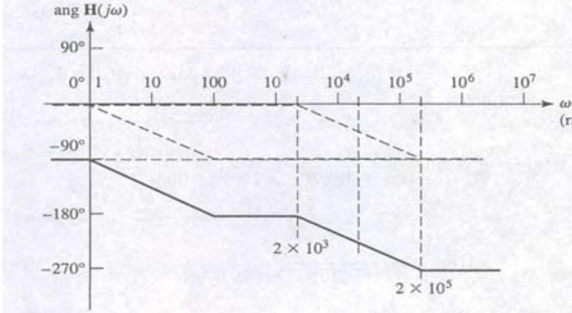
قبل از ساخت منحنی فاز برای تقویت کننده شکل ۲۶-۱۶، بیایید چندلحظه‌ای را صرف بررسی جزئیات رسم نمودار بُود اندازه کنیم.

اول این‌که بر جمع ترسیمی نمودارهای اندازه زیاد تکیه نکنیم. مقدار دقیق اندازه کل را در بعضی نقاط با در نظر گرفتن مقادیر مجانب در آن نقاط به سادگی می‌توان یافت. مثلاً در بخش هموار بین $\omega = 10$ و $\omega = 20000$ در شکل ۲۷-۱۶ (الف) زیرفرکانس گوشه $\omega = 2000$ قرار داریم و می‌توانیم $(1 + s / 20000)$ را مساوی 1 بگیریم. همچنین اگر بالای $\omega = 10$ باشیم، می‌توانیم $(1 + s / 10)$ را با $\omega / 10$ نشان دهیم. پس

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega / 10)(1)} \right| = 20 \log 20 = 26 \text{ dB} \qquad (10 < \omega < 20,000)$$

همچنین ممکن است به محل تقاطع مجانب با محور افقی در انتهای بالایی علاقمند باشیم. دو عامل مخرج در این فرکانس‌ها با $\omega / 10$ و $\omega / 20,000$ تقریب شده‌اند. پس:

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega / 10)(\omega / 20,000)} \right| = 20 \log \left| \frac{400,000}{\omega} \right|$$



شکل ۲۸_۱۶ منحنی خط پر پاسخ فاز مجانبی تقویت‌کننده شکل ۲۶_۱۶ را نشان می‌دهد.

چون در محل تقاطع، $H_{dB} = 0$ است، پس $1 = 400,000/\omega$ و بنابراین فرکانس محل برخورد $\omega = 400,000$ rad/s می‌باشد.

در بسیاری از موارد رسم دقیق منحنی بُود روی کاغذ نیمه لگاریتمی لازم نیست. درعوض روی کاغذ خطدار معمولی یک محور لگاریتمی رسم می‌کنیم. برای انجام این کار باید فاصله‌ای، مثل L را به عنوان یک دهه (decode) انتخاب کنیم، پس L فاصله بین $\omega = \omega_1$ تا $\omega = 10\,\omega_1$ است (ω_1 معمولاً مضربی از 10 است) و ω در سمت راست ω_1 فرض می‌شود و فاصله آن را تا ω_1 برابر x تصور می‌کنیم، یعنی $x / L = \log(\omega / \omega_1)$. اطلاع از مقادیر زیر در این راستا مفید است. به ازای $\omega = 2\omega_1$ داریم $x = 0.3$ L؛ با $\omega = 4\omega_1$ داریم $x = 0.6$ L؛ به ازای $\omega = 5\omega_1$ داریم $x = 0.7$ L.

مثال ۹_۱۶

منحنی فاز $H(s) = -2s/[(1 + s/10)(1 + s/20,000)]$ را رسم کنید.

با بررسی $H(j\omega)$ شروع می‌کنیم:

$$H(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/20,000)} \qquad (۲۹)$$

زاویه صورت مقدار ثابت -90° است.

بقیه عامل‌ها به صورت جمع زوایای قطب‌های $\omega = 10$ و $\omega = 20000$ در نمودار تأثیر می‌گذارند. در شکل ۲۸-۱۶ سه جمله فوق به صورت مجانب‌های خط‌چین رسم شده‌اند و حاصل جمع به صورت منحنی توپر نشان داده شده است. اگر منحنی را به اندازهٔ 360° به بالا ببریم، یک نمودار هم‌ارز به دست می‌آید.

پاسخ فاز را هم می‌توان با مقادیر دقیق به دست آورد. مثلاً در $\omega = 10^4$ rad/s، هر زاویه در شکل ۲۸-۱۶ از صورت و مخرج معادله (۲۹) به دست می‌آید. زاویه صورت -90° است. زاویه قطب در $\omega = 10$ هم برابر -90° است. زیرا ω از 10 برابر فرکانس گوشه بزرگتر است. بین 0.1 تا 10 برابر فرکانس گوشه، برای یک قطب تنها، شیب -45° در هر دهه است. در نقطه شکست 20000 rad/s زاویه چنین محاسبه می‌شود: $-45^\circ \log (\omega/0.1\,a) = -45^\circ \log [10,000 / (0.1\ 20,000)] = -31.5^\circ$.

جمع جبری این سه فاز برابر است با a $-90^\circ - 90^\circ - 31.5^\circ = -211.5^\circ$. این مقدار به منحنی مجانبی شکل ۲۸-۱۶ خیلی نزدیک است.

تمرین

۱۴-۱۶ منحنی فاز بُود برای H(s)، (الف) 50 / (s + 100)، (ب) (s + 10) / (s + 100) و (ج) (s + 10) / s را رسم کنید.

جواب (الف): در $\omega < 10$ برابر 0°، در $10 < \omega < 1000$ برابر -45°/dec و در $\omega > 1000$ برابر -90°.

(ب): در $\omega < 1$ برابر 0°، در $1 < \omega < 10$ برابر $+45^\circ$/dec، در $10 < \omega < 100$ برابر 45°، در $100 < \omega < 1000$ برابر -45°/dec، در $\omega > 1000$ برابر 0°.

(ج): در $\omega < 1$ برابر -90°، در $1 < \omega < 100$ برابر $+45^\circ$/dec و در $\omega > 100$ برابر 0°.

جملات مرتبه بالاتر

صفرها و قطب‌هایی که بررسی کردیم همگی از جملات مرتبه اول مثل $s^{\pm1}$، $(1 + 0.25)^{\pm1}$ و غیره تشکیل شده بودند. می‌توان تحلیل را به قطب‌ها و صفرهای مرتبه بالاتر هم به‌راحتی گسترش داد. جمله $s^{\pm n}$ اندازه پاسخی را مشخص می‌کند که از $\omega = 1$ با شیب $\pm 20n$ dB / dec عبور می‌کند. پاسخ فاز، یک زاویه ثابت $\pm 90n^\circ$ می‌باشد. همچنین صفرهای چندگانه $(1 + s/a)^n$، باید از جمع n منحنی اندازه پاسخ یا n منحنی پاسخ فاز یک صفر

ساده به‌دست آید. بنابراین منحنی مجانبی اندازه در $\omega < a$ برابر 0 dB است و شیب برابر 20n dB/dec در $\omega > a$ می‌باشد. خطا در $\omega = a$ برابر 3n dB- و در $\omega = 0.5\,a$ و $\omega = 2a$ برابر n dB- است. منحنی فاز برای $\omega < 0.1a$ برابر 0° است، $90n^\circ$ برای $\omega > 10\,a$ و $45n^\circ$ در $\omega = a$ می‌باشد، این منحنی خط راستی است با شیب $45n^\circ$ / dec برای $0.1\,a < \omega < 10\,a$ و خطاهایش در دو فرکانس $\pm 5.71n^\circ$ می‌باشد.

به این ترتیب منحنی‌های اندازه و فاز مربوط به عباراتی چون $(1 + s/20)^{-3}$ را می‌توان به سرعت ترسیم کرد ولی باید به خاطر داشت که با توان‌های بالاتر خطاهای بزرگتری را داریم.

جفت‌های مزدوج مختلط

آخرین عاملی که در نظر می‌گیریم یک جفت صفر یا یک جفت قطب مزدوج است. شکل استاندارد این عامل را به صورت زیر می‌توان تصور کرد:

$$H(s) = 1 + 2\,\zeta\,(\frac{s}{\omega_0}) + (\frac{s}{\omega_0})^2$$

کمیت ζ همان ضریب میرایی بخش ۱-۱۶ است و بزودی خواهیم دید که ω_0 هم فرکانس گوشه پاسخ مجانبی است.

اگر $\zeta = 1$ باشد، آنگاه $H(s) = 1 + 2\,(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/\omega_0)^2$ خواهد بود که صفری مرتبه دو و مانند آن‌چه در بالا دیدیم می‌باشد. اگر $\zeta > 1$ باشد، آنگاه H(s) از دو صفر ساده تشکیل شده است. اگر $\zeta = 1.25$ باشد، در این صورت $H(s) = 1 + 2.5\,(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/2\omega_0)(1 + s/0.5\omega_0)$ شده و باز هم وضعیت آشنایی است.

وقتی $0 \le \zeta \le 1$ باشد وضع جدیدی پیش می‌آید. لزومی ندارد جفت ریشه‌های مزدوج مختلط را پیدا کنیم. در عوض مقادیر فرکانس‌های بالا و پایین مجانبی را برای اندازه هر فاز به دست می‌آوریم و بسته به مقدار ζ اصلاحی را روی مقدار ζ انجام می‌دهیم.

برای پاسخ اندازه داریم:

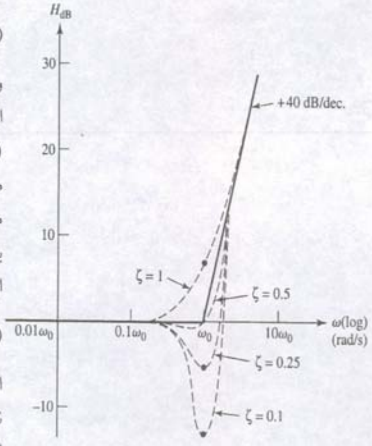
$$H_{dB} = 20\log|H(j\omega)| = 20\log|1 + j2\zeta\,(\frac{\omega}{\omega_0}) - (\frac{\omega}{\omega_0})^2| \qquad (۳۰)$$

وقتی $\omega << \omega_0$ باشد، $H_{dB} = 20\log|1| = 0$ dB است، این مجانب فرکانس پایین است. پس اگر $\omega >> \omega_0$ باشد، تنها جمله مرتبه دوم اهمیت دارد و در این حالت $H_{dB} = 20\log|-(\omega/\omega_0)^2| = 40\log(\omega/\omega_0)$ خواهد بود. شیب هم +40 dB/dec می‌باشد. این مجانب فرکانس بالاست و دو مجانب در $\omega = \omega_0$ و 0 dB با هم برخورد می‌کنند. منحنی خط پر در شکل ۲۹-۱۶ این نمایش پاسخ اندازه مجانبی را نشان می‌دهد. با این وجود، باید اصلاحی بر فرکانس گوشه اعمال گردد. اجازه دهید تا در معادله (۳۰)، $\omega = \omega_0$ باشد. در این صورت:

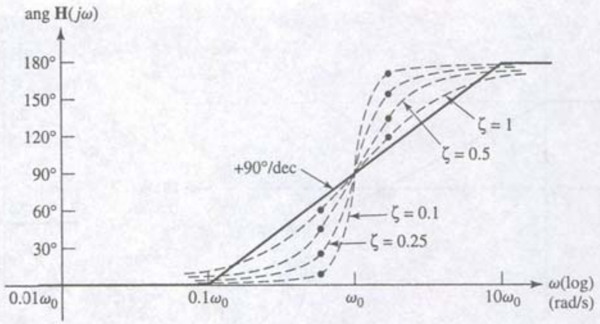
$$H_{dB} = 20\log|j2\zeta\,(\frac{\omega}{\omega_0})| = 20\log(2\zeta) \qquad (۳۱)$$

اگر $\zeta = 1$ باشد که یک حالت حد است، اصلاح +6 dB است. برای $\zeta = 0.5$، اصلاحی لازم نیست و اگر $\zeta = 0.1$ باشد، اصلاح 14 dB- خواهد بود. با دانستن یکی از این اصلاحات، کافی است تا پاسخ اندازه مجانبی ترسیم گردد. شکل ۲۹-۱۶ منحنی‌های دقیقتری را از معادله (۳۰) در ازای 0.1، 0.25، 0.5 و 1 = ζ نشان می‌دهد. مثلاً اگر $\zeta = 0.25$ باشد، آنگاه مقدار دقیق H_{dB} در $\omega = 0.5\,\omega_0$ برابر است با

$$H_{dB} = 20\log|1 + j0.25 - 0.25| = 20\log\sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0\text{ dB}$$



شکل ۲۹-۱۶ منحنی بُود اندازه برای $H(s) = 1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2$ به ازای چند مقدار از ضریب میرایی مشاهده می‌شود.



شکل ۳۰-۱۶ تقریب خط مستقیم مشخصه فاز برای $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$ به صورت منحنی خط پر نشان داده شده است. پاسخ فاز واقعی برای $\zeta = 1, 0.5, 0.25, 0.1$ به صورت خط‌چین نشان داده شده‌اند.

نقاط اوج منفی مقدار حداقل را دقیقاً نشان نمی‌دهند. این مطلب را برای $\zeta = 0.5$ می‌توان دید. نقطه مینیمم همیشه در فرکانسی کمتر قرار دارد.

اگر $\zeta = 0$ باشد، آنگاه $H(j\omega_0) = 0$ و $H_{dB} = -\infty$ است. منحنی‌های بُود معمولاً برای این وضعیت ترسیم نمی‌شوند.

آخرین کار ترسیم پاسخ فاز مجانبی برای $H(j\omega) = 1 + j2\zeta\,(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$ است. در کمتر از $\omega = 0.1\,\omega_0$ زاویه را $\text{ang}\,H(j\omega) = 0^\circ$ می‌گیریم. در بیش از $\omega = 10\,\omega_0$ داریم

$$H(j\omega) = \text{ang}\,[-(\omega/\omega_0)^2] = 180^\circ$$

در فرکانس گوشه $\text{ang}H(j\omega_0) = \text{ang}(j2\zeta) = 90^\circ$ است. در فاصله $0.1\,\omega_0 < \omega < 10\,\omega_0$، با خط راستی چون منحنی توپر در شکل ۳۰-۱۶ آغاز می‌کنیم. این خط از $(0.1\omega_0\,,\,0^\circ)$ شروع شده از $(\omega_0\,,\,90^\circ)$ می‌گذرد و در $(10\,\omega_0\,,\,180^\circ)$ پایان می‌یابد. شیب هم 90° / dec است.

حال مقدار تصحیح را روی این منحنی اولیه برای مقادیر مختلف ζ انجام می‌دهیم. از معادله (۳۰) داریم:

$$\text{ang}\,H(j\omega) = \tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

برای به دست آوردن شکل تقریبی یک نقطه بالا و یک نقطه پایین $\omega = \omega_0$ کفایت می‌کند. اگر $\omega = 0.5\,\omega_0$ را انتخاب کنیم، داریم $\text{ang}\,H\,(j0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$، در حالی که زاویه در $\omega = 2\omega_0$ برابر $180^\circ - \tan^{-1}(4\zeta/3)$ است. منحنی‌های فاز به صورت خطوط شکسته در شکل ۳۰-۱۶ به ازای 0.1، 0.25، 0.5 و 1 = ζ نشان داده شده‌اند. نقاط توپر متعلق به $\omega = 0.5\,\omega_0$ و $\omega = 2\omega_0$ است.

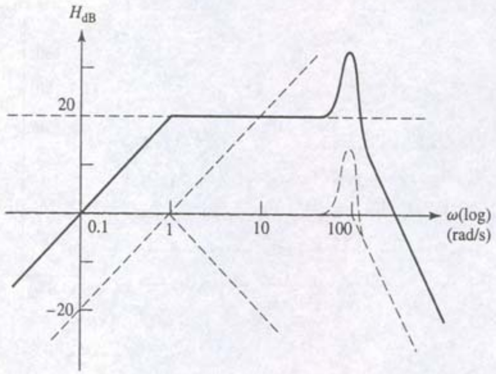
اگر جملات مربع در مخرج ظاهر شوند، هر دو منحنی‌های اندازه و فاز منفی آن‌هایی هستند که در بالا بحث شد. موضوع را با مثالی خاتمه می‌دهیم.

مثال ۱۰-۱۶

منحنی بُود را برای تابع تبدیل $H(s) = 100{,}000s\,/\,[(s + 1)(10{,}000 + 20s + s^2)]$ رسم کنید.

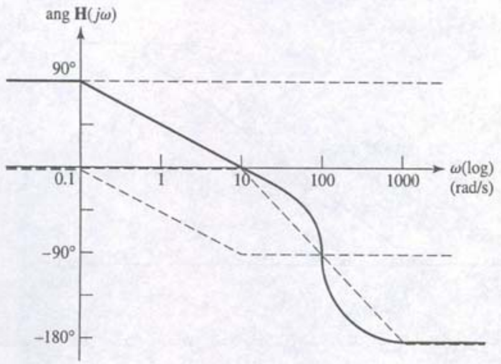
بگذارید ابتدا جمله درجه دو را بررسی کنیم و آن را طوری مرتب نماییم که در آن مقدار ζ دیده شود. کار را با تقسیم جمله مرتبه 2 بر عدد ثابتش، 10000 شروع می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{10s}{(1 + s)(1 + 0.002s + 0.0001s^2)}$$



شکل ۳۱-۱۶ منحنی اندازه بُود تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{100000s}{(s + 1)\ (10000 + 20s + s^2)}$$



شکل ۳۲-۱۶ منحنی فاز بُود تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{100000s}{(s + 1)\ (10000 + 20s + s^2)}$$

بررسی جملهٔ s^2 نشان می‌دهد که $\omega_0 = \sqrt{1/0.0001} = 100$ است. جمله خطی آن را طوری می‌نویسیم تا ضریب 2، ضریب s/ω_0 و بالاخره ضریب ζ را نمایش دهد.

$$H(s) = \frac{10s}{(1 + s)[(1 + 2)(0.1)(s/100) + (s/100)^2]}$$

و می‌بینیم $\zeta = 0.1$ است.

مجانب‌های منحنی پاسخ اندازه به طور خط‌چین در شکل ۳۱-۱۶ کشیده شده‌اند: 20 dB برای ضریب 10، یک خط مستقیم بینهایت از $\omega = 1$ با شیب +20 dB/dec برای جمله s، گوشه‌ای در $\omega = 1$ برای قطب ساده و یک گوشه در $\omega = 100$ با شیب -40 dB/dec برای عبارت مرتبه دو در مخرج است. با جمع این چهار منحنی و اعمال اصلاح +14 dB برای جمله مرتبه دو منحنی خط پر شکل ۳۱-۱۶ را نتیجه می‌دهد.

پاسخ فاز شامل مؤلفه‌های زیر است. $+90^\circ$ برای عامل s، 0° برای $\omega < 0.1$، -90° برای $\omega > 10$، -45°/dec برای قطب ساده و 0° برای $\omega < 10$، -180° برای $\omega > 1000$ و -90° در هر دهه برای جمله توان دوم. جمع این چهار مجانب به‌علاوه کمی اصلاحات برای $\zeta = 0.1$ به صورت منحنی توپر در شکل ۳۲-۱۶ ملاحظه می‌شود.

تمرین

۱۵-۱۶ اگر $H(s) = 1000s^2 / (s^2 + 5s + 100)$ باشد، منحنی اندازه بُود را رسم کنید و برای مقادیر زیر آن را محاسبه نمایید. (الف) ω وقتی $H_{dB} = 0$ است، (ب) H_{dB} در $\omega = 1$ و (ج) H_{dB} وقتی $\omega = \infty$.

جواب: 0.316 rad/s، 20 dB و 60 dB.

تحلیل کامپیوتری

رسم منحنی‌های بُود روش باارزشی است. در بسیاری از موارد یک نمودار تقریبی سریع لازم است (مانند آزمایش‌ها یا وقتی یک توپولوژی مدار خاصی برای کاربردی خاص موردنیاز است). و فقط دانستن شکل پاسخ کفایت می‌کند. علاوه بر آن تعیین ضرایب و فاکتورها در منحنی‌های بُود به هنگام طراحی فیلترها بسیار ارزشمند است.

در شبیه‌سازی‌هایی که منحنی‌های پاسخ دقیق لازمند (مانند هنگامی که طراحی نهایی مدار صورت می‌گیرد)، از چند برنامه کامپیوتری می‌توان استفاده کرد. اولین برنامه استفاده از متلب

برای تولید پاسخ فرکانس است. برای تحقیق این کار، باید ابتدا تابع تبدیل صحیح مدار به دست آید. با این وجود تجزیه و یا ساده‌سازی عبارت لزومی ندارد.

مدار شکل ۲۶-۱۶ را در نظر بگیرید. قبلاً گفتیم که تابع تبدیل برای این مدار به صورت زیر بیان می‌شود،

$$H(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20{,}000)}$$

مایلیم نمودار دقیقی را برای این تابع در فاصله فرکانس 100 mrad/s، 1 Mrad/s رسم کنیم. چون منحنی نهایی در مقیاس لگاریتمی ترسیم می‌شود، نیازی به ایجاد فواصل مساوی برای فرکانس‌ها نیست. درعوض از تابع logspace() در متلب برای تولید یک بردار فرکانس استفاده می‌شود که به ترتیب دو آرگومان برای نمایش فرکانس‌های آغاز و پایان به‌صورت توان 10 (در این مثال 1- و 6)، و سومین آرگومان تعداد نقاط موردنظر را مشخص می‌کند. بنابراین برنامه متلب به صورت زیر است:

```
EDU >> W = logspace (-1, 6, 100) ;
EDU >> denom = (1 + j * W / 10). * (1 + j * W / 20000) ;
EDU >> H = - 2 * j * W. / denom ;
EDU >> Hdb = 20 * log 10(abs(H)) ;
EDU >> semilogx(w, H db)
EDU >> xlabel ('frequency (rad/s)')
EDU >> ylabel ('|H(jw)| (dB)')
```

که منحنی شکل ۳۳-۱۶ را به دست می‌دهد.

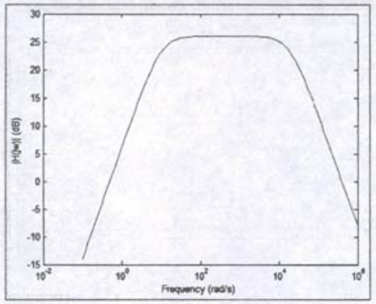
چند توضیح درباره برنامه متلب توجه دارد. اول این‌که ما $s = j\omega$ را در عبارت H(s) جایگزین کرده‌ایم. همچنین متلب، ω را یک بردار یا یک ماتریس بی‌بُعد می‌پندارد.

هنگامی که متلب سعی در اعمال جبر ماتریسی به مخرج هر عبارت جبری بنماید، این متغیر مشکلاتی را به وجود می‌آورد. بنابراین مخرج در خط جداگانه محاسبه شده است و از عملگر '.*' برای ضرب به جای '*' استفاده شده است. این عملگر جدید معادل با برنامه متلب زیر است.

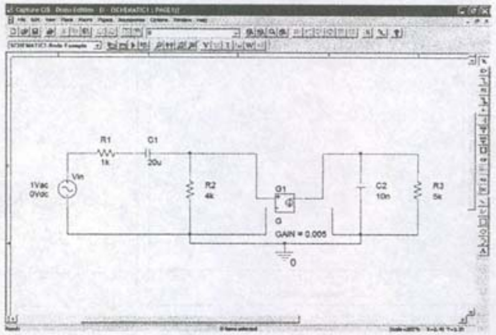
```
EDU >> for k = 1:100
denom = (1 + j * W (k) / 10) * (1 + j * W(k) / 20000) ;
end
```

به همین ترتیب عملگر جدید '/.' در خط بعدی برنامه به کار رفته است. چون نتایج به dB موردنظر است، لذا تابع log 10() احضار شده است. log() لگاریتم طبیعی را در متلب نشان می‌دهد. بالاخره، فرمان جدید ترسیم semilogx() برای رسم نمودار و انتخاب واحد نیمه‌لگاریتمی برای محور x به کار می‌رود. در این‌جا به خواننده توصیه می‌شود که به مثال قبل بازگردد و با استفاده از این تکنیک منحنی‌های دقیقی را برای مقایسه منحنی‌های بُود تولید کند.

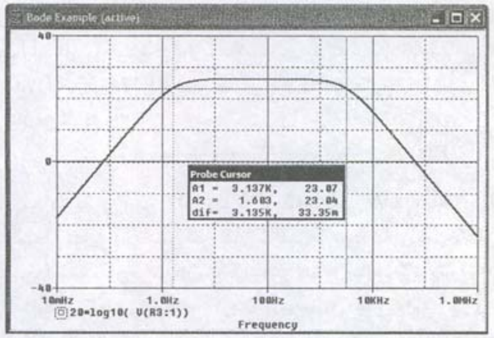
PSpice هم برای تولید منحنی‌های پاسخ فرکانسی ابزار مناسبی است. شکل ۳۴-۱۶ (الف) مدار شکل ۲۶-۱۶ را نشان می‌دهد که با ابزار ورودی شماتیک دوباره ترسیم شده است. از شبه دستور bubble برای تولید برچسب‌های ولتاژ V_x و V_{out} استفاده شده است به طوری که در برنامه probe بهتر قابل شناسایی باشند. منبع VAC با یک دامنه ac، 1 V به خاطر سادگی به کار رفته است، گرچه هر مقدار دیگری هم می‌توان به کار برد. شبیه‌سازی یک موج جاروب ac نیز موردنیاز است تا پاسخ فرکانسی معین گردد. شکل ۳۴-۱۶ (ب) با 10 نقطه در هر دهه تولید شده است (نوع جاروب AC، Decade انتخاب شده است) که از 100 mHz تا 1 MHz را می‌پوشاند. توجه کنید که این شبیه‌سازی به Hz انجام شده است و نه به rad/s.



شکل ۳۳-۱۶ نمودار H_{dB}.



(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۱۶ (الف) مدار شکل ۲۶-۱۶ با ترسیم تصویر PSpice رسم شده است. (ب) پاسخ فرکانس مدار شکل ۲۶-۱۶ به مقیاس dB.

مجدداً به خواننده توصیه می‌شود مدارهای به کار رفته در مثال‌ها را شبیه‌سازی کند و نتایج را با منحنی‌های بُود مقایسه نماید.

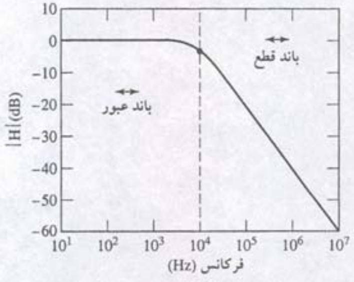
۱۶-۷ فیلترها

طراحی فیلتر یا صافی موضوعی کاربردی و جالب است و می‌توان به طور جداگانه برای آن کتابی نوشت. در این بخش بعضی از مفاهیم فیلتر کردن را معرفی می‌کنیم و هر دو نوع مدار فیلتر غیرفعال و فعال را توضیح خواهیم داد. این مدارها ممکن است خیلی ساده و متشکل از یک خازن یا القاگر باشند ولی اضافه شدن آن به یک شبکه مفروض موجب اصلاح رفتار آن می‌شود. این مدارها می‌توانند با ترکیبی از مقاومت‌ها، خازن‌ها، القاگرها و opampها برای تولید منحنی پاسخ دقیقی از یک کاربرد مفروض، بسیار پیشرفته باشند. فیلترها در الکترونیک مدرن برای ایجاد ولتاژ dc به وسیله منابع تغذیه، حذف پارازیت‌ها در کانال‌های مخابراتی، تفکیک کانال‌های رادیو و تلویزیون از سیگنال مخلوط شده که به وسیله آنتن‌ها تولید می‌گردد و تقویت سیگنال صوتی بم در سیگنال استریو اتومبیل به کار می‌روند.

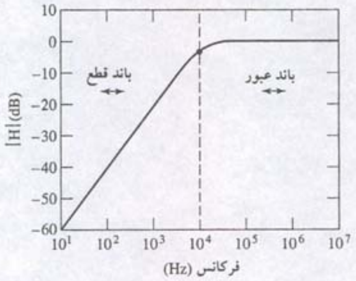
مفهوم اصلی یک فیلتر این‌است‌که فرکانس‌های مجاز به عبور از یک مدار را انتخاب می‌نماید. بسته به کاربرد، انواع متعددی از فیلترها موجودند. یک فیلتر **پایین‌گذر** (باند پایین) که پاسخ آن در شکل ۳۵-۱۶(الف) مشاهده می‌شود، فرکانس‌های زیر فرکانس قطع را از خود عبور می‌دهد، ضمن این‌که فرکانس‌های بالاتر در آن به شدت میرا می‌گردند. از طرف دیگر یک فیلتر **بالاگذر** عکس این کار را انجام می‌دهد و پاسخی مثل شکل ۳۵-۱۶(ب) دارد. معیار اصلی کیفیت فیلتر تیزی در نقطهٔ قطع یا شیب منحنی در حوالی فرکانس گوشه است. به‌طور کلی منحنی‌های پاسخ با شیب بیشتر به مدارهای مختلط پیچیده‌تری نیاز دارد.

از ترکیب فیلتر بالاگذر و پایین‌گذر مداری به‌نام **فیلتر میان‌گذر** ساخته‌می‌شود، شکل۳۵-۱۶(ج). در این نوع فیلتر ناحیه بین دو فرکانس گوشه **باند عبور** خوانده می‌شود. ناحیه خارج باند فوق فیلتر، **باند قطع** نام دارد. این نام به فیلترهای بالا یا پایین‌گذر هم اتلاق می‌شود، شکل ۳۵-۱۶(الف) و (ب). با تعویض فرکانس قطع می‌توان فیلتر **میان‌نگذر** ساخت که فرکانس‌های بالاتر یا پایین‌تر را عبور داده ولی فرکانس‌های بین این دو را حذف می‌کند (شکل ۳۵-۱۶(د)).

فیلتر حذف نوع خاصی از فیلتر میان‌نگذر است که دارای پاسخ باریکی است و یک مؤلفه فرکانس از یک سیگنال را حذف می‌کند. فیلترهای **چند باندی** نیز قابل ساختند. این مدارها حاوی چند فیلتر میان‌گذر و میان‌نگذر می‌باشند. طراحی این فیلترها ساده است ولی از محدوده بحث در این کتاب خارج می‌باشد.

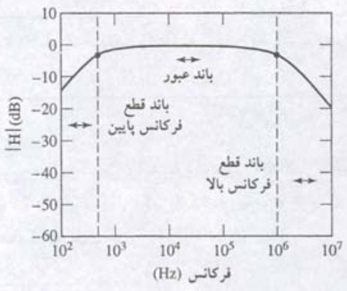


(الف)

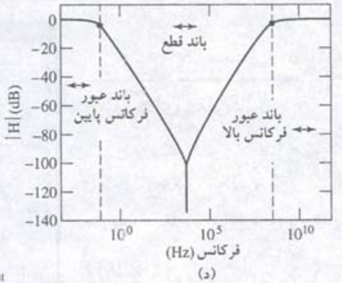


(ب)

شکل ۳۵-۱۶ منحنی پاسخ فرکانس برای (الف) فیلتر پایین‌گذر، (ب) فیلتر بالاگذر.



(ج)



(د)

شکل ۳۵-۱۶ منحنی پاسخ فرکانس برای (ج) فیلتر میان‌گذر و (د) فیلتر میان‌گذر.

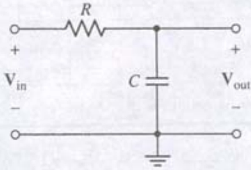
فیلترهای غیرفعال

می‌توان یک فیلتر را با استفاده از یک خازن و یک مقاومت ساخت، شکل ۳۶-۱۶(الف). تابع تبدیل برای این مدار فیلتر پایین‌گذر عبارت است از:

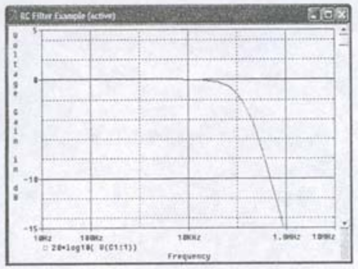
$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + RCs} \tag{۳۲}$$

$H(s)$ دارای یک فرکانس گوشه است که در $\omega = 1 / RC$ رخ می‌دهد و یک صفر که در بینهایت واقع و موجب رفتاری پایین‌گذر می‌شود. در فرکانس‌های پایین ($s \to 0$)، $|H(s)|$ در نزدیکی حداکثر مقدارش یعنی واحد یا 0 dB خواهد بود و فرکانس‌های بالا ($s \to \infty$)، $|H(s)| \to 0$ را نتیجه می‌دهد. این رفتار با ملاحظه امپدانس یک خازن بهتر درک می‌شود. با افزایش فرکانس سیگنال ac خازن رفتاری شبیه به اتصال کوتاه پیدا می‌کند، که منجر به کاهش ولتاژ خروجی می‌شود. یک منحنی پاسخ نمونه برای این فیلتر با $R = 500\ \Omega$ و $C = 2nF$ در شکل ۳۶-۱۶(ب) دیده می‌شود. فرکانس گوشه 159 kHz (1 Mrad/s) را با جابه‌جایی مکان‌نما به محل 3- dB می‌توان مشاهده کرد. تیزی منحنی پاسخ در حوالی فرکانس قطع را با افزودن عناصر رآکتیوی مثل خازن و مقاومت می‌توان اصلاح نمود.

با تعویض خازن و مقاومت در شکل ۳۶-۱۶(الف) می‌توان یک فیلتر بالاگذر ساخت. این فیلتر در مثال زیر ملاحظه می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۳۶-۱۶ (الف) یک فیلتر پایین‌گذر که از ترکیب یک مقاومت و یک خازن ساخته شده است. (ب) پاسخ فرکانس مدار با PSpice تولید شده است.

مثال ۱۱-۱۶

یک فیلتر بالاگذر با فرکانس گوشه 3 kHz طراحی کنید.

حل را با انتخاب توپولوژی مدار آغاز می‌کنیم. چون هیچ اشاره‌ای به تیزی پاسخ داده نشده است، لذا مدار ساده شکل ۳۷-۱۶ را برمی‌گزینیم.

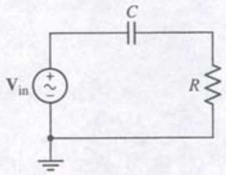
تابع تبدیل این مدار به سادگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_x} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

که دارای صفری در $s = 0$ و قطبی در $s = -\frac{1}{RC}$ می‌باشد و بنابراین رفتار آن به شکل فیلتر بالاگذر است.

فرکانس گوشه یا قطع مدار فیلتر $\omega_L = 1/RC$ است و مایلیم که این فرکانس برابر $\omega_L = 2\pi f_L = 2\pi(3000) = 18.85\ krad/s$ باشد. مجدداً باید مقادیری برای مقاومت R و خازن C انتخاب کنیم ولی چون اطلاعات زیادی در این‌جا داده نشده است در انتخاب آزادیم.

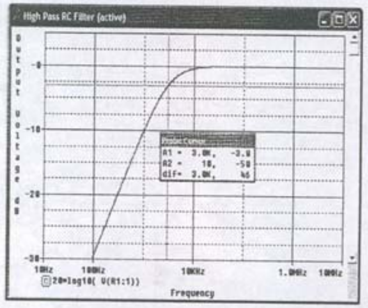
بنابراین مقاومت استاندارد 4.7 kΩ را برای R انتخاب می‌کنیم و به این ترتیب $C = 11.29\ nF$ خواهد شد. تنها گام باقی مانده تأیید طرح با کمک شبیه‌سازی PSpice است. منحنی پاسخ فرکانس در شکل ۳۸-۱۶ ملاحظه می‌گردد.



شکل ۳۷-۱۶ یک مدار فیلتر بالاگذر که در آن مقادیر R و C باید انتخاب شوند تا فرکانس قطع 3kHz به‌دست آید.

تمرین

۱۶-۱۶ یک فیلتر بالاگذر با فرکانس قطع 13.56 kHz که فرکانس یک منبع تغذیه rf است، بسازید. با PSpice صحت آن را تأیید کنید.



شکل ۳۸-۱۶ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی‌شده طرح نهایی با فرکانس قطع 3kHz (3dB) مورد انتظار.

فیلترهای میان‌گذر

قبلاً چند مدار را در این فصل مشاهده کردیم که هر یک می‌توانست یک فیلتر میان‌گذر باشد (مثل شکل‌های ۱-۱۶ و ۸-۱۶). مدار ساده ۳۹-۱۶ را در نظر بگیرید که در آن خروجی از دو سر مقاومت اخذ می‌شود. تابع تبدیل این مدار برابر است با:

$$A_V = \frac{sRC}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad (۳۳)$$

اندازه این تابع برابر زیر است:

$$|A_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad (۳۴)$$

که در حد $\omega \to 0$ تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$|A_V| \approx \omega RC \to 0$$

و در حد $\omega \to \infty$ برابر است با:

$$|A_V| \approx \frac{R}{\omega L} \to 0$$

ما با توجه به تجربه خود از نمودار بُود می‌دانیم که معادله (۳۳) سه فرکانس بحرانی را به نمایش گذاشته است: یکی از آن‌ها صفر تابع و دو تابع دیگر قطب هستند. برای داشتن یک پاسخ فیلتر میان‌گذر که مقدار پیک آن واحد باشد (0 dB)، هر دو فرکانس قطب‌ها باید بزرگتر از 1 rad/s باشد، که فرکانس crossover جمله صفر است. این دو فرکانس بحرانی با تبدیل معادله (۳۳) به فرم حاصل‌ضرب با تعیین مقادیر ω که در آن معادله (۳۴) برابر $1/\sqrt{2}$ شود به دست می‌آید. آنگاه فرکانس مرکزی این فیلتر در $\omega = 1/\sqrt{LC}$ خواهد بود. بنابراین با کمی دستکاری جبری، پس از برابرکردن معادله (۳۴) با $1/\sqrt{2}$ داریم:

$$\left(1 - LC\omega_c^2\right)^2 = \omega_c^2 R^2 C^2 \qquad (۳۵)$$

با گرفتن جذر از دو طرف داریم:

$$LC\omega_c^2 + RC\omega_c - 1 = 0$$

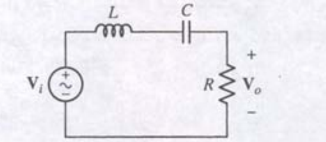
و از آنجا خواهیم داشت:

$$\omega_c = -\frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \qquad (۳۶)$$

در این حل، فرکانس منفی حل غیر فیزیکی معادله است و لذا مجبوریم فقط از ریشه مثبت معادله (۳۶) استفاده کنیم. به این ترتیب به نظر می‌رسد که مدار تنها یک فرکانس بحرانی دارد. با این وجود کمی زود قضاوت کردیم و در واقع ریشه منفی معادله (۳۵) هم معتبر است زیرا از طرفین جذر گرفته‌ایم، یعنی:

$$\omega_c = \frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \qquad (۳۷)$$

که از آن می‌توان نشان داد که فقط ریشه‌های مثبت از نظر فیزیکی معنی دارند. بنابراین ما ω_L را از معادله (۳۶) و ω_H را از معادله (۳۷) انتخاب می‌کنیم. چون $\omega_H - \omega_L = \mathcal{B}$، کمی جبر نشان می‌دهد که $\mathcal{B} = R/L$ می‌باشد.



شکل ۳۹-۱۶ یک فیلتر ساده میان‌گذر با مدار RLC.

مثال ۱۲-۱۶

یک فیلتر میان‌گذر با عرض باند 1 MHz و فرکانس قطع بالا در 1.1 MHz طراحی کنید.

توپولوژی مدار شکل ۳۷-۱۶ را انتخاب می‌کنیم و فرکانس گوشه را به دست می‌آوریم. عرض باند با رابطه $f_H - f_L$ داده می‌شود، پس:

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100 \text{ kHz}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3 \text{ krad/s}$$

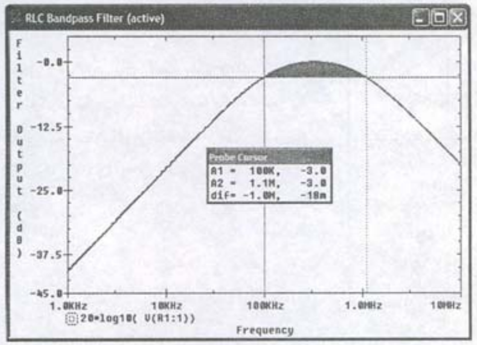
پس فرکانس قطع بالا (ω_H) در 6.912 Mrad/s خواهد بود.

برای پیشروی در طراحی مدار با این مشخصات، لازم است عبارتی برای هر فرکانس برحسب R، L و C به دست آوریم.

از برابری معادله (۳۷) با $2\pi(1.1 \times 10^6)$ و این که $\mathcal{B} = 2\pi\ (f_H - f_L) = 6.283 \times 10^6$ حل 1/LC به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}\mathcal{B} + \left[\frac{1}{4}\mathcal{B}^2 + \frac{1}{LC}\right]^{1/2} = 2\pi(1.1 \times 10^6)$$

یعنی $1/LC = 4.343 \times 10^{12}$. با انتخاب دلخواه $L = 1$ H (البته عملاً کمی بزرگ است)، خواهیم داشت $R = 6.283$ MΩ و $C = 230.3$ fF. باید متذکر شد که برای این مسئله حل منحصر بفردی وجود ندارد، زیرا هر یک از سه کمیت R، L و C می‌توانند نقطه شروع باشند. تصدیق صحت PSpice ما در شکل ۴۰-۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۴۰-۱۶ پاسخ شبیه‌سازی‌شده طراحی فیلتر میان‌گذر 1 MHz و فرکانس بالای قطع 1.1 MHz طبق تمایل. ناحیه فرکانس میان‌گذر سایه خورده است.

تمرین

۱۷-۱۶ یک فیلتر میان‌گذر با فرکانس قطع پایین 100 rad/s و فرکانس قطع بالای 10 krad/s طراحی کنید.

جواب: یکی از جواب‌های ممکن عبارت‌است از: $L=100$ mH، $R=990\ \Omega$ و $C=10\ \mu F$.

فیلتری را که بررسی کردیم، **فیلتر غیرفعال** می‌خوانند زیرا در ساخت آن‌ها از عناصر غیرفعال استفاده شده است. (در آن ترانزیستور، op-amp و نظایر آن به کار نرفته است). هر چند فیلترهای غیرفعال خیلی متداولند ولی مناسب هر کاربردی نمی‌باشند. تنظیم بهره یک فیلتر غیرفعال که به صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف می‌شود، خیلی مشکل است ضمن این‌که تقویت در مدارهای فیلتر نیز مورد توجه می‌باشد.

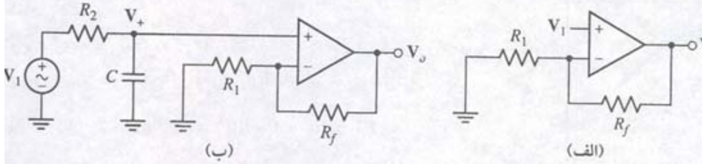
فیلترهای فعال

استفاده از یک عنصر فعال مثل op-amp در طراحی فیلتر می‌تواند بسیاری از کمبودهای فیلتر غیرفعال را جبران کند. همان‌طور که در فصل ۶ دیدیم، مدارهای op-amp به سادگی برای تهیه بهره می‌توانند طراحی شوند. این مدارها می‌توانند رفتاری شبیه به القاگر را در مجاورت خازن‌ها از خود به نمایش بگذارند.

مدار داخل یک op-amp حاوی خازن خیلی کوچکی است (در حدود 100 PF) و این موجب می‌شود تا حداکثر فرکانس کاری op-amp محدود گردد. بنابراین هر مدار op-amp همچون مدار پایین‌گذر عمل کرده و فرکانس قطع آن برای قطعات مدرن 20 MHz می‌باشد.

مثال ۱۳ـ۱۶

یک فیلتر پایین‌گذر فعال با فرکانس قطع 10 kHz و بهره ولتاژ 40 dB طراحی کنید.



شکل ۴۱ـ۱۶ (الف) یک مدار op amp معکوس‌نکننده ساده. (ب) یک فیلتر پایین‌گذر متشکل از یک مقاومت R_2 و یک خازن C که به ورودی اضافه شده است.

برای فرکانس‌های خیلی کمتر از 10 kHz لازم است مدار تقویت‌کننده بتواند بهره 40 dB یا 100 V/V را فراهم نماید. این کار به راحتی با یک تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر مثل شکل ۴۱ـ۱۶(الف) امکان‌پذیر است.

$$\frac{R_f}{R_1} + 1 = 100$$

برای داشتن فرکانس ـبالای گوشه در 10 kHz به یک فیلتر پایین‌گذر نیاز داریم (مثل شکل ۴۱ـ۱۶(ب)). برای به‌دست‌آوردن تابع تبدیل، از ورودی معکوس‌نکننده شروع می‌کنیم:

$$V_+ = V_i\,\frac{1/sC}{R_2 + 1/sC} = V_i\,\frac{1}{1 + sR_2C}$$

در ورودی وارون‌گر داریم:

$$\frac{V_o - V_+}{R_f} = \frac{V_+}{R_1}$$

از ترکیب این معادله و حل آن برای V_o درمی‌یابیم که

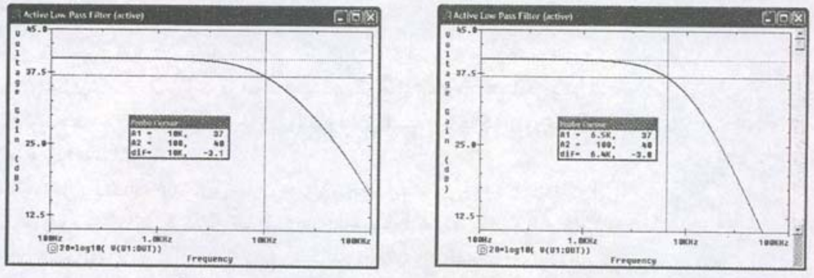
$$V_o = V_i\left(\frac{1}{1 + sR_2C}\right)\left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)$$

حداکثر مقدار بهره $A_V = V_o / V_i$ برابر است با $1 + R_f / R_1$. پس این کمیت را با 100 مساوی قرار می‌دهیم، چون هیچ یک از مقاومت‌ها در فرکانس گوشه $(R_2C)^{-1}$ وجود ندارد، هر یک از آن‌ها را می‌توان ابتدا انتخاب کرد. ما $R_1 = 1\ k\Omega$ انتخاب می‌کنیم و لذا $R_f = 99\ k\Omega$ خواهد شد.

با تنظیم دلخواه $C = 1\ \mu F$، می‌بینیم که

$$R_2 = \frac{1}{2\pi(10 \times 10^3)C} = 15.9\ \Omega$$

در این‌جا طراحی ما کامل است. آیا چنین است؟ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی شده این مدار در شکل ۴۲ـ۱۶(الف) نشان داده شده است.



شکل ۴۲ـ۱۶ (الف) پاسخ فرکانسی فیلتر با op amp μA741 که نشان می‌دهد فیلتر گوشه‌ای 6.4 kHz است. (ب) پاسخ فرکانسی همین فرکانس با op amp LF111. فرکانس گوشه‌ای این مدار، مقدار مطلوب 10 kHz است.

واضح است که طرح ما فرکانس قطع 10 kHz را شامل نمی‌شود. چه اشتباهی کرده‌ایم؟ بررسی دقیق محاسبات جبری خطایی را نشان نمی‌دهد، پس فرض غلطی در جایی مورد استفاده قرار گرفته است. شبیه‌سازی با op-amp ،μA741 انجام شده است و این خلاف فرضیات دریافتن مدار موردنظر است. به نظر می‌رسد که این انتخاب عامل خطا است. همان مدار با LF111 op-amp که به جای μA741 به‌کار رفته است، فرکانس قطع 10 kHz را مطابق میل به دست می‌دهد. نتیجه شبیه‌سازی شده در شکل ۴۲ـ۱۶(ب) آمده است.

متأسفانه μA741 op-amp با بهره 40 dB دارای فرکانس گوشه‌ای نزدیک به 10 kHz است که در این‌جا قابل چشم‌پوشی نیست. با این وجود LF111 تا فرکانسی حدود 75 kHz به فرکانس گوشه نمی‌رسد. این نقطه به قدر کافی از 10 kHz دور است و طراحی را تحت‌تأثیر قرار نمی‌دهد.

تمرین

۱۸-۱۶ یک مدار فیلتر پایین‌گذر با بهره 30 dB و فرکانس قطع 1 kHz طراحی کنید.

جواب: یک جواب ممکن با مقادیر زیر حاصل می‌شود:

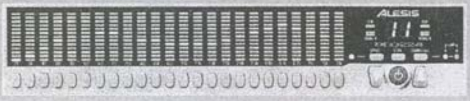
$R_1 = 100\ k\Omega$ ،$R_f = 3.062\ M\Omega$ ،$R_2 = 79.58\ \Omega$ و $C = 2\ \mu F$.

کاربرد عملی

تنظیم‌های صدای بم، زیر و میانی

توانایی تنظیم جداگانه صداهای زیر، بم و میانی در یک سیستم صوتی حتی در تجهیزات ارزان قیمت بسیار مورد توجه است. محدوده فرکانس صوتی (حداقل برای گوش انسان) در حد 20 Hz تا 20 kHz پذیرفته شده است که در آن ناحیه کوچکتر از 500 Hz مربوط به اصوات بم و بیشتر از 5 kHz مربوط به صدای زیر می‌باشد.

طراحی یک اکولایزر (متعادل‌ساز) گرافیکی به کوشش چندانی نیاز ندارد گرچه داشتن سیستمی مانند شکل ۴۳ـ۱۶ تلاش بیشتری می‌خواهد. سیگنال اصلی که ممکن است توسط یک گیرنده رادیویی یا شاید پخش CD تولید شود، متشکل از طیف وسیعی از فرکانس‌ها است که عرض باندی حدود 20 kHz دارد.

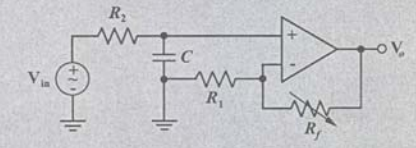


شکل ۴۳ـ۱۶ نمونه‌ای از اکولایزر گرافیکی.

این سیگنال باید به سه مدار op-amp مختلف ارسال شود که هر یک فیلتری متفاوت در ورودی خود دارد. مدار تنظیم صوت بم به یک فیلتر پایین‌گذر نیازمند است و مدار تنظیم فرکانس‌های زیر فیلتر بالاگذر نیاز دارد و بالاخره در مدار تنظیم فرکانس میانی یک فیلتر میان‌گذر نصب می‌شود. آنگاه خروجی هر مدار op-amp به یک مدار تقویت‌کننده مجموع اعمال می‌شود. نمودار بلوکی مدار کامل در شکل ۴۴ـ۱۶ ملاحظه می‌شود.

شکل ۴۴ـ۱۶ نمودار بلوکی یک مدار برابرساز گرافیکی ساده.

مدار ابتدایی بلوکی فوق در شکل ۴۵ـ۱۶ دیده می‌شود. این مدار از یک تقویت‌کننده معمولی یا غیرمعکوس‌گر با بهره $1 + R_f / R_1$ تشکیل شده و در آن یک فیلتر متشکل از یک مقاومت R_2 و خازن C کار گذاشته شده است. مقاومت پسخورد R_f یک مقاومت متغیر می‌باشد که به آن پتانسیومتر هم می‌گویند و تغییر بهره را از طریق یک پیچ ولوم در روی آن اجازه می‌دهد. کاربر به این پیچ، ولوم کنترل می‌گوید. شبکه فیلتر پایین‌گذر، فرکانس‌های وارده به op-amp را محدود می‌نماید. فرکانس گوشه درواقع $(R_2C)^{-1}$ است. اگر طراح مدار بخواهد به کاربر



شکل ۴۵ـ۱۶ بخش تنظیم یک مدار تقویت‌کننده.

اجـازه انـتخاب فـرکانس شکست را بـدهد، R_2 بـا پـتانسیومتر تعویض می‌شود و یا C می‌تواند با یک خازن متغیر جایگزین گردد. بقیه طبقات به طریق مشابه ساخته می‌شوند ولی فیلترهای ورودی با هم متفاوتند.

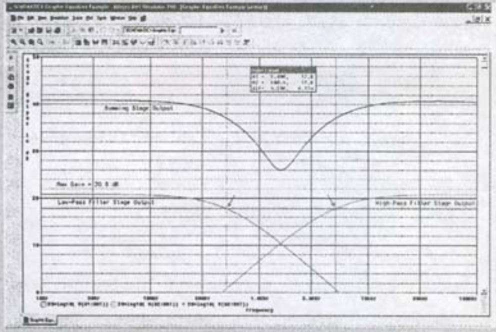
برای تفکیک مقاومت‌ها، خازن‌ها و op-ampها به هـر طـبقه زیرنویسی منطبق بر طبقه‌اش (b, m, t) تـخصیص یـافته است. با شروع از طـبقه زیـر، قـبلاً در استفاده از μA741 در مـحدوده 10-20 kHz و بهره بالا با مشکـل مـواجـه شـدیم. پس شـاید در این‌جا هم LF111 انتخاب مناسبی باشد. با انتخاب فرکانس گوشه در ناحیه صوت زیر 5 kHz باید داشته باشیم.

$$\frac{1}{R_{2t}C_t} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

بـا انـتخاب $C_t = 1\ \mu F$ مـقدار $R_{2t} = 31.83\ \Omega$ را داریـم. بـا انتخاب $C_b = 1\ \mu F$ هم در نـاحیه بَـم، $R_{2b} = 318.3\ \Omega$، بـا فرکانس قطع 500 Hz خواهد بود. ما طراحی فیلتر میان‌گذر را به خواننده واگذار می‌کنیم.

بخش دیگر طراحـی انـتخاب مـقادیر مـناسب R_{1t} و R_{1b} و مقاومت‌های پسخورد متناظر است. بدون هرگونه اصـرار، شـاید ساده‌ترین راه انـتخاب طـبقات یکـسان بـاشد. بـنابرایـن هـر دو مقاومت R_{1b} و R_{1t}، برابر 1 kΩ و R_{ft} و R_{fb} با پـتانسیومترهای 10 kΩ انـتخاب مـی‌شوند (بـنابرایـن از 0 تـا 10 kΩ در اخـتیار است). این انتخاب اجازه می‌دهد تا بلندی یک سیگنال تا 11 برابر دیگری باشد. در مواردی که بخواهیم طـراحـی قـابل جـابه‌جایی (پرتابل) باشد ولتاژهای تغذیه را ±9 V انتخاب می‌کنیم کـه در این صورت هنگام لزوم به سادگی تعویض می‌شود.

حال که طراحی طبقات فیلتر پایان یافته است، آماده‌ایم تا طبقه مجموع را طراحی نماییم. به منظور سادگی این طبقه را هم مشـابه طبقات دیگر تـغذیه مـی‌کنیم کـه ایـن خـود مـوجب مـحدودیت حداکثر ولتاژ خـروجی بـه کـمتر از 9V مـی‌گردد. در ایـن‌جا بـا تقویت کـننده مـعکوس‌گر آغاز مـی‌کنیم و خـروجی هـر فـیلتر op-amp مـستقیماً به مقاومت 1 kΩ خودش وصل می‌شود. دیگر پایانه 1 kΩ، آن‌گاه به ورودی طبقه تقویت کننده مـجموع وصـل می‌گردد. پتانسیومتر مناسبی برای تقویت کننده مجموع انـتخاب می‌شود تا از اشباع جلوگیری شود. بنابراین باید از محدوده ولتاژ ورودی و توان بلندگو آگاه باشیم. شکل ۴۶-۱۶ پـاسخ فـرکانس پیش‌بینی شده و مدار کامل و ولتاژ خروجی فیلترهای بم و زیر را با همه مقاومت‌های پسخوردی 9 kΩ نشان می‌دهد.



شکل ۴۶-۱۶ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی شده یک ترکیب فیلتر پایین‌گذر و بالاگذر.

۸-۱۶ خلاصه فصل و مرور

- تشدید وضعیتی است که در آن یک تابع تحریک سینوسی با دامنه ثابت، پاسخی با حداکثر دامنه تولید می‌کند.
- یک شبکه الکتریکی هنگامی در حالت تشدید است که ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی شبکه همفاز باشند.
- ضریب کیفیت متناسب با حداکثر انرژی در شبکه، تقسیم بر انرژی کل تلف شده در هر پریود است.
- یک فرکانس نصف توان به صورت فرکانسی کـه در آن انـدازه تـابع پـاسخ مـدار $1/\sqrt{2}$ بـرابـر مـقدار حداکثرش باشد، تعریف می‌شود.
- پهنا یا عرض باند یک مدار تشدید به صورت تفاضل بین فرکانس‌های بالا و پایین نصف توان تعریف می‌شود.
- یک مدار با Q بالا، مدار تشدیدی است که در آن، ضریب کیفیت بزرگتر از 5 است.
- در یک مدار Q بالا هر فرکانس نصف توان تقریباً در نصف عرض باند از فرکانس تشدید واقع است.
- یک مدار تشدید سری با امپدانس پایین در حالت تشدید مشخص می‌گردد، در صورتی که مدار تشدید موازی در تشدید، امپدانس بالا دارد.
- مدار تشدید سری هنگامی با یک مـدار تشـدید مـوازی مـعادل است کـه $R_p = R_s(1 + Q^2)$ و $X_p = X_s(1 + Q^{-2})$ باشد.

- مقادیر غیرعملی قطعات اغلب کار طراحی را ساده می‌کند. تابع تبدیل یک شبکه را می‌توان از لحاظ اندازه و فاز تغییر مقیاس داد و قطعات را بدینوسیله با مقادیر مناسب جایگزین نمود.
- نمودارهای بُود موجب می‌شود که یک تابع تبدیل به سرعت ترسیم گردد.
- چهار نوع فیلتر اصلی عبارتند از: فیلتر پایین‌گذر، فیلتر بالاگذر، فیلتر میان‌گذر، فیلتر میان‌نگذر.
- فیلترهای غیرفعال فقط از مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها استفاده می‌کنند. فیلترهای فعال بر op-amp یا دیگر عناصر فعال مبتنی می‌باشند.

۹-۱۶ خواندنی‌های کمکی

A good discussion of a large variety of filters can be found in:

J.T. Taylor and Q. Huang, eds., *CRC Handbook of Electrical Filters*. Boca Raton, Fla: CRC Press, 1997.

A comprehensive compilation of various active filter circuits and design procedures is given in:

D. Lancaster, *Lancaster's Active Filter Cookbook*, 2nd ed. Burlington, Mass.: Newnes, 1996.

مسائل

۱-۱۶ تشدید موازی

۱. یک مـــدار RLC مـــوازی دارای $R = 1\ k\Omega$، $C = 47\ \mu F$ و $L = 11\ mH$ می‌باشد. (الف) Q_0 را محاسبه کنید. (ب) فرکانس تشدید را به Hz تعیین نمایید. (ج) پاسخ ولتاژ را به صورت تابعی از فرکانس رسم نمایید. در صورتی که مدار به وسیله یک منبع جریان سینوسی 1 mA تحریک شده باشد.

۲. یک مدار RLC موازی دارای $Q_0 = 200$ است. عنصر سوم را مشخص کـنید. بـه شرطی کـه (الف) $R = 1\ \Omega$ و $C = 1\ \mu F$ باشد. (ب) $L = 12\ fH$ و $C = 2.4\ nF$ بـــاشد، (ج) $R = 121.7\ k\Omega$ و $L = 100\ pH$ باشد.

۳. یک ورکتور (خازن‌متغیر) وسیله‌ای نیمه‌هادی است که رآکتانس آن با ولتاژ اعمال شده بر آن تغییر می‌کند. ضریب کیفیت به صورت زیر بیان می‌شود.

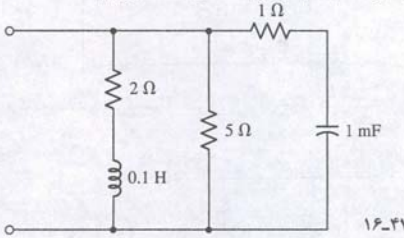
$$Q \approx \frac{\omega C_J R_P}{1 + \omega^2 C_J^2 R_P R_S}$$

که C_J ظرفیت پیوندی است که به ولتاژ اعمال شده به آن وابسته می‌باشد. R_s مقاومت سری قطعه و R_p مقاومت موازی معادل آن است. (الف) اگر $C_J = 3.77\ pF$ در 1.5 V باشد و $R_p = 1.5\ M\Omega$ و $R_s = 2.8\ \Omega$ باشد، ضریب کیفیت را برحسب فرکانس رسم کنید. (ب) با مشتق‌گیری از Q مقادیر Q_{max} و ω_0 را بیابید.

۴. Q را (الف) برای یک توپ پینگ پونگ، (ب) یک سکه، (ج) این کتاب بدست آورید. دقت کنید جزئیات دقیقی از شرایط اندازه‌گیری و آن‌چه ملاحظه می‌کنید ارائه نمایید. از آن جمله متوسط گیری و دیگر تحلیل‌های آماری لحاظ شود.

۵. یک مـدار تشـدید مـوازی دارای پـارامـترهای $\alpha = 80$ Np/s و $\omega_d = 1200$ rad/s است. اگر امپدانس در $s = -2\alpha + j\omega_d$ برابر 400Ω باشد، مقادیر Q_0، R، L و C را محاسبه نمایید.

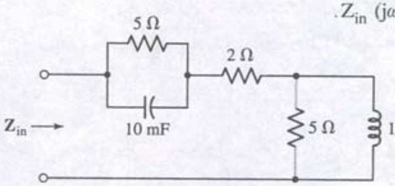
۶. فرکانس تشدید شبکه دو پایانه شکل ۴۷-۱۶ را بیابید.



شکل ۴۷ـ۱۶

۷. اگر $R = 1\ M\Omega$، $L = 1\ H$، $C = 1\ \mu F$ و $I = 10\ \angle 0^\circ\ \mu A$ مقادیر اجزاء در شکل ۱-۱۶ باشد، (الف) ω_0 و Q_0 را به دست آورید. (ب) منحنی $|V|$ را به‌عنوان تابعی از ω با $995 < \omega < 1005$ rad/s رسم نمایید.

۸. بـرای شبکه شکل ۴۸-۱۶، مطلوب است (الف) فرکانس تشدید ω_0 و (ب) $Z_{in}(j\omega_0)$.

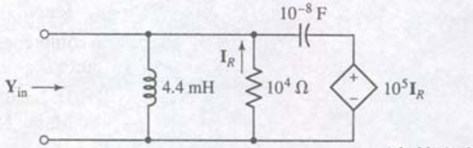


شکل ۴۸ـ۱۶

۹. یک مدار تشدید موازی دارای قطب‌های امپدانس $s=-50\pm j\,1000\ s^{-1}$ و صفری در مبدأ است. اگر $C = 1\ \mu F$ باشد، (الف) L و R را بیابید. (ب) Z را در 1000 rad/s محاسبه کنید.

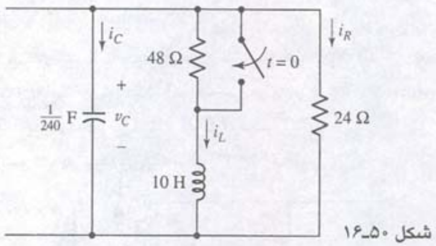
۱۰. یک مدار تشدید موازی برای یک رادیو AM طوری بسازید که یک القاگر متغیر بتواند فرکانس تشدید را در باند AM از 535 تا 1605 کیلوهرتز تنظیم کند. در یک انتهای باند $Q_0 = 45$ و در سرتاسر باند نیز $Q_0 \le 45$ است؛ $R = 20\ k\Omega$، مقادیر C، L_{min} و L_{max} را به دست آورید.

۱۱. (الف) برای شبکه شکل ۱۶-۴۹، Y_{in} را بیابید. (ب) ω_0 و (ج) $Z_{in}(j\omega_0)$ را در شبکه پیدا کنید.



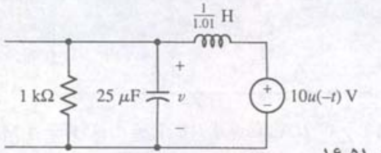
شکل ۱۶-۴۹

۱۲. فرکانس تشدید شبکه شکل ۱۶-۵۰ را در $t > 0$ معین کنید.



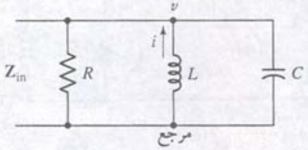
شکل ۱۶-۵۰

۱۳. فرکانس تشدید شبکه شکل ۱۶-۵۱ را در $t > 0$ معین کنید.



شکل ۱۶-۵۱

۱۴. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۲، $L = 1$ mH و $C = 1$ mF است. R را چنان تنظیم کنید که $\alpha = 100\ s^{-1}$ باشد. فرکانش تشدید و امپدانس Z_{in} را در فرکانس تشدید پیدا کنید. (ب) پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید (توجه: منبع VAC و یک مقاومت کوچک سری برای ممانعت از اتصال کوتاه به‌هنگام تغذیه خودکار DC اضافه کنید).



شکل ۱۶-۵۲

۱۵. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۲، $L = 1$ mH است، R را چنان انتخاب کنید که $\alpha = 50\ s^{-1}$ باشد و C طوری باشد که $\omega_d = 5000$ rad/s گردد. فرکانس تشدید و امپدانس Z_{in} را در آن به دست آورید. (ب) صحت پاسخ را با PSpice تحقیق نمایید (راهنمایی: از منبع VAC استفاده کنید، و یک مقاومت کوچک سری با القاگر برای جلوگیری از اتصال کوتاه در حین تعیین تغذیه DC به آن اضافه کنید).

۱۶-۲ عرض باند و مدارهای Q بالا

۱۶. یک مدار تشدید موازی دارای $\omega_0 = 100$ rad/s، $Q_0 = 80$ و $C = 0.2\ \mu F$ است. (الف) R و L را به دست آورید. (ب) روش‌های تقریبی رسم $|Z|$ را برحسب ω به کار ببرید.

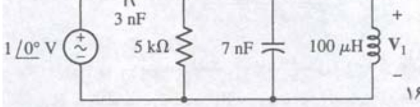
۱۷. از روابط دقیق برای یافتن R، L و C در یک مدار تشدید موازی استفاده کنید. در این مدار $\omega_1 = 103$ rad/s، $\omega_2 = 118$ rad/s و $|Z(j105)| = 10\ \Omega$ است.

۱۸. اگر در یک مدار تشدید موازی $\omega_0 = 30$ krad/s، $Q_0 = 10$ و $R = 600\ \Omega$ باشد. (الف) عرض باند را به دست آورید. (ب) N را در $\omega = 28$ krad/s به دست آورید. (ج) از روش تقریبی در تعیین $Z_{in}(j28000)$ استفاده کنید. (د) مقدار واقعی $Z_{in}(j28000)$ را به دست آورید. (ه) درصد خطای ناشی از به‌کارگیری روابط تقریبی را در محاسبه $|Z_{in}|$ و ang Z_{in} با $\omega = 28$ krad/s را مشخص کنید.

۱۹. یک مدار تشدید موازی در 400 Hz با $Q_0 = 8$ و $R = 500\ \Omega$ موجود است. اگر جریان 2 mA به مدار اعمال شود، با روش‌های تقریبی فرکانس جریان را در شرایط زیر به دست آورید. (الف) ولتاژ دو سر مدار اندازه 0.5 V دارد. (ب) جریان در مقاومت دارای اندازه 0.5 mA است.

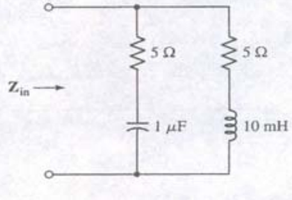
۲۰. مدار تشدید موازی دارای $\omega_0 = 1$ Mrad/s و $Q_0 = 10$ است. اگر $R = 5\ k\Omega$ باشد، مطلوب است (الف) L. (ب) فرکانس بالای ω_0 که در آن $|Z_{in}| = 2k\Omega$ باشد. (ج) فرکانسی که در آن ang $Z_{in} = -30^\circ$ باشد.

۲۱. از تقریب در یافتن کمیت‌ها در شکل ۱۶-۵۳ استفاده کنید. (الف) ω_0، (ب) V_1 را در فرکانس تشدید به دست آورید. (ج) محاسبه V_1 در فرکانسی به اندازه 15 krad/s بالاتر از تشدید.



شکل ۱۶-۵۳

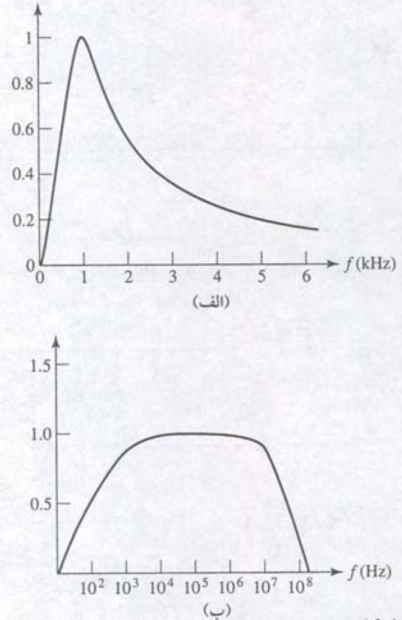
۲۲. (الف) از تعریف تشدید برای یافتن ω_0 در شبکه شکل ۱۶-۵۴ استفاده کنید. (ب) $Z_{in}(j\omega_0)$ را به دست آورید.



شکل ۱۶-۵۴

۲۳. یک مدار تشدید موازی با $f_0 = 1000$ Hz، $Q_0 = 40$ و $|Z_{in}(j\omega_0)|$ مشخص شده است. با روابط تقریبی مقادیر زیر را بیابید. (الف) Z_{in} در 1010 Hz و (ب) محدوده‌ای از فرکانس که در آن تقریب‌ها منطقی‌اند را به دست آورید.

۲۴. عرض باند هر منحنی پاسخ در شکل ۱۶-۵۵ را بیابید.



شکل ۱۶-۵۵

۲۵. یک مدار تشدید موازی دارای پهنای باند 1 MHz است. فرکانس نصف توان پایین آن $f_1 = 5.5$ kHz می‌باشد. (الف) فرکانس نصف توان بالا چند است؟ (ب) فرکانس تشدید f_0 آن چند است. (ج) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید کار کند چند است؟

۲۶. یک مدار تشدید موازی دارای پهنای باند 1 GHz است، و فرکانس نصف توان پایین آن $f_1 = 75.3$ MHz می‌باشد. (الف) فرکانس نصف توان بالای آن چند است؟ (ب) فرکانس تشدید f_0 آن چند است. (ج) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید کار کند چند است؟

۲۷. (الف) منحنی پاسخ ولتاژ را برای یک مدار با فرکانس نصف توان 1000 rad/s، فرکانس نصف توان بالای 4000 rad/s و حداکثر ولتاژ 10 V رسم کنید. (ب) فرکانس تشدید مدار چیست؟ (ج) پهنای باند مدار چیست؟ (د) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید باشد چقدر است؟

۲۸. (الف) اگر خازن 1 μF شکل ۱۶-۵۴ با خازن 330 pF جایگزین شود، مطلوبست فرکانس تشدید مدار جدید. (ب) پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید (توجه: از منبع VAC استفاده نمایید و در طول چند دهه شبیه‌سازی کنید).

۲۹. یک مدار RLC با پهنای باند 5.5 kHz طراحی نمایید. فرکانس نصف توان پایین 500 Hz است. با شبیه‌سازی نتیجه خود را چک کنید.

۱۶-۳ تشدید سری

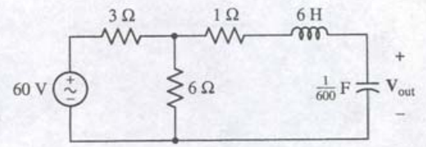
۳۰. یک مدار سری از دو مقاومت 5 Ω، چهار القاگر 100 μH و یک خازن 3.3 μF ساخته شده است. (الف) فرکانس تشدید مدار را حساب کنید. (ب) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید کار می‌کند، چقدر است؟ (ج) امپدانس ورودی در فرکانس تشدید چقدر است، 0.1 فرکانس تشدید یا 10 برابر فرکانس تشدید.

۳۱. اگر یک مدار سری دارای پهنای باند 3 MHz و فرکانس نصف توان $f_1 = 17$ kHz باشد، مطلوبست (الف) فرکانس نصف توان بالا، (ب) فرکانس تشدید f_0 مدار، (ج) ضریب کیفیت مدار وقتی که در فرکانس تشدید کار کند.

۳۲. (الف) امپدانس مدار RLC ($R = 1\ \Omega$، $L = 1$ mH و $C = 2$ mF) را وقتی در فرکانس تشدید کار کنند به دست آورید. حل خود را با شبیه‌سازی تأیید کنید (توجه: یک مقاومت خیلی بزرگ موازی با خازن مانع از ایجاد خطای اتصال به زمین می‌گردد).

۳۳. (الف) امپدانس مدار RLC ($R = 1\ k\Omega$، $L = 1\ \mu H$ و $C = 2\ \mu F$) وقتی که در فرکانس تشدی کار کند، به دست آورید. (ب) حل خود را با PSpice شبیه‌سازی کنید (توجه: یک مقاومت خیلی بزرگ موازی با خازن مانع از ایجاد خطای اتصال به زمین می‌گردد).

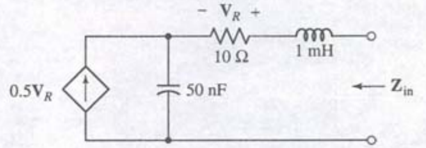
۳۴. (الف) با روش‌های تقریبی، $|V_{out}|$ را برحسب ω برای شکل ۱۶-۵۶ رسم کنید. (ب) مقدار دقیق V_{out} را در $\omega = 9$ rad/s بیابید.



شکل ۱۶-۵۶

۳۵. یک شبکه تشدید سری متشکل از مقاومت 50 Ω، یک القاگر 4 mH و یک خازن 0.1 μF موجود است. مطلوب است (الف) ω_0، (ب) f_0، (ج) Q_0، (د) $\mathcal{B}$، (ه) ω_1، (و) ω_2، (ز) Z_{in} در 45 rad/s و (ح) نسبت اندازه‌های امپدانس خازن به امپدانس مقاومت در 45 rad/s.

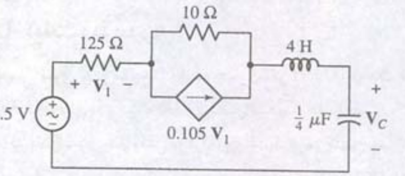
۳۶. پس از یافتن $Z_{in}(s)$ در شکل ۱۶-۵۷ (الف) ω_0 (ب) Q_0 را بیابید.



شکل ۱۶-۵۷

۳۷. مدار شکل ۱۶-۵۸ به اندازه ولتاژ منبع توجه کنید. بعد بگویید آیا مایلید دست‌های خود را در دو سر خازن بگذارید. منحنی $|V_c|$ را برحسب ω

رسم کنید تا پاسخ خود را ارزیابی نمایید.



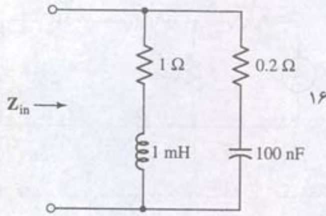
شکل ۵۸_۱۶

۳۸. یک مدار تشدید سری دارای $f_0 = 500$ Hz، $Q_0 = 10$ و $X_L = 500\ \Omega$ در حالت تشدید است. (الف) R، L و C را بیابید. (ب) اگر یک منبع $V_s = 1\ \angle 0^\circ$ V به طور سری به مدار وصل شود، مقادیر دقیق $|V_C|$ را در فرکانس‌های f = 450، 500 و 550 Hz به دست آورید.

۳۹. یک شبکه سه عنصری دارای یک امپدانس ورودی Z(s) است که قطب‌هایی را در s = 0 و بینهایت دارا است و نیز یک جفت صفر در $s = -20000 \pm j80000\ s^{-1}$ می‌باشد. اگر $Z_{in}(-10000) = -20 + j0\Omega$ باشد، مقادیر سه عنصر را به دست آورید.

۱۶-۴ دیگر فرم‌های تشدید

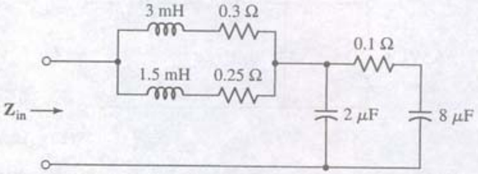
۴۰. در شبکه ۵۹-۱۶ چند تقریب به کار ببرید و مقادیر ω_0، Q_0، $\mathcal{B}$، $Z_{in}(j\omega_0)$ و $Z_{in}(j99000)$ را به دست آورید.



شکل ۵۹_۱۶

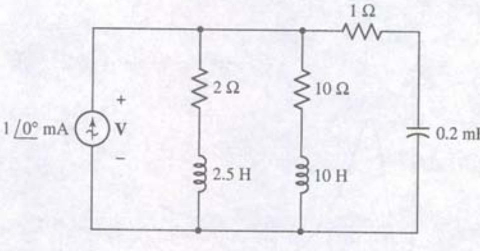
۴۱. چه مقاومتی باید به دو سر ورودی شبکه شکل ۵۹-۱۶ وصل شود تا Q_0 برابر 50 گردد؟

۴۲. به شبکه شکل ۶۰-۱۶ مراجعه نمایید و از تکنیک‌های تقریبی در تعیین حداقل اندازه Z_{in} و فرکانس متناظر آن استفاده نمایید.



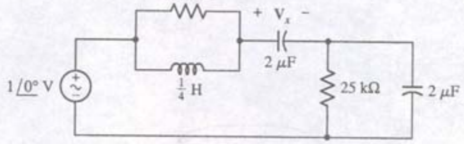
شکل ۶۰_۱۶

۴۳. برای مدار شکل ۶۱-۱۶، (الف) منحنی پاسخ تقریبی را برای |V| در برابر ω به دست آورید. (ب) مقدار دقیق V را در ω = 50 rad/s بیابید.



شکل ۶۱_۱۶

۴۴. (الف) با روش‌های تقریبی، $|V_x|$ را در ω = 2000 rad/s برای شکل ۶۲-۱۶ به دست آورید. (ب) مقدار دقیق $V_x(j2000)$ را بیابید.



شکل ۶۲_۱۶

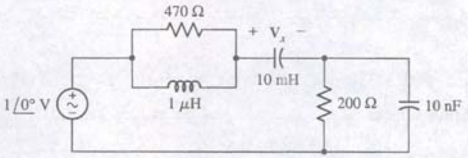
۴۵. ترکیب موازی مقاومت از یک مقاومت 5 kΩ و خازن 1 μF ساخته شد[ه] است. تعیین کنید یک معادل سری اگر فرکانس ω (الف) 10^3 rad/s (ب) 10^4 rad/s و (ج) 10^5 rad/s باشد.

۴۶. ترکیب سری مقاومت 5 kΩ و خازن 1 μF ساخته شده است. مطلوبست معادل موازی در فرکانس‌های (الف) 10^3 rad/s، (ب) 10^4 rad/s و (ج) 10^5 rad/s باشد.

۴۷. یک ترکیب سری از مقاومت 470 Ω و القاگر 3.3 μH ساخته شده است. مطلوبست معادل سری اگر فرکانس کار برابر باشد با (الف) 10^3 rad/s (ب) 10^4 rad/s و (ج) 10^5 rad/s باشد.

۴۸. ترکیب موازی مقاومت 470 Ω و القاگر 3.3 μH ساخته شده است. مطلوبست معادل موازی اگر فرکانس برابر باشد با (الف) 10^3 rad/s، (ب) 10^4 rad/s و (ج) 10^5 rad/s باشد.

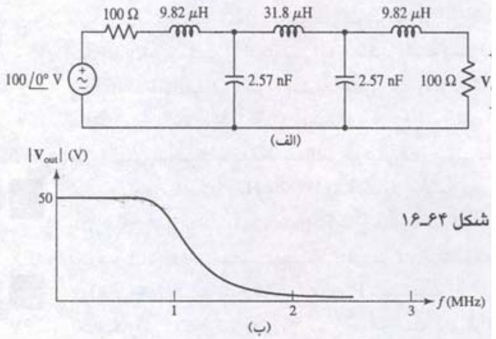
۴۹. (الف) برای مدار شکل ۶۳-۱۶ روش‌های تقریبی برای محاسبه $|V_x|$ د[ر] f = 1.6 MHz به کار ببرید. (ب) مقدار دقیق $|V_x(j10 \times 10^6)|$ محاسبه کنید. (ج) نتیجه را با PSpice تأیید کنید.



شکل ۶۳_۱۶

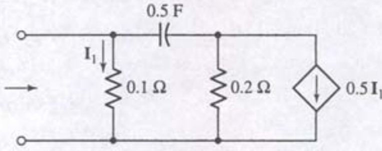
۱۶-۵ تغییر مقیاس

۵۰. فیلتر شکل ۶۴-۱۶(الف) دارای منحنی پاسخ شکل ۶۴-۱۶(ب) است. (الف) فیلتر را طوری تغییرمقیاس دهید که بین یک منبع 50 Ω و یک بار 50 Ω کار کند و فرکانس قطع آن هم 20 kHz باشد. (ب) منحنی پاسخ جدید را ترسیم کنید.



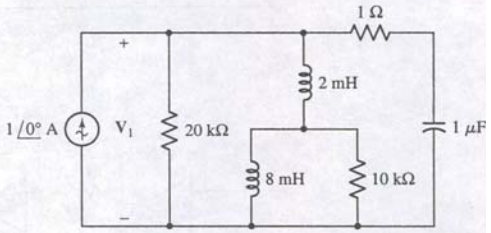
شکل ۶۴_۱۶

۵۱. (الف) برای شبکه شکل ۶۵-۱۶، $Z_{in}(s)$ را بیابید. (ب) عبارتی برای $Z_{in}(s)$ پس از تغییرمقیاس با $K_m = 2$ و $K_f = 5$ به دست آورید. (ج) عناصر مدار را با $K_m = 2$ و $K_f = 5$ تغییرمقیاس داده و شبکه جدید را رسم نمایید.



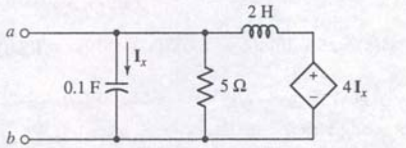
شکل ۶۵_۱۶

۵۲. (الف) از تقریب‌های مناسب برای یافتن ω_0 و Q_0 در شکل ۶۶-۱۶ استفاده نمایید. (ب) شبکه سمت راست منبع را طوری تغییر مقیاس دهید که تشدید در 1 Mrad/s رخ دهد. (ج) برای مدار جدید ω_0 و $\mathcal{B}$ را مشخص نمایید.



شکل ۶۶_۱۶

۵۳. (الف) آرایش جدید شکل ۶۷-۱۶ را پس از تغییر مقیاس با $K_m = 250$ و $K_f = 400$ رسم کنید. (ب) معادل تونن شبکه جدید را در ω = 1 krad/s به دست آورید.



شکل ۶۷_۱۶

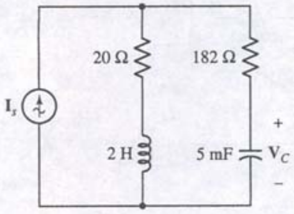
۵۴. شبکه‌ای متشکل از Rها، Lها و Cها ایده‌آل و یک جفت پایانه ورودی است که به آن‌ها منبع جریان سینوسی I_s وصل، و نیز یک جفت پایانه خروجی V_{out} در آن تعریف شده است. اگر $I_s = 1\ \angle 0^\circ$ A و ω = 50 rad/s باشد، آنگاه $V_{out} = 30\ \angle 25^\circ$ V است. تحت شرایط زیر V_{out} را مشخص نمایید. اگر تعیین مقدار V_{out} ناممکن است، تقریب آن را بیان کنید. (الف) $I_s = 2\ \angle 0^\circ$ A در ω = 50 rad/s، (ب) $I_s = 2\ \angle 40^\circ$ A در ω = 50 rad/s، (ج) $I_s = 2\ \angle 40^\circ$ A در 200 rad، (د) شبکه با $K_m = 30$ و $I_s = 2\ \angle 40^\circ$ A، ω = 50 rad/s تغییرمقیاس یافته است. (ه) $K_m = 30$، $K_f = 4$، $I_s = 2\ \angle 40^\circ$ A، ω = 200 rad/s.

۱۶-۶ نمودارهای بود

۵۵. H_{dB} را به دست آورید اگر H(s) برابر باشد با (الف) 0.2، (ب) 50، (ج) 12/(s + 2) + 26/(s + 20) به‌ازای s = j10. |H(s)| را اگر H_{dB} برابر باشد با، (د) 37.6 dB، (ه) -8 dB و (و) 0.01 dB.

۵۶. منحنی اندازه بُود را برای موارد زیر ترسیم کنید (الف) 20(s + 1)/(s + 100)، (ب) $2000s(s + 1)/(s + 100)^2$، (ج) s + 45 + (200 / s) و (د) نمودارهای خود را با متلب مقایسه کنید.

۵۷. برای شکل ۶۸-۱۶ منحنی‌های اندازه و فاز بُود را برای تابع تبدیل $H(s) = \frac{V_c}{I_s}$ به دست آورید.



شکل ۶۸_۱۶

۵۸. (الف) با به‌کارگیری مبدأ در ω = 1، $H_{dB} = 0$، منحنی دامنه بُود را برای تابع زیر به دست آورید:

$$H(s) = 5 \times 10^8 s(s + 100)/[(s + 20)(s + 1000)^3]$$

(ب) مختصات همه گوشه‌ها و نقاط تقاطع را روی نمودار بُود مشخص کنید. (ج) مقادیر دقیق $20 \log|H(j\omega)|$ را برای هر فرکانس گوشه در بخش (ب) مشخص نمایید.

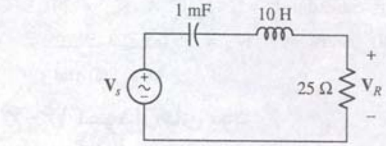
۵۹. (الف) نمودار فاز بُود را برای

$$H(s) = 5 \times 10^8 s(s + 100)/[(s + 20)(s + 1000)^3]$$

رسم نمایید. (ب) مختصات همه نقاط روی منحنی فاز که در آن شیب عوض می‌شود را مشخص کنید. (ج) مقدار دقیق $\text{ang}\ H(j\omega)$ را برای هر فرکانس در بخش (ب) به دست آورید.

۶۰. (الف) منحنی اندازه بود را برای تابع تبدیل $H(s) = 1 + 20/s + 400/s^2$ به دست آورید. (ب) منحنی بُود را با مقادیر دقیق در $\omega = 5, 100$ rad/s مقایسه نمایید. (ج) با متلب صحت منحنی بُود را تحقیق کنید.

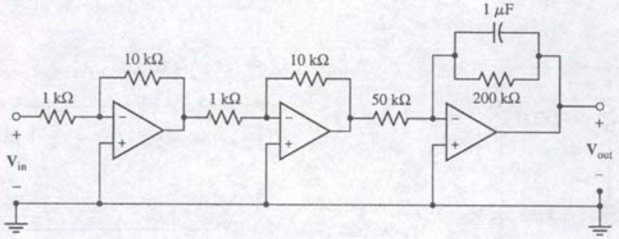
۶۱. (الف) $H(s) = V_R / V_S$ را برای مدار شکل ۶۹-۱۶ پیدا کنید. (ب) منحنی اندازه و فاز را برای $H(s)$ رسم نمایید. (ج) مقادیر دقیق H_{dB} و $H(j\omega)$ را در $\omega = 20$ rad/s به دست آورید.



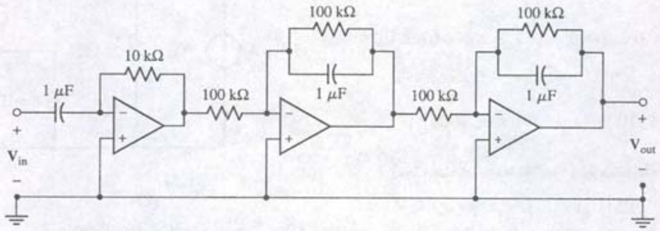
شکل ۶۹ـ۱۶

۶۲. منحنی اندازه بُود را برای تابع تبدیل $H(s) = V_{out} / V_{in}$ در شبکه شکل ۷۰-۱۶ رسم کنید.

۶۳. برای شبکه شکل ۷۱ـ۱۶، (الف) $H(s) = V_{out}/V_{in}$ را بیابید. (ب) منحنی اندازه بُود را برای H_{dB} رسم کنید. (ج) منحنی فاز بُود $H(j\omega)$ را ترسیم نمایید.



شکل ۷۰ـ۱۶



شکل ۷۱ـ۱۶

۷-۱۶ فیلتر

۶۴. فرکانس صوتی یک دلفین از حدود 250 Hz تا 150 kHz می‌باشد. در ارتباطات اجتماعی آن‌ها فرکانس‌های 250 Hz تا 50 kHz به کار می‌برند و تقه‌های با فرکانس‌های بالای 40 kHz در شناخت موقعیت براساس برگشت صدا به کار می‌رود. مدار تقویت کننده‌ای صراحی کنید که مکالمه جمعی از دلفین‌ها را تقویت کند. می‌توان یک میکروفون را با یک منبع ولتاژ سینوسی با حداکثر دامنه کمتر از 15 mV که با مقاومت 1 Ω سری است مدل‌سازی کرد، ولتاژ انتقالی به گوشی باید در حدود 1 V حداکثر باشد.

۶۵. مدار فیلتری طراحی کنید که محدوده کامل فرکانس‌های صوتی به گوش انسان را حذف کند (20 Hz تا 20 kHz)، ولی سیگنال‌دهی بالاتر و پایین‌تر از آن عبور کند. با PSpice طرح خود را تست کنید.

۶۶. یک مدار فیلتر طراحی نمایید تا هر سیگنالی بزرگتر یا برابر با 1 kHz را حذف نماید. طرح خود را با PSpice تست کنید.

۶۷. یک میکروفون که به فرکانس‌های بالا خیلی حساس است، برای انواع خرابی‌های موتور جت به کار رفته است ولی متأسفانه بعضی از پارازیت‌های فرکانس پایین‌تر از سیستم‌های هیدرولیک پره‌ها و شهپر نیز دریافت می‌نماید و درنتیجه اعلام خطرهای غلط را موجب می‌شود. مدار فیلتری برای حذف سیگنال‌های پارازیت طراحی کنید ضمن این‌که فرکانس‌های بالا را با ضریب 100 تقویت می‌کند سیگنال فرکانس پایین، حداکثر انرژی را در حدود 20 Hz داراست و در 1 kHz به کمتر از 1% افت می‌کند. سیگنال‌های خرابی موتور در حدود 25 kHz است.

۶۸. طراحی موردبحث را در بخش کاربردهای عملی کامل کنید. (الف) با طراحی یک طبقه میانی طرح را کامل نمایید. (ب) پاسخ فرکانس مدار خود را با تغییر مقاومت پسخورد بین مقادیر حداکثر و حداقل شبیه‌سازی نمایید.

۶۹. علی‌رغم این‌که پاسخ صوتی انسان در حدود 20 Hz تا 20 kHz پذیرفته شده است، ولی عرض باند بسیاری از سیستم‌های تلفنی به 3 kHz محدود است. مدار فیلتری طراحی کنید که عرض باند مکالمه 20 kHz را به 3 kHz یعنی عرض باند مکالمه تلفنی تبدیل کند. ورودی میکروفونی است با حداکثر ولتاژ 150 mV و اساساً مقاومت سری صفر است. خروجی نیز یک بلندگوی 8 Ω می‌باشد. مکالمه باید حداقل با ضریب 10 تقویت شود. طرح را با شبیه‌سازی PSpice تست نمایید.

۷۰. مداری طراحی کنید تا مؤلفه‌های 50 nHz را از یک سیگنال آنتن حذف نماید که در آن n عددی صحیح بین 1 و 4 است. توپولوژی یک فیلتر خوب حذفی، یعنی فیلتری که فرکانس خاصی را حذف می‌کند. در مدار شکل ۳۹-۱۶ داده شده است. ولی این بار فرکانس به جای دو سر مقاومت از دو سر القاگر - خازن گرفته می‌شود. سیگنال آنتن را به صورت یک منبع سینوسی 1V و مقاومت سری صفر می‌توان مدل‌سازی کرد.

۷۱. یک قطعه حساس دستگاه ردیابی به وسیله یک پارازیت القایی دریافتی از سیگنال وارده تحت‌تأثیر قرار گرفته است. طبیعت سیگنال‌ها مانع از به‌کارگیری هرگونه فیلتر پایین‌گذر، میان‌گذر یا بالاگذر می‌گردد. یک فیلتر حذفی که هر سیگنال 60 Hz را از ورودی دستگاه حذف کند، طراحی نمایید. ممکن است فرض کنیم که در اصل دارای مقاومت معادل تونن بینهایت است. توپولوژی یک فیلتر حذف یا تله خوب در شکل ۳۹-۱۶ داده شده است، ولی خروجی این بار از ترکیب دو سر القاگر - خازن به جای مقاومت گرفته شده است.

فصل هفدهم

شبکه‌های دو درگاهی

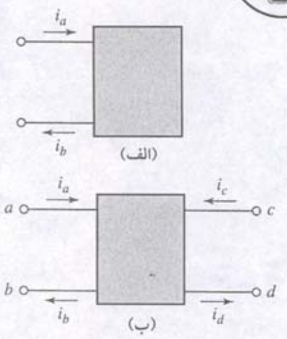
مفاهیم کلیدی
تفکیک شبکه‌های یک‌درگاهی و دو درگاهی
پارامترهای ادمیتانس (**y**)
پارامترهای امپدانس (**z**)
پارامترهای هیبرید (**h**)
پارامترهای انتقال (**t**)
روش‌های تبدیل پارامترهای **y**، **z**، **h** و **t**
روش‌های تحلیل مدار با استفاده از شبکه‌ها

مقدمه

داری با دو زوج پایانه مثلاً یک جفت پایانه ورودی و یک جفت پایانه خروجی، بلوک ساختاری مهمی در سیستم‌های الکترونیکی، مخابراتی، کنترل خودکار، سیستم‌های انتقال و وزیع است. در این سیستم‌ها یک سیگنال یا انرژی الکتریکی وارد پایانه‌های ورودی می‌شود، شبکه بر روی آن کاری انجام می‌دهد و از پایانه‌های خروجی خارج می‌گردد. جفت پایانه خروجی به خوبی می‌تواند به جفت پایانه ورودی شبکه دیگر وصل شود. وقتی که مفهوم شبکه‌های معادل تونن و نورتن را در فصل ۵ مطالعه کردیم، گفته شد، همیشه لازم نیست که رای کار با مدار جزئیات همه بخش‌های آن را بدانیم. در این‌جا این مفهوم را تعمیم داده ی‌گوییم که حتی دانستن کار درونی مدار لزومی ندارد. با تنها آگاهی از خطی‌بودن مدار و وانایی در اندازه‌گیری ولتاژها و جریان، به زودی خواهیم دید که می‌توان چنین شبکه‌ای را با مجموعه‌ای از پارامترها مشخص کرد و این مشخصات اجازه می‌دهند واکنش شبکه به دیگر شبکه‌ها پیش‌بینی گردد.

۱-۱۷ شبکه‌های یک‌درگاهی

ک جفت پایانه که از آن سیگنال ممکن‌است وارد شبکه و یا از آن خارج شود را **درگاه**[1] ی‌نامند و شبکه‌ای که تنها یک جفت پایانه از این نوع دارد را شبکه **یک‌درگاهی** می‌خوانند. به یچ‌یک از گره‌های داخلی یک‌درگاهی نمی‌توان چیزی وصل کرد. پس واضح است که در شبکه یک‌درگاه، i_a و i_b در شکل ۱-۷ (الف) با یکدیگر برابرند. وقتی تعداد پایانه‌هایش از یک جفت بیشتر باشد، آن را شبکه **چنددرگاه** می‌گویند. شبکه دودرگاهی که این فصل به آن ختصاص یافته در شکل ۱-۷ (ب) ملاحظه می‌گردد. جریان‌های دو پایانه تشکیل‌دهنده هر رگاه با یکدیگر برابرند پس $i_a = i_b$ و $i_c = i_d$ خواهد بود که در شکل ۱-۱۷ (ب) نشان داده نده است. به‌شرطی می‌توان روش‌های این فصل را به‌کاربرد که منابع و بارها مستقیماً به دو سر هر پایانه وصل شوند. به عبارت دیگر هر درگاه می‌تواند به یک شبکه یک درگاه و یا به یک رگاه از شبکه چنددرگاه وصل شود. مثلاً هیچ وسیله‌ای را نمی‌توان به پایانه‌های a و c از شبکه ودرگاه در شکل ۱-۱۷ (ب) وصل کرد. اگر چنین کاری انجام دهیم باید برای تحلیل معادلات ش یاگرهی را بنویسیم.



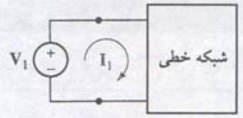
شکل ۱-۱۷ (الف) یک شبکه یک‌درگاه. (ب) شبکه دو درگاه.

1. port

در روش‌های خاصی از تحلیل که برای شبکه‌های دودرگاه معرفی شده است تأکید اصلی بر روابط جریان و ولتاژ پایانه‌های شبکه است و به طبیعت جریان‌ها و ولتاژهای داخل شبکه توجهی نمی‌شود. هدف از بررسی مقدماتی آشنایی با تعدادی از پارامترهای مهم و کاربرد آن‌ها در ساده‌سازی ساماندهی تحلیل شبکه دو درگاه خطی است.

بعضی از مطالعات اولیه شبکه‌های یک یا دو درگاهی و علائم اختصاری دترمینان‌ها که در پیوست ۲ آورده شده است مطالعه شبکه‌های یک و دو درگاه را ساده‌تر می‌کند. بنابراین اگر مجموعه معادلات حلقه را برای شبکه غیرفعال بنویسیم، داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{1N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{3N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{Z}_{N1}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{N2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{N3}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{NN}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_N \end{aligned} \tag{۱}$$



شکل ۲ـ۱۷ یک منبع ولتاژ ایده‌آل $\mathbf{V}_1$ به یک درگاه شبکه یک‌درگاهی که منابع مستقل ندارد وصل است؛ $Z_{in} = \Delta_z/\Delta_{11}$

در این صورت ضریب هر جریان، امپدانس $\mathbf{Z_{ij}}(s)$ خواهد بود و دترمینان مدار یا دترمینان ضرایب چنین است:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix} \tag{۲}$$

که در آن N حلقه فرض شده است و جریان‌ها به ترتیب در اندیس‌ها ظاهر شده‌اند و ترتیب معادلات نیز همان ترتیب جریان‌ها است. همچنین فرض می‌شود KVL طوری اعمال شودکه علامت هر جمله $\mathbf{Z_{ii}}$ $(\mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{22}, \ldots, \mathbf{Z}_{NN})$ مثبت باشد. علامت هر $\mathbf{Z_{ij}}(i \neq j)$ با جملات متقابل بسته به جهات جریان $\mathbf{I_i}$ و $\mathbf{I_j}$ ممکن‌است مثبت یا منفی باشد.

اگر منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد، ممکن‌است بعضی از ضرایب در معادلات حلقه مقاومت یا امپدانس نباشند. با این وجود باز هم دترمینان مدار را $\Delta\mathbf{Z}$ می‌خوانیم.

با استفاده از نماد معرفی‌شده (در پیوست ۲) می‌توان امپدانس نقطه ورودی یا تحریک را در پایانه‌های شبکه تک‌ورودی به صورت جمع و جوری نوشت. اگر یکی از درگاه‌های شبکه دو درگاهی به یک امپدانس ختم شود، باز هم این روش قابل استفاده است. امپدانس می‌تواند مدار اتصال کوتاه یا مدار باز باشد.

اکنون فرض کنید که شبکه تک‌درگاه در شکل ۲ـ۱۷ کلاً از عناصر غیرفعال و منابع وابسته تشکیل شده باشد. خطی‌بودن نیز از مفروضات است. یک منبع ولتاژ $\mathbf{V}_1$ به درگاه وصل است و جریان منبع نیز در حلقه 1 تصور شده است. با روش کرامر، داریم:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}$$

یا به صورت جمع و جورتر:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1\Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

بنابراین

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}\Delta_Z}{\Delta_{11}} \tag{۳}$$

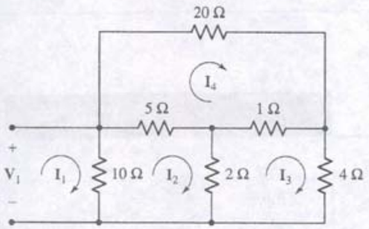
مثال ۱ـ۱۷

امپدانس ورودی شبکه مقاومتی تک‌درگاه در شکل ۳ـ۱۷ را محاسبه کنید.

ابتدا چهار جریان مش را تخصیص داده و معادله متناظر مش‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \\ 0 &= -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 \\ 0 &= \quad - 2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 \\ 0 &= \quad - 5\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 + 26\mathbf{I}_4 \end{aligned}$$

برای مرور خلاصه‌ای بر قانون کرامر در حل سیستم معادلات همزمان به پیوست (۲) مراجعه کنید.



شکل ۳ـ۱۷ مثالی از یک شبکه یک‌درگاهی با عناصر فقط مقاومتی.

آن‌گاه دترمینان مدار چنین است:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

که برابر 9680Ω خواهد بود. با حذف اولین سطر و اولین ستون داریم:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2778\ \Omega^3$$

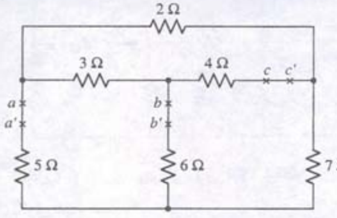
بنابراین معادله (۳) امپدانس ورودی زیر را تولید خواهد کرد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{9680}{2778} = 3.485\Omega$$

تمرین

۱ـ۱۷ امپدانس ورودی شبکه شکل ۴ـ۱۷ را پیدا کنید به‌شرطی‌که با جداکردن پایانه‌ها به یک شبکه تک‌درگاه تبدیل شود. (الف) در a و a'، (ب) در b و b' و (ج) در c و c'.

جواب: 9.47Ω، 10.63Ω و 7.58Ω.



شکل ۴ـ۱۷

مثال ۲ـ۱۷

امپدانس ورودی شبکه شکل ۵ـ۱۷ را بیابید.

چهار معادله برحسب جریان مش نوشته شده‌اند:

$$\begin{aligned} 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \qquad\qquad\qquad &= \mathbf{V}_1 \\ -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 &= 0 \\ -2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 &= 0 \end{aligned}$$

و

$$\mathbf{I}_4 = -0.5\mathbf{I}_a = -0.5(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3)$$

یا

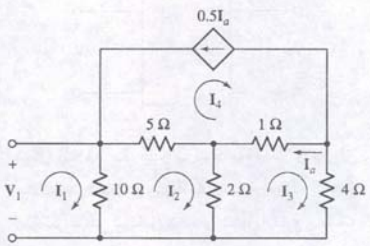
$$-0.5\mathbf{I}_3 + 1.5\mathbf{I}_4 = 0$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590\ \Omega^3$$

درحالی‌که

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159\ \Omega^2$$



شکل ۵ـ۱۷ مثالی از یک شبکه یک‌درگاهی با منبع وابسته.

و یا

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{590}{159} = 3.711\ \Omega$$

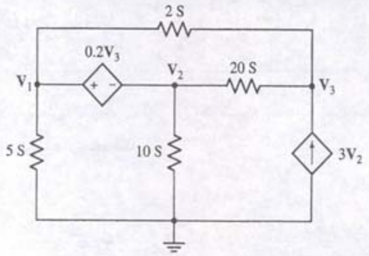
می‌توان روش مشابهی را با استفاده از معادلات گرهی به‌کارگرفت و درنتیجه ادمیتانس ورودی را به‌دست‌آورد:

$$\mathbf{Y}_{in} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} \qquad (۴)$$

که اکنون Δ_{11} کهاد Δ_Y است.

تمرین

۱۷ـ۲ مجموعه معادلات گرهی را برای شکل ۱۷ـ۶ بنویسید و Δ_Y را محاسبه کنید و سپس ادمیتانس بین گره‌های زیر را پیدا کنید: (الف) گره 1 و گره مرجع و (ب) گره 2 و مرجع.
جواب: 10.68 S و 13.16 S.



شکل ۱۷ـ۶

مثال ۱۷ـ۳

معادله (۴) را دوباره برای تعیین امپدانس ورودی شبکه شکل ۱۷ـ۳ که در این‌جا با شکل ۱۷ـ۷ نشان داده شده، به‌کاربرید.

ابتدا ولتاژ گره‌ها را به ترتیب از چپ به راست $\mathbf{V}_1$، $\mathbf{V}_2$ و $\mathbf{V}_3$ می‌نامیم و گره پایینی را هم مرجع انتخاب کرده و ماتریس ادمیتانس سیستم را چنین می‌نویسیم:

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.2 & -0.05 \\ -0.2 & 1.7 & -1 \\ -0.05 & -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 0.3473\ S^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1.7 & -1 \\ -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 1.21\ S^2$$

به نحوی‌که

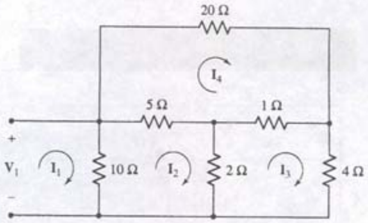
$$\mathbf{Y}_{in} = \frac{0.3473}{1.21} = 0.2870\ S$$

که مرتبط است به

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{1}{0.287} = 3.484\ \Omega$$

که با پاسخ قبلی در محدوده خطای مجاز تطابق دارد (ما در سرتاسر محاسبات چهاررقم را درنظرگرفته‌ایم).

مسائل ۸ و ۹ در انتهای فصل تک‌درگاه‌هایی را نشان می‌دهند که به کمک تقویت‌کننده‌های عملیاتی ساخته شده‌اند. این مسائل نشان می‌دهند که می‌توان شبکه‌هایی داشت که تنها عناصر مدار غیرفعال در آن‌ها مقاومت منفی باشد و القاگرها با خازن و مقاومت شبیه‌سازی می‌شوند.



شکل ۱۷ـ۷ مداری از مثال ۱۷ـ۱ که در این‌جا تکرار شده است.

۱۷ـ۲ پارامترهای ادمیتانس

اکنون توجه خود را به شبکه‌های دو درگاه معطوف می‌کنیم. در هر آن‌چه که به دنبال می‌آید فرض بر این است‌که شبکه از عناصر خطی تشکیل شده و فاقد منابع مستقل است. با این وجود منابع وابسته مجازند. در موارد خاص شرایط اضافی دیگری هم ممکن‌است بر مدار تحمیل شوند.

ما شبکه دو درگاه را مطابق شکل ۱۷ـ۸ درنظرمی‌گیریم. ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{I}_1$ بوده و $\mathbf{V}_2$ و $\mathbf{I}_2$ نیز در درگاه خروجی‌اند. جهت جریان‌های $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ حسب عادت از سیم‌های فوقانی در جهت رو به شبکه درنظرگرفته شده‌اند (و در سیم‌های پایینی به

شکل ۱۷ـ۸ یک مدار دودرگاه با ولتاژ و جریان مشخص‌شده در پایانه‌ها. مدار دو درگاه از عناصر خطی تشکیل شده و شامل منابع وابسته است ولی منابع مستقل را دارا نیست.

سمت بیرون شبکه‌اند). چون شبکه خطی و فاقد منابع مستقل است، $\mathbf{I}_1$ را می‌توان مجموع دو مولفه دانست، یکی حاصل از $\mathbf{V}_1$ و دیگری $\mathbf{V}_2$. وقتی بحث مشابهی را برای $\mathbf{I}_2$ به‌کاربریم، مجموعه معادلات چنین خواهد بود:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad (۵)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad (۶)$$

که **y**ها چیزی جز ثابت‌های تناسب یا ضرایب مجهولات نیستند. با این وجود باید متذکر شد که ابعاد آن‌ها A/V یا S است. بنابراین به آن‌ها پارامترهای **y** می‌گوییم و با معادلات (۶) و (۵) تعریف می‌شوند. پارامترهای **y** و دیگر پارامترها که بعداً در این فصل تعریف می‌شوند، به صورت جمع و جورتر ماتریسی نمایش داده می‌شوند. حال ماتریس ستونی (2×1) را برای **I** تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

ماتریس پارامترهای **y** یک ماتریس (2×2) است:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

و ماتریس ستونی (2×1) ستونی **V** هم چنین می‌باشد:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad (۹)$$

بنابراین می‌توان معادله ماتریسی $\mathbf{I} = \mathbf{yV}$ را نوشت، یا:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

از ضرب ماتریسی سمت راست برابری زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های (2×1) باید عنصر به عنصر برابر باشند و بنابراین ما به سمت تعریف معادلات (۵) و (۶) سوق داده می‌شویم.

مفیدترین روش یافتن یک تعبیر فیزیکی برای پارامترهای **y**، بررسی معادلات (۵) و (۶) است. مثلاً در معادله (۵) اگر $\mathbf{V}_2$ برابر صفر باشد، آن‌گاه $\mathbf{y}_{11}$ از نسبت $\mathbf{I}_1$ به $\mathbf{V}_1$ به‌دست‌می‌آید. بنابراین $\mathbf{y}_{11}$ را به عنوان ادمیتانس در پایانه‌های ورودی ضمن اتصال کوتاه پایانه خروجی ($\mathbf{V}_2 = 0$) اندازه می‌گیریم. چون شکی نیست کدام پایانه‌ها اتصال کوتاه شده‌اند، $\mathbf{y}_{11}$ را ادمیتانس ورودی اتصال کوتاه می‌نامیم. به همین ترتیب می‌توان $\mathbf{y}_{11}$ را عکس امپدانس ورودی با اتصال کوتاه پایانه‌های خروجی نامید ولی توصیف تحت نام ادمیتانس سرراست‌تر است. البته اسم پارامتر مهم نیست، بلکه شرایطی که باید برای محاسبه پارامتر به معادلات (۵) و (۶) و برای اندازه‌گیری پارامتر به مدار اعمال شود اهمیت دارد و به این علت می‌توان با اعمال آن‌ها پارامتر را از تحلیل مستقیم مدار به‌دست‌آورد. هر یک از پارامترهای **y** را می‌توان به صورت یک نسبت جریان به ولتاژ بیان کرد به‌شرطی‌که $\mathbf{V}_1 = 0$ (پایانه‌های ورودی اتصال کوتاه است) و یا $\mathbf{V}_2 = 0$ باشد (پایانه‌های خروجی اتصال باشد):

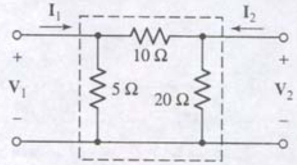
علامت به‌کاررفته برای نمایش ماتریس در این کتاب، استاندارد است و به راحتی قابل اشتباه با علامت قبلی برای فیزوری یا کمیت‌های پیچیده می‌باشد. ماهیت هر سمبلی از این قبیل باید از محتوای کاربردی آن مشخص شود.

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0} \quad (۱۰) \qquad y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0} \quad (۱۱)$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0} \quad (۱۲) \qquad y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0} \quad (۱۳)$$

چون هر پارامتر ادمیتانسی است که از اتصال کوتاه‌شدن مدار درگاه ورودی یا خروجی به‌دست‌می‌آید، پارامترهای **y** را **پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه** می‌خوانند. نام اختصاصی y_{11}، ادمیتانس ورودی اتصال کوتاه، y_{22} ادمیتانس خروجی اتصال کوتاه و y_{12} و y_{21} را ادمیتانس‌های انتقالی اتصال کوتاه گویند.

مثال ۴ـ۱۷



شکل ۹ـ۱۷ شبکه دودرگاه مقاومتی.

چهار پارامتر ادمیتانس اتصال کوتاه را برای مدار دو درگاه مقاومتی شکل ۹ـ۱۷ پیدا کنید.

مقادیر پارامترها به سادگی با اِعمال معادلات (۱۰) تا (۱۳) به دست می‌آیند که ما مستقیماً با تعریف معادلات (۵) و (۶) به دست آوردیم. برای تعیین y_{11}، خروجی را اتصال کوتاه و نسبت I_1 به V_1 را به‌دست‌می‌آوریم. این کار با $V_1 = 1V$ و سپس $y_{11} = I_1$ هم به‌دست‌می‌آید. با بررسی شکل ۶ـ۱۷ (الف) واضح است که اعمال 1V به ورودی و اتصال کوتاه خروجی موجب تولید جریان $(\frac{1}{5} + \frac{1}{10})$ یا 0.3A می‌گردد. به این ترتیب

$$y_{11} = 0.3\ S$$

برای یافتن y_{12}، این بار پایانه‌های ورودی را اتصال کوتاه می‌کنیم و به پایانه‌های خروجی 1V اعمال می‌نماییم. جریان ورودی در مدار اتصال کوتاه جاری می‌شود و برابر $I_1 = -\frac{1}{10}\ A$ می‌باشد. پس:

$$y_{12} = -0.1\ S$$

با روشی مشابه:

$$y_{12} = -0.1\ S \qquad y_{22} = 0.15\ S$$

پس معادلات توصیف مدار در درگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس چنین است:

$$I_1 = 0.3V_1 - 0.1V_2 \qquad (۱۴)$$

$$I_2 = -0.1V_1 + 0.15V_2 \qquad (۱۵)$$

و

$$y = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \quad \text{(همه برحسب S)}$$

البته لازم نیست این پارامترها را یک‌به‌یک با معادلات (۱۰) تا (۱۳) به‌دست‌آوریم. می‌توان آن‌ها را همزمان به‌دست‌آورد.

مثال ۵ـ۱۷

ولتاژهای گرهی V_1 و V_2 را در مدار دو درگاه شکل ۹ـ۱۷ تخصیص داده و عباراتی برای I_1 و I_2 برحسب آن‌ها بنویسید.

داریم:

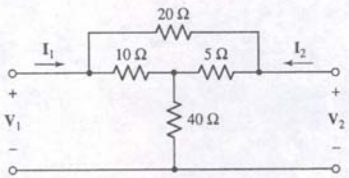
$$I_1 = \frac{V_1}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0.3V_1 - 0.1V_2$$

و

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{20} = -0.1V_1 + 0.15V_2$$

این معادلات با معادلات (۱۴) و (۱۵) یکی بوده و می‌توان چهار پارامتر **y** را از آن‌ها مستقیماً خواند.

تمرین



شکل ۱۰ـ۱۷

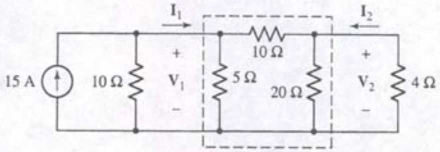
۳ـ۱۷ با اعمال مناسب منابع 1V و مدارهای اتصال کوتاه به مدار شکل ۱۰ـ۱۷ مطلوبست (الف) y_{11}، (ب) y_{21}، (ج) y_{22} و (د) y_{12}.

جواب: 0.1192 S، ‎-0.1115 S، 0.1269 S و ‎-0.1115 S.

به‌طورکلی وقتی که فقط یک پارامتر موردنظر باشد، استفاده از معادلات (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) ساده‌تر است. ولی اگر همه آن‌ها را خواسته باشیم، بهتر است V_1 و V_2 را به گره‌های ورودی و خروجی نسبت دهیم تا دیگر ولتاژهای گره ـ مرجع در هر گره داخلی تعریف شود و سپس به یافتن آن‌ها ادامه دهیم.

برای این‌که ببینیم با این سیستم معادلات چه می‌توان کرد، بیایید هر درگاه را به یک شبکه یک درگاهی ببندیم. مثال ۴ـ۱۷ در شکل ۱۱ـ۱۷ یک منبع جریان عملی متصل به درگاه ورودی و یک بار مقاومتی را به درگاه خروجی نشان می‌دهد. اکنون باید رابطه‌ای بین V_1 و I_1 و مستقل از شبکه دو درگاه وجود داشته باشد. این رابطه باید بتواند به تنهایی از این مدار بیرونی تعیین شود. اگر در ورودی KCL را اعمال کنیم داریم:

$$I_1 = 15 - 0.1V_1$$



شکل ۱۱ـ۱۷ شبکه دودرگاهی مقاومتی شکل ۹ـ۱۷ که به یک شبکه تک‌درگاه وصل شده است.

قانون اهم در خروجی را می‌نویسیم:

$$I_2 = -0.25V_2$$

از جایگزینی این عبارات برای I_1 و I_2 در معادلات (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$15 = 0.4V_1 - 0.1V_2$$

$$0 = -0.1V_1 + 0.4V_2$$

که از آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$V_1 = 40\ V \qquad V_2 = 10\ V$$

جریان‌های ورودی و خروجی هم به آسانی به‌دست‌می‌آیند:

$$I_1 = 11\ A \qquad I_2 = -2.5\ A$$

به این ترتیب مشخصات کامل پایانه‌ها در این مدار دو درگاهی مقاومتی معلوم شد.

مزایای تحلیل دو درگاه در این مثال ساده به‌خوبی نمایان نیست، ولی اگر پارامترهای y برای شبکه دو درگاه پیچیده‌تری اعمال شود، رفتار دو درگاه برای شرایط متفاوت به راحتی مشخص می‌گردد. برای این کار کافی است که رابطه V_1 و I_1 در ورودی و رابطه V_2 و I_2 را در خروجی مشخص کنیم.

در مثال فوق دیدیم که y_{12} و y_{21} هر دو ‎-0.1 S بودند. می‌توان نشان داد که در شبکه π اگر امپدانس‌های Z_A، Z_B و Z_C را قرار دهیم باز هم این برابری برقرار است. برای این‌که تحت شرایط خاصی $y_{12} = y_{21}$ شود تا حدی مشکل است ولی استفاده از نمادهای دترمینان کار را کمی ساده می‌کند. بگذارید ببینیم آیا روابط مربوط به معادلات (۱۰) تا (۱۳) را می‌توان برحسب دترمینان امپدانس و کهاد آن‌ها نشان داد.

چون با خود مدار دو درگاه و نه با شبکه‌های متصل به آن‌ها کار داریم، $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ را دو منبع ولتاژ ایده‌آل درنظرمی‌گیریم. معادله (۱۰) را با $\mathbf{V}_2 = 0$ (اتصال کوتاه‌کردن خروجی) و یافتن ادمیتانس ورودی اعمال می‌کنیم. دراین‌صورت شبکه به یک شبکه تک‌درگاهی بدل شده است و امپدانس ورودی آن هم در بخش ۱-۱۷ پیدا شد. حلقه 1 را انتخاب می‌کنیم به‌نحوی‌که پایانه‌های ورودی را دربرگیرد و $\mathbf{I}_1$ را جریان آن حلقه می‌نامیم. $\mathbf{I}_2$- را هم جریان حلقه 2 درنظرمی‌گیریم و بقیه جریان‌های حلقه‌ای را هم به هر نحو مناسبی انتخاب می‌کنیم. پس

$$\mathbf{Z}_{in}\Big|_{\mathbf{V}_2=0} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}}$$

و بنابراین:

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

به‌طور مشابه

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$$

برای یافتن $\mathbf{y}_{12}$، بگذارید $\mathbf{V}_1 = 0$ باشد و سپس $\mathbf{I}_1$ را به صورت تابعی از $\mathbf{V}_2$ بیابید. خواهیم دید که $\mathbf{I}_1$ با نسبت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ -\mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}$$

پس:

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{(-\mathbf{V}_2)\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

و

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z}$$

بنابراین برابری $\mathbf{y}_{12}$ و $\mathbf{y}_{21}$ منوط به برابری دو کهاد Δ_Z یعنی Δ_{12} و Δ_{21} است. این دو کهاد برابرند با:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \mathbf{Z}_{14} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \mathbf{Z}_{42} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}$$

و

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{23} & \mathbf{Z}_{24} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \mathbf{Z}_{41} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}$$

برای نشان‌دادن تساوی این دو کهاد، ابتدا سطرها و ستون‌های یکی از آن‌ها مثلاً Δ_{21} را عوض می‌کنیم. صحت این عمل در تمام کتب جبر دانشگاهی اثبات شده است. سپس هر امپدانس متقابل $\mathbf{Z}_{ij}$ را با $\mathbf{Z}_{ji}$ عوض می‌کنیم. پس قرار می‌دهیم $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$، $\mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{32}$ و غیره.

برای سه عنصر غیرفعال مقاومت، خازن و القاگر و نیز القا متقابل، برابری $\mathbf{Z}_{ij}$ و $\mathbf{Z}_{ji}$ کاملاً واضح است. این مطلب برای هر آن‌چه که بتواند در شبکه دو درگاه قرار گیرد صحت ندارد. خصوصاً برای منبع وابسته و نیز ژیراتور که مدل مفیدی برای عناصر اثر هال است و برای قطعات هدایت‌گری که در آن‌ها فرّیت وجود دارد، این صحبت درست نیست. ژیراتور در یک محدوده باریکی از فرکانس، برای سیگنالی که از خروجی به ورودی می‌رود نسبت به حالتی که از ورودی به خروجی برود، $180°$ اختلاف فاز بیشتر تولید می‌نماید و بنابراین $\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{y}_{21}$. نوع متداول عنصر غیرفعال که به نابرابری $\mathbf{Z}_{ij}$ و $\mathbf{Z}_{ji}$ منجر می‌گردد، یک عنصر غیرخطی را می‌توان نام برد. هر وسیله‌ای که در آن $\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{ji}$ باشد، **عنصر دوطرفه** یا دوسویه خوانده می‌شود و مداری که تنها از این عناصر تشکیل شود مدار دوطرفه نام دارد. بنابراین نشان دادیم که از خصوصیات مهم مدار دو درگاه دو طرفه این‌است‌که:

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$$

برای قدرشناسی از این خاصیت آن را با عنوان **قضیه تقابل** زیر بیان می‌کنیم:

> در هر شبکه دوطرفه خطی غیرفعال، اگر یک منبع ولتاژ $\mathbf{V}_x$ در شاخه $\mathbf{x}$، پاسخ جریان $\mathbf{I}_y$ را در شاخه $\mathbf{y}$ ایجاد کند آنگاه حذف منبع ولتاژ از شاخه $\mathbf{x}$ و نصب آن در شاخه $\mathbf{y}$ جریان $\mathbf{I}_y$ را در شاخه $\mathbf{x}$ به‌وجودمی‌آورد.

راه ساده بیان این قضیه این‌است‌که بگوییم در تعویض یک منبع ولتاژ ایده‌آل و یک آمپرمتر ایده‌آل قرائت آمپر تغییر نمی‌کند.

اگر با دترمینان ادمیتانس مدار کار می‌کنیم و ثابت می‌نماییم که Δ_{21} و Δ_{12} از دترمینان ادمیتانس Δ_Y با هم برابرند، آنگاه **دوگان قضیه تقابل** به صورت زیر بیان می‌گردد:

> در هر شبکه دوطرفه خطی غیرفعال، اگر یک منبع جریان $\mathbf{I}_x$ بین دو گره $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$، پاسخ ولتاژ $\mathbf{V}_y$ را بین دو گره $\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}'$ تولیدکند، آنگاه حذف منبع جریان از گره‌های $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ و نصب آن بین گره‌های $\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}'$ پاسخ ولتاژ $\mathbf{V}_y$ را بین گره‌های $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ به‌وجودمی‌آورد.

به بیان دیگر، تعویض یک منبع جریان ایده‌آل با یک ولتمتر ایده‌آل در هر مدار دوطرفه خطی غیرفعال قرائت ولتمتر را عوض نمی‌کند.

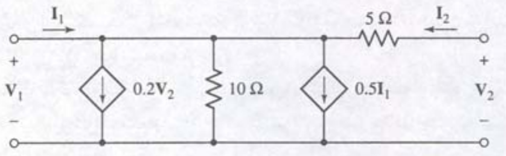
در بخش بعد بر مدارهای دودرگاه حاوی منابع وابسته تأکید خواهد شد.

تمرین

۱۷-۴ در مدار شکل ۱۷-۱۰، $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ منابع جریان ایده‌آل هستند. ولتاژهای گره $\mathbf{V}_1$ را در ورودی، $\mathbf{V}_2$ را در خروجی و $\mathbf{V}_x$ را از گره وسط به گره مرجع نسبت دهید. سه معادله گرهی بنویسید، $\mathbf{V}_x$ را حذف نمایید تا دو معادله باقی بماند و سپس این معادلات را به شکل معادلات (۵) و (۶) مرتب کنید تا هر چهار پارامتر $\mathbf{y}$ از روی معادلات قابل قرائت باشند.

۱۷-۵ برای مدار دو درگاهی شکل ۱۷-۱۲، $\mathbf{y}$ را بیابید.

جواب ۱۷-۴: (همگی به S) $\begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix}$، **جواب ۱۷-۵:** (همگی به S) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$



شکل ۱۲-۱۷

۱۷-۳ چند شبکه معادل

هنگام تحلیل مدارهای الکترونیک، معمولاً باید وسیله فعال (و احتمالاً بعضی مدارهای غیرفعال همراه آن) را با یک مدار دو درگاه حاوی سه یا چهار امپدانس تعویض نمود. اعتبار مدار معادل ممکن‌است به سیگنال‌های کوچک، فرکانس خاص یا یک گستره خاص فرکانس محدود باشد. مدار معادل می‌تواند تقریب خطی یک مدار غیرخطی باشد. با این وجود اگر با مداری مواجه شویم که حاوی تعدادی مقاومت، خازن، القاگر و مثلاً یک ترانزیستور 2N3823 باشد دیگر نمی‌توانیم مدار را با هر یک از تکنیک‌هایی که تابه‌حال دیده‌ایم، تحلیل کنیم. ابتدا باید ترانزیستور را درست مثل آنچه در فصل ۶ دیدیم برای op amp با یک مدل خطی جایگزین نماییم. پارامترهای y یک چنین مدلی را برای مدار دو درگاه که در فرکانس‌های بالا به کار می‌رود، ارائه می‌نماید. مدل دیگری برای ترانزیستور در بخش ۱۷-۵ آمده است. دو معادله‌ای که پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه را معین می‌کنند، یعنی:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (۱۶)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۱۷)$$

که به یک جفت معادله گرهی برای مداری که حاوی دو گره غیرمرجعند شبیه است. اگر y_{12} و y_{21} به‌طورکلی نابرابر باشند تعیین مدار معادلی که منجر به معادلات (۱۶) و (۱۷) شوند کاری بس مشکل است. بهتر است به حقه کوچکی متوسل شویم و کاری کنیم که دو معادله دارای ضرایب متقابل مساوی باشند. بگذارید تا جمله $y_{12}V_1$ (یعنی جمله‌ای که دوست داریم آن را در سمت راست ببینیم) را به معادله (۱۷) اضافه و از آن کم کنیم:

$$I_2 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 + (y_{21} - y_{12})V_1 \quad (۱۸)$$

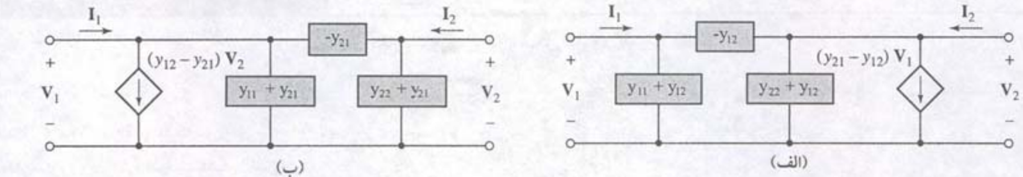
$$I_2 - (y_{21} - y_{12})V_1 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۱۹)$$

اکنون سمت راست معادلات (۱۶) و (۱۹) تقارن مناسب مدارهای دوسویه را دارد. سمت چپ معادله (۱۹) را ممکن‌است به صورت جمع جبری دو منبع جریان تفسیر کرد که یکی منبع مستقل I_2 است که به گره 2 وارد می‌شود و دیگری منبع وابسته $(y_{21} - y_{12})V_1$ است که گره 2 را ترک می‌کند.

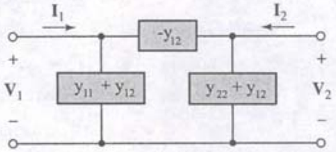
حال بیایید شبکه معادل را از معادلات (۱۶) و (۱۹) بسازیم. ابتدا گره مرجعی تعریف می‌کنیم و سپس دو گره V_1 و V_2 را برمی‌گزینیم. از معادله (۱۶)، جریان I_1 را به گره 1 جاری می‌کنیم. بین گره 1 و 2 ادمیتانس متقابل $(-y_{12})$ وجود دارد پس ادمیتانس $(y_{11} + y_{12})$ بین گره 1 و مرجع است با $V_2 = 0$ نسبت I_1 به V_1، برابر y_{11} است که باید هم چنین باشد. حال معادله (۱۹) را درنظربگیرید. کاری می‌کنیم که جریان I_2 به گره دوم جاری شود و نیز جریان $(y_{21} - y_{12})V_1$ از گره خارج گردد. ملاحظه می‌شود که یک ادمیتانس $(-y_{12})$ بین گره‌ها وجود دارد. پس با گذاشتن $(y_{22} + y_{12})$ بین گره 2 و مرجع مدار را تکمیل می‌کنیم. مدار کامل در شکل ۱۷-۱۳ (الف) مشاهده می‌شود.

فرم دیگری از شبکه معادل با جمع و تفریق $y_{21}V_2$ از معادله (۱۶) به‌دست‌می‌آید. این مدار معادل در شکل ۱۷-۱۳ (ب) مشاهده می‌شود.

اگر مدار دو درگاه دو سویه باشد، آنگاه $y_{12} = y_{21}$ بوده و هر یک از معادل‌ها به مدار ساده غیرفعال π تبدیل می‌شوند. منبع وابسته حذف می‌شود، این مدار معادل جدید در شکل ۱۷-۱۳ (ج) مشاهده می‌شود.



(ب) (الف)



(ج)

شکل ۱۷-۱۳ (الف) و (ب) دو درگاهی که با یک دودرگاهی خطی کلی معادلند. منبع وابسته در بخش (الف) به V_1 وابسته است و در بخش (ب) به V_2 بستگی دارد. (ج) مدار معادل برای شبکه دوسویه.

موارد متعددی از کاربرد این معادل‌ها وجود دارد. اولاً نشان دادیم که برای هر شبکه دو درگاه با هر سطح پیچیدگی، شبکه معادلی وجود دارد. مهم نیست که در داخل شبکه چه مقدار گره یا حلقه داریم، در هر صورت مدار معادل پیچیده‌تر از شکل ۱۷-۱۳ نخواهد شد. اگر تنها به رفتار پایانه‌های شبکه توجه داریم، یکی از آن‌ها ساده‌تر از مدار اصلی است.

شبکه سه پایانه شکل ۱۷-۱۴ (الف) را **شبکه مثلثی** (یا Δ) و شبکه شکل ۱۷-۱۴ (ب) را **شبکه ستاره** (یا Y) می‌خوانند. چنانچه ارتباطی بین امپدانس‌ها برقرار باشد می‌توان یکی را جایگزین دیگری کرد. این ارتباطات را با استفاده از پارامترهای y به‌دست می‌آوریم. می‌بینیم که:

$$y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_1 + Z_2Z_3/(Z_2\ Z_3)} +$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{Z_B} = \frac{-Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3\ Z_3Z_1} +$$

$$y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_2 + Z_1Z_3/(Z_1\ Z_3)} +$$

این معادلات برای Z_A، Z_B و Z_C برحسب Z_1، Z_2 و Z_3 قابل حل‌اند:

$$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2} \quad (۲۰)$$

$$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3} \quad (۲۱)$$

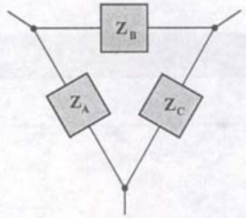
$$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1} \quad (۲۲)$$

و یا روابط معکوس عبارتند از:

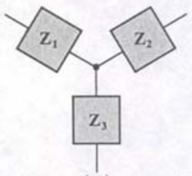
$$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۳)$$

$$Z_2 = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۴)$$

$$Z_3 = \frac{Z_CZ_A}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۵)$$



(الف)



(ب)

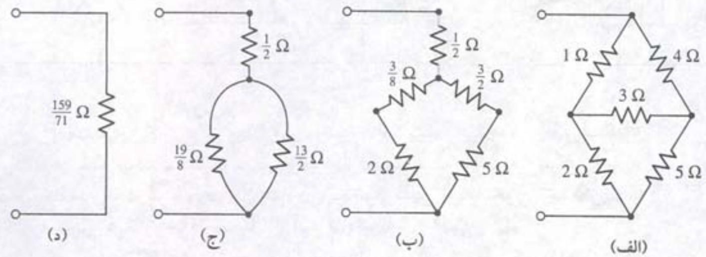
شکل ۱۷-۱۴ شبکه سه‌پایانه Δ (الف) و سه پایانه Y (ب) معادلند به‌شرطی‌که شش امپدانس شرایط تبدیل Δ-Y یا (T - π) معادلات (۲۰) الی (۲۵) را برآورده سازند.

این معادلات تبدیل بین شبکه‌های Y و Δ (یا T - π) را به راحتی میسر می‌سازند. در تبدیل از Y به Δ یعنی معادلات (۲۰) تا (۲۲)، ابتدا صورت مشترک آن‌ها، که حاصل ضرب دو به دو امپدانس‌ها در Y است را به‌دست‌می‌آوریم. آنگاه هر امپدانسی از تقسیم صورت بر عنصری از ستاره که با این امپدانس مثلث گره مشترک ندارند به‌دست‌می‌آید. برعکس برای تبدیل Δ به Y ابتدا سه امپدانس حول مثلث را باهم جمع می‌کنیم. سپس حاصل‌ضرب دو امپدانسی که با عنصر موردنظر شبکه ستاره گره مشترک ندارند را بر این جمع تقسیم می‌نماییم. این تبدیلات غالباً در ساده‌کردن شبکه‌های غیرفعال به‌خصوص مقاومتی بسیار کاربرد دارد. به این ترتیب تحلیل گرهی یا مش لزومی نخواهد داشت.

خواننده ممکن‌است این روابط را از فصل ۵ به‌خاطر بیاورد که در آن‌جا بدون توضیح ارائه گردید.

مثال ۶ـ۱۷

مقاومت ورودی مدار شکل ۱۵ـ۱۷ (الف) را بیابید.



شکل ۱۵ـ۱۷ (الف) شبکه مقاومتی که مقاومت ورودی‌اش خواسته‌شده. این مثال از فصل ۵ آورده شده است. (ب) Δ بالایی با یک معادل Y جایگزین شده است. (ج و د) ترکیبات سری و موازی مقاومت ورودی معادل $\frac{159}{71}$ Ω را به‌دست‌می‌دهد.

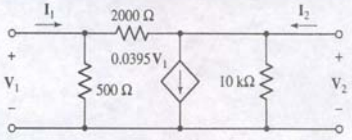
ابتدا در Δ بالایی شکل ۱۵ـ۱۷ (الف) تبدیل Δ به Y را انجام می‌دهیم. مجموع سه مقاومت تشکیل‌دهنده Δ برابر است با $1 + 4 + 3 = 8\Omega$. حاصل‌ضرب دو مقاومت متصل به گره بالایی $1 \times 4 = 4\Omega^2$ است. بنابراین مقاومت فوقانی Y برابر $\frac{4}{8}$ یا $\frac{1}{2}$ Ω است. با تکرار این روند برای دو مقاومت دیگر، شبکه شکل ۱۵ـ۱۷ (ب) حاصل می‌شود.

آنگاه در گام بعدی ترکیبات سری ـ موازی را انجام می‌دهیم تا به ترتیب شکل‌های ۱۵ـ۱۷ (ج) و (د) به‌دست‌آیند. بنابراین مقاومت ورودی مدار در شکل ۱۵ـ۱۷ (الف) برابر $\frac{159}{71}$ یا 2.24Ω حاصل می‌شود.

حال بگذارید مسئله را همچون شکل ۱۶ـ۱۷ کمی مشکل‌تر کنیم. توجه دارید که مدار شامل یک منبع وابسته است و تبدیل Δ-Y امکان‌پذیر نیست.

مثال ۷ـ۱۷

مدار شکل ۱۶ـ۱۷ را می‌توان یک معادل خطی تقریبی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری دانست که در آن پایانه امیتر گره پایینی، پایانه بیس گره ورودی بالایی و پایانه کلکتور نیز گره خروجی بالایی می‌باشد. یک مقاومت 2000Ω بین کلکتور و بیس به منظور کاربردی خاص بسته شده و این خود بر پیچیدگی تحلیل می‌افزاید. پارامترهای y را برای این مدار به‌دست‌آورید.



شکل ۱۶ـ۱۷

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

ملاحظه می‌شود که ما با یک شبکه دو درگاه طرفیم و پارامترهای y خواسته شده‌اند.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

شکل ۱۶ـ۱۷ یک شبکه دو درگاه است که در روی آن V_1، I_1، V_2 و I_2 مشخص شده است و مقدار هر قطعه نیز داده شده است.

- **ارائه طرح.**

در مورد این مدار چندین روش وجود دارد. اگر آن را به صورت مدار معادل شکل ۱۳ـ۱۷ (الف) تصور کنیم، بلافاصله ممکن‌است به فکر تهیه پارامترهای y بیفتیم. اگر فوراً معادل فوق به ذهن نیاید آنگاه پارامترهای y برای مدار دوگانه با اعمال روابط (۱۰) تا (۱۳) به‌دست‌می‌آیند. حتی ممکن‌است روش دو درگاه را فراموش کرده و مدار را مستقیماً تحلیل کنیم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

با کمی بررسی خواهیم دید که $-y_{21}$ متناظر با ادمیتانس 2kΩ است، $y_{11} + y_{12}$ متناظر با ادمیتانس مقاومت 500Ω می‌باشد، بهره منبع جریان وابسته، متناظر با $y_{21} - y_{12}$ و بالاخره

$y_{22} + y_{12}$ متناظر با ادمیتانس مقاومت 10kΩ است. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$y_{11} = \frac{1}{500} - y_{12} \qquad y_{12} = -\frac{1}{2000}$$

$$y_{22} = \frac{1}{10,000} - y_{12} \qquad y_{21} = 0.0395 + y_{12}$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است؟**

با معادلاتی که نوشته شده‌اند می‌بینیم که پس از محاسبه y_{12}، دیگر پارامترها هم ممکن‌است به‌دست‌آیند.

- **اقدام به حل.**

با اعمال مقادیر به یک ماشین حساب، داریم:

$$y_{12} = -\frac{1}{2000} = -0.5 \text{ mS}$$

$$y_{11} = \frac{1}{500} - \left(-\frac{1}{2000}\right) = 2.5 \text{ mS}$$

$$y_{22} = \frac{1}{10,000} - \left(-\frac{1}{2000}\right) = 0.6 \text{ mS}$$

و

$$y_{21} = 0.0395 + \left(-\frac{1}{2000}\right) = 39 \text{ mS}$$

آنگاه معادلات زیر به‌دست‌می‌آیند:

$$I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \qquad (۲۶)$$

$$I_2 = 39V_1 + 0.6V_2 \qquad (۲۷)$$

که در آن‌ها واحدهای V، mA و mS یا kΩ به کار رفته است.

- **صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟**

با نوشتن مستقیم دو معادله گرهی از مدار داریم:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1}{0.5} \qquad \text{یا} \qquad I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2$$

و

$$-39.5V_1 + I_2 = \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2}{10} \qquad \text{یا} \qquad I_2 = 39V_1 + 0.6V_2$$

که با معادلات (۲۶) و (۲۷) حاصل از پارامترهای y یکی است.

اکنون اجازه بدهید تا معادلات (۲۶) و (۲۷) را تحت شرایط کاری مختلف شکل ۱۶ـ۱۷ با تحلیل رفتار این مدار در دو درگاه به کارگیریم. ابتدا یک منبع جریان $1\angle 0°$ mA را در ورودی فراهم کرده و یک مقاومت 0.5kΩ (2mS) را به خروجی وصل می‌کنیم. بنابراین شبکه‌های متصل به هر دو درگاه، تک‌درگاهی‌اند و اطلاعات خاصی از ارتباط I_1 به V_1 و I_2 به V_2 را فراهم می‌نمایند.

$$I_1 = 1 \ (\text{به ازای هر } V_1) \qquad I_2 = -2V_2$$

اکنون چهار معادله و چهار مجهول V_1، V_2، I_1 و I_2 داریم. با جایگزینی روابط دو درگاه در معادلات (۲۶) و (۲۷) دو معادله‌ای که V_1 را به V_2 مربوط می‌سازند به‌دست‌می‌آیند:

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \qquad 0 = 39V_1 + 2.6V_2$$

با حل آن‌ها خواهیم داشت:

$$V_1 = 0.1\text{V} \qquad V_2 = -1.5\text{V} \qquad I_1 = 1 \text{ mA} \qquad I_2 = 3 \text{ mA}$$

این چهار مقدار به مدار دو درگاهی متعلق‌اند که ورودی‌اش از قبل تعیین شده ($I_1 = 1mA$) و خروجی‌اش نیز به بار خاصی وصل می‌باشد ($R_L = 0.5k\Omega$).

رفتار یک تقویت‌کننده معمولاً با مقادیر خاصی توصیف می‌شود. بگذارید چهار تا از این مقادیر را برای این شبکه دودرگاه و شبکه‌های متصل به آن به‌دست‌آوریم. ما مقادیر بهره ولتاژ، بهره جریان، بهره توان و امپدانس ورودی را حساب خواهیم کرد.

بهره ولتاژ G_V برابر است با:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1}$$

با جایگزینی مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$G_V = -15$$

بهره جریان G_I به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$G_I = \frac{I_2}{I_1}$$

پس $G_I = 3$.

اکنون بیایید بهره G_p توان را با فرض منبع سینوسی تعریف و محاسبه کنیم. داریم:

$$G_P = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{Re\left[-\frac{1}{2}V_2 I_2^*\right]}{Re\left[\frac{1}{2}V_1 I_1^*\right]} = 45$$

این شبکه را می‌توان تقویت‌کننده جریان، ولتاژ یا توان نامید که در همه آن‌ها بهره بزرگ‌تر از واحد است. اگر مقاومت 2kΩ حذف شود، بهره توان به 354 افزایش می‌یابد. برای این‌که انتقال توان داده‌شده به درگاه ورودی و دریافتی از درگاه خروجی را به حداکثر برسانیم باید امپدانس ورودی و خروجی تقویت‌کننده را بدانیم. امپدانس ورودی Z_{in} را به صورت نسبت V_1 به I_1 تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 0.1\ k\Omega$$

این امپدانسی است که در برابر منبع قرار داشته و بار اعمال‌شده متصل به خروجی هم 500Ω است (اگر خروجی اتصال کوتاه گردد، امپدانس ورودی لزوماً باید در $\frac{1}{y_{11}}$ یا 400Ω باشد). باید توجه داشت که نمی‌توان امپدانس ورودی را با کشتن هر منبع و مقاومت داخلی‌اش تعیین کرد و سپس مقاومت‌ها و یا هدایت‌ها را با هم ترکیب نمود. در مدار مورد بحث چنین کاری منتهی به مقدار 416Ω می‌گردد. البته خطا از این‌جا ناشی می‌شود که با آن مثل منبع مستقل، رفتار شده است. اگر تصور کنیم که امپدانس ورودی از لحاظ عددی به علت اعمال یک جریان ورودی 1A با ولتاژ ورودی برابر است، با اعمال این جریان یک ولتاژ ورودی V_1 حاصل می‌شود و مقدار منبع ولتاژ وابسته ($0.0395\ V_1$) نمی‌تواند صفر باشد. به یاد می‌آوریم که هنگام به‌دست‌آوردن امپدانس معادل تونن مداری که حاوی یک منبع وابسته همراه یک یا چند منبع مستقل است، باید منابع مستقل را با اتصال باز یا اتصال کوتاه عوض می‌کردیم ولی منابع وابسته را نمی‌کشتیم. البته اگر جریان یا ولتاژ وابسته صفر باشد آن‌گاه خود منبع غیرفعال است. اگر با چنین وضعیتی روبه‌رو شدیم، می‌توانیم آن را هم صفر کنیم.

علاوه بر G_V، G_I، G_P و Z_{in}، یک پارامتر رفتار دیگری وجود دارد که کاملاً مفید است. این پارامتر امپدانس خروجی Z_{out} است که برای یک آرایش مداری متفاوت تعیین خواهد شد.

امپدانس خروجی نام دیگری برای امپدانس تونن مدار معادل تونن از دید بار متصل به شبکه است. در این مدار که فرض کرده‌ایم با منبع جریان $1\underline{/0°}$ A تحریک شده است، به‌جای این منبع مستقل یک اتصال باز هم قرار می‌دهیم، منبع وابسته را رها می‌کنیم و امپدانس ورودی دیده‌شده به سمت چپ خروجی را پس از حذف بار به‌دست‌می‌آوریم. بنابراین امپدانس

خروجی چنین تعریف می‌شود:

در قبال کشته‌شدن همه منابع مستقل و حذف R_L $\quad Z_{out} = V_2\big|_{I_2=1}$

بنابراین مقاومت بار را حذف می‌نماییم، در پایانه‌های خروجی $1\underline{/0°}$ mA را اعمال می‌کنیم (چون با V، mA و kΩ کار می‌کنیم) و V_2 را به‌دست‌می‌آوریم. با قراردادن این شرایط در معادلات (۲۶) و (۲۷) داریم:

$$0 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \qquad 1 = 39V_1 + 0.6V_2$$

و از حل آن:

$$V_2 = 0.1190\ V$$

و به این ترتیب:

$$Z_{out} = 0.1190\ k\Omega$$

راه دیگر این‌است‌که ولتاژ مدار باز خروجی و جریان اتصال کوتاه خروجی را بیابیم. یعنی امپدانس تونن همان خروجی است:

$$Z_{out} = Z_{th} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}}$$

برای اجرای این روش ابتدا منبع مستقل را زنده می‌کنیم به نحوی که $I_1 = 1mA$ باشد و سپس بار را قطع می‌نماییم تا $I_2 = 0$ گردد. داریم:

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \qquad 0 = 39V_1 + 0.6V_2$$

و بنابراین:

$$V_{2oc} = -1.857\ V$$

سپس در خروجی با اتصال کوتاه $V_2 = 0$ را ایجاد می‌کنیم، تا $I_1 = 1\ mA$ گردد. آن‌گاه داریم:

$$I_1 = 1 = 2.5V_1 - 0 \qquad I_2 = 39V_1 + 0$$

و لذا

$$I_{2sc} = 15.6\ mA$$

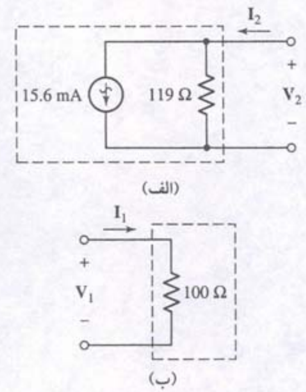
با توجه به جهت V_2 و I_2 امپدانس خروجی تونن را به‌دست‌می‌آوریم:

$$Z_{out} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190\ k\Omega$$

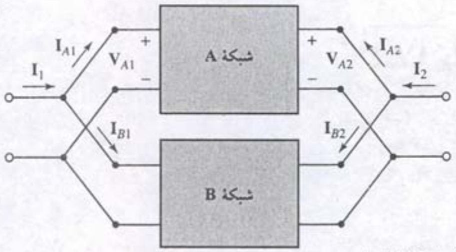
که همان نتیجه قبل است.

اکنون اطلاعات لازم، برای رسم معادل تونن یا نورتن در مدار دو درگاه شکل ۱۶ـ۱۷ را هنگامی که یک منبع جریان تحریک $1\underline{/0°}$ mA و بار 500Ω به آن وصل است، در اختیار داریم. بنابراین معادل نورتن تحویلی به بار باید حاوی منبع جریانی برابر با جریان اتصال کوتاه I_{2sc} و موازی با امپدانس خروجی باشد. این مدار معادل در شکل ۱۷ـ۱۷ (الف) مشاهده می‌شود. همچنین معادل تونِنی که منبع ورودی $1\underline{/0°}$ mA می‌بینید همان امپدانس ورودی است که در شکل ۱۷ـ۱۷ (ب) ملاحظه می‌گردد.

قبل از اتمام بحث پارامترهای y، باید سودمندی آن‌ها در توصیف اتصال موازی مدارهای دو درگاه، طبق شکل ۱۸ـ۱۷ را توضیح دهیم. هنگامی‌که برای اولین بار درگاه را در بخش ۱ـ۱۷ معرفی کردیم، گفتیم که جریان وارده به یک پایانه درگاه باید با جریان خارج‌شده از پایانه دیگر آن برابر باشد و نباید بین درگاه‌ها اتصال بیرونی وجود داشته باشد. آشکار است که اتصال



شکل ۱۷ـ۱۷ (الف) معادل نورتن شبکه شکل ۱۶ـ۱۷ در سمت چپ پایانه‌های خروجی، $I_1 = 1\underline{/0°}$ mA. (ب) معادل تونن آن بخش از شبکه که در سمت راست پایانه‌های ورودی قرار دارد به‌شرطی‌که $I_2 = -2V_2$ باشد.



شکل ۱۸ـ۱۷ اتصال موازی دو شبکه دو درگاه. اگر هر دو ورودی و خروجی گره مرجعی داشته باشد، آن‌گاه ماتریس ادمیتانس برابر است با:

$$y = y_A + y_B$$

موازی شکل ۱۸_۱۷ این قانون را نقض می‌نماید. با این وجود اگر در هر یک از مدارهای دو درگاه گره مرجع بین درگاه ورودی و خروجی مشترک باشد و اگر دو درگاهی‌ها موازی باشند به نحوی که گره مشترکی هم داشته باشند، پس از اتصال هم درگاه باقی می‌مانند. پس در شبکه A داریم:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{y}_A \mathbf{V}_A$$

که

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \end{bmatrix} \quad و \quad \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \end{bmatrix}$$

و برای شبکه B داریم:

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{y}_B \mathbf{V}_B$$

اما

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V} \quad و \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B$$

پس

$$\mathbf{I} = (\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B)\,\mathbf{V}$$

می‌بینیم که هر پارامتر **y** از شبکه موازی به صورت جمع پارامترهای تک‌تک‌شبکه‌ها خواهد بود:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B \qquad (۲۸)$$

واضح است که نتیجه فوق قابل تعمیم به هر تعداد شبکه دو درگاه موازی است.

تمرین

۶_۱۷ برای مدار دودرگاهی شکل ۱۹_۱۷، **y** و $\mathbf{Z}_{out}$ را به‌دست‌آورید.

۷_۱۷ با استفاده از تبدیل **Δ-Y** و **Y-Δ**، R_{in} را برای شبکه (الف) شکل ۲۰_۱۷ (الف) و (ب) شکل ۲۰_۱۷ (ب) به‌دست‌آورید.

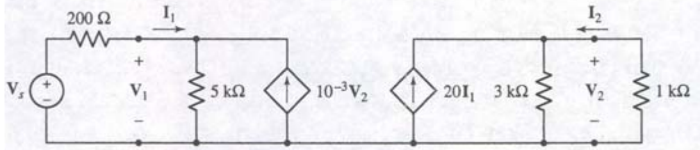
جواب ۶_۱۷: $\begin{bmatrix} 2\times10^{-4} & -10^{-3} \\ -4\times10^{-3} & 20.3\times10^{-3} \end{bmatrix}$ (S)، **۷_۱۷:** 53.71Ω، 1.311Ω

۴_۱۷ پارامترهای امپدانس

مفهوم پارامترهای دو درگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه معرفی شد. مجموعه پارامترهای دیگری هم وجود دارد و هر یک از این مجموعه‌ها مربوط به کلاس خاصی از شبکه‌ها است و تحلیل آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. ما در این‌جا سه دسته پارامتر دیگر با عناوین پارامترهای امپدانس مدار باز، که موضوع بحث این بخش است و پارامترهای هیبرید و انتقالی را در بخش‌های بعدی ملاحظه خواهیم کرد.

دوباره یک مدار کلی دو درگاه فاقد منابع مستقل را درنظرمی‌گیریم. ولتاژها و جریان‌ها مثل قبل تخصیص یافته‌اند (شکل ۱۸_۱۷). اکنون بیایید فرض کنیم که ولتاژ $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ به عنوان پاسخ به وسیله دو منبع جریان $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ تولید شوند. بنابراین برای $\mathbf{V}_1$ داریم:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad (۲۹)$$



شکل ۱۹_۱۷

و برای $\mathbf{V}_2$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad (۳۰)$$

یا

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{zI} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

البته در استفاده از این معادلات لزومی ندارد که $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ منابع جریان و یا $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ منابع ولتاژ باشند. به‌طورکلی می‌توان هر شبکه‌ای را به ورودی و خروجی این شبکه دو درگاه وصل کرد. پس از نوشتن معادلات معمولاً چنین تصور می‌شود که $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ کمیت مفروض یا متغیرهای مستقل و $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ مجهولات یا متغیرهای وابسته‌اند.

این چهار کمیت را به شش طریق می‌توان به هم ربط داد که هر کدام یک دسته پارامتر را مشخص می‌کنند. ما چهار روش از این شش سیستم پارامتر را مطالعه می‌کنیم.

آموزنده‌ترین توصیف پارامترهای **z** که به وسیله معادلات (۲۹) و (۳۰) تعریف شده‌اند، با صفرکردن هر یک از جریان‌ها به‌دست‌می‌آید. پس:

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\Big|_{\mathbf{I}_2=0} \quad (۳۲) \qquad \mathbf{z}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\Big|_{\mathbf{I}_1=0} \quad (۳۳)$$

$$\mathbf{z}_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\Big|_{\mathbf{I}_2=0} \quad (۳۴) \qquad \mathbf{z}_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\Big|_{\mathbf{I}_1=0} \quad (۳۵)$$

چون صفرشدن جریان از قطع پایانه حاصل می‌گردد، پارامترهای **z** را به نام پارامترهای امپدانس مدار باز می‌شناسند. با حل معادلات (۲۹) و (۳۰) برای $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ می‌توان این پارامترها را با پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه مرتبط کرد:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}$$

یا

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_2$$

با استفاده از نماد دترمینان و توجه به این‌که زیرنویس **z** کوچک باشد، فرض می‌کنیم $\Delta_Z \neq 0$ و روابط زیر را به‌دست‌می‌آوریم:

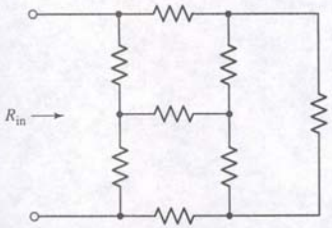
$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} = \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{y}_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} = -\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_z}$$

و از حل برای $\mathbf{I}_2$ داریم:

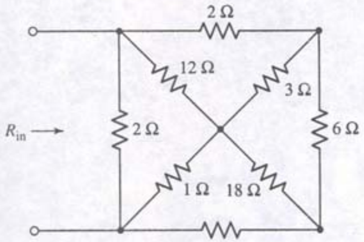
$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} = \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_z}$$

به روشی مشابه، پارامترهای **z** را می‌توان برحسب پارامترهای ادمیتانس **y** نوشت. تبدیل‌هایی از این نوع بین سیستم پارامترهای مختلف امکان‌پذیر است و فرمول‌های مفیدی هم در این راستا حاصل می‌گردد. تبدیلات بین پارامترهای **y** و **z** (و **h** و **t** که در بخش‌های بعد آمده) در جدول ۱_۱۷ به عنوان مرجع ارائه شده است. اگر شبکه دودرگاه، دوسویه هم باشد، قضیه تقابل معتبر است و به آسانی می‌توان نشان داد که $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$.

دوباره مدارهای معادل را از معادلات (۲۹) و (۳۰) می‌توان به‌دست‌آورد. ایجاد آن‌ها با جمع و تفریق $\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_1$ در معادله (۳۰) یا $\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_2$ در معادله (۲۹) امکان‌پذیر است. هر یک از این مدارهای معادل دارای یک منبع ولتاژ وابسته است.



هر یک از مقاومت‌ها 47 Ω است
(الف)



(ب)

شکل ۲۰_۱۷

جدول ۱ـ۱۷ تبدیل بین پارامترهای y، z، h و t.

	y		z		h		t	
y	y_{11}	y_{12}	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$\frac{-z_{12}}{\Delta_z}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{t_{22}}{t_{12}}$	$\frac{-\Delta_t}{t_{12}}$
	y_{21}	y_{22}	$\frac{-z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$\frac{-1}{t_{12}}$	$\frac{t_{11}}{t_{12}}$
z	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{-y_{12}}{\Delta_y}$	z_{11}	z_{12}	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{21}}$
	$\frac{-y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	z_{21}	z_{22}	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{t_{21}}$	$\frac{t_{22}}{t_{21}}$
h	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{t_{12}}{t_{22}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-1}{t_{22}}$	$\frac{t_{21}}{t_{22}}$
t	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta_h}{h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	t_{11}	t_{12}
	$\frac{-\Delta_y}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	t_{21}	t_{22}

برای هر مجموعه پارامتر $\Delta_p = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$.

بگذارید یافتن چنین معادلی را به وقت مناسب‌تری موکول کنیم و فعلاً به مثال کلی‌تری بپردازیم. آیا می‌توان مدار معادل تونن را از دید خروجی یک دو درگاه را در حالت کلی به‌دست‌آورد؟ ابتدا باید یک آرایش مدار ورودی خاص را فرض کنیم و لذا یک منبع ولتاژ مستقل V_s (مثبت در بالا) را که با امپدانس Z_g سری است انتخاب می‌نماییم. پس

$$V_s = V_1 + I_1 Z_g$$

از ترکیب این رابطه با معادلات (۲۹) و (۳۰)، V_1 و I_1 را حذف می‌کنیم تا رابطه زیر به‌دست‌آید:

$$V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g} V_s + \left(z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}\right) I_2$$

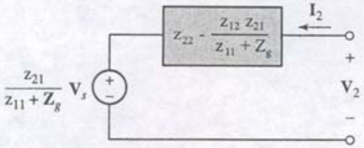
مدار معادل تونن را مستقیماً از این رابطه می‌توان ترسیم کرد. این مدار در شکل ۲۱ـ۱۷ نشان داده شده است. امپدانس خروجی که برحسب پارامترهای z بیان شده چنین است:

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$$

اگر امپدانس مولد صفر باشد، عبارت ساده‌تر می‌شود:

$$Z_{out} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{11}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{1}{y_{22}} \quad (Z_g = 0)$$

برای این حالت خاص، ادمیتانس خروجی همان y_{22} خواهدبود. معادله(۱۳) نیز همین رابطه‌می‌باشد



شکل ۲۱ـ۱۷ معادل تونن یک دودرگاهی در حالت کلی، از پایانه‌های خروجی. این مدار برحسب پارامترهای امپدانس مدار باز بیان شده است.

مثال ۸ـ۱۷

با فرض مجموعه پارامترهای امپدانس زیر:

$$z = \begin{bmatrix} 10^3 & 10 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix} \quad (\text{همگی به } \Omega)$$

که بیان‌گر کار ترانزیستوری در آرایش امیتر مشترک است، بهره‌های ولتاژ، جریان و توان امپدانس‌های ورودی و خروجی را معین کنید. فرض شود مدار دودرگاه به وسیله یک منبع ولتاژ ایده‌آل V_s سری با مقاومت 500Ω تحریک شده و به یک مقاومت بار 10kΩ وصل است.

معادلات توصیف‌گر دو درگاه عبارتند از:

$$V_1 = 10^3 I_1 + 10 I_2 \quad (۳۶)$$

$$V_2 = -10^6 I_1 + 10^4 I_2 \quad (۳۷)$$

معادلاتی که شبکه‌های ورودی و خروجی را مشخص می‌کنند عبارتند از:

$$V_s = 500 I_1 + V_1 \quad (۳۸)$$

$$V_2 = -10^4 I_2 \quad (۳۹)$$

از این چهار معادله اخیر، به سادگی عبارات مربوط به V_1، I_1، V_2 و I_2 برحسب V_s به‌دست‌می‌آیند:

$$V_1 = 0.75 V_s \qquad I_1 = \frac{V_s}{2000}$$

$$V_2 = -250 V_s \qquad I_2 = \frac{V_s}{40}$$

با این اطلاعات بهره ولتاژ به‌دست‌می‌آید:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} = -333$$

و بهره جریان

$$G_I = \frac{I_2}{I_1} = 50$$

و بهره توان

$$G_P = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}V_2 I_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}V_1 I_1^*\right]} = 16{,}670$$

و امپدانس ورودی برابر است با:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 1500\ \Omega$$

با مراجعه به شکل ۲۱ـ۱۷ می‌توان امپدانس خروجی را به‌دست‌آورد:

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g} = 16.67\ k\Omega$$

طبق پیش‌بینی‌های مربوط به قضیه انتقال توان ماکزیمم، بهره توان هنگامی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که $Z_L = Z^*_{out} = 16.67\ k\Omega$ برسد و مقدار آن 17045 است.

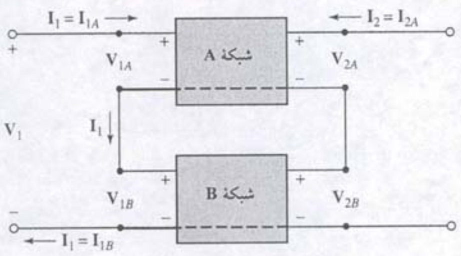
پارامترهای y هنگام اتصال موازی دو درگاهی‌ها مفیدند و با توجه به اصل دوگانگی، پارامترهای z مسئله اتصال سری شبکه را طبق شکل ۲۲ـ۱۷ حل می‌کنند. توجه داشته باشید که اتصال سری با اتصال پی‌درپی یا متوالی که بعداً و در هنگام ملاحظه پارامترهای انتقال راجع‌به آن‌ها بحث خواهیم کرد، تفاوت دارد. اگر هر شبکه دو درگاه یک گره مشترک برای ورودی و خروجی داشته باشند و اگر طبق شکل ۲۲ـ۱۷ مراجع به هم وصل شوند، آنگاه I_1 از درگاه‌های ورودی دو شبکه سری جاری می‌گردد. عبارت مشابهی برای I_2 صحیح است. سپس درگاه‌ها پس از این اتصال درونی درگاه باقی خواهند ماند و از آن نتیجه می‌شود $I = I_A = I_B$ و

$$V = V_A + V_B = z_A I_A + z_B I_B = (z_A + z_B) I = zI$$

که

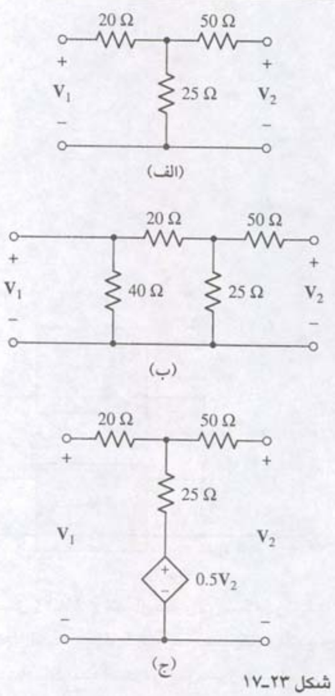
$$z = z_A + z_B$$

پس $z_{11} = z_{11A} + z_{11B}$ و به همین ترتیب.



شکل ۲۲ـ۱۷ اتصال سری دو شبکه دودرگاه که از اتصال چهار گره مرجع مشترک به یکدیگر به‌دست‌آمده است در این‌صورت ماتریس $z = z_A + z_B$.

تمرین



شکل ۲۳ـ۱۷

۸ـ۱۷ **z** را برای مدار دودرگاه (الف) شکل ۲۳ـ۱۷ (الف) و (ب) شکل ۲۳ـ۱۷ (ب) به‌دست‌آورید.

۹ـ۱۷ **z** رابرای شبکه دودرگاه شکل ۲۳ـ۱۷ (ج) بیابید.

جواب: ۸ـ۱۷: $\begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 25 & 75 \end{bmatrix}$ (Ω)، $\begin{bmatrix} 21.2 & 11.76 \\ 11.76 & 67.6 \end{bmatrix}$ (Ω) ۹ـ۱۷: $\begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 50 & 150 \end{bmatrix}$ (Ω)

۵ـ۱۷ پارامترهای هیبرید

مشکل اندازه‌گیری کمیاتی چون پارامترهای مدار باز هنگامی ظاهر می‌شودکه پارامتری مثل $\mathbf{z}_{21}$ باید اندازه‌گیری شود. یک منبع سینوسی را به سادگی می‌توان به پایانه‌های ورودی اعمال کرد ولی به علت امپدانس بسیار بزرگ خروجی در مدار ترانزیستوری، بازگذاشتن پایانه‌های خروجی و در عین حال اعمال ولتاژ تغذیه مشکل است. اندازه‌گیری جریان مدار اتصال کوتاه در پایانه‌های خروجی خیلی ساده صورت می‌گیرد.

پارامترهای هیبرید با یک جفت معادله که $\mathbf{V}_1$ ، $\mathbf{I}_1$ ، $\mathbf{V}_2$ و $\mathbf{I}_2$ را مرتبط می‌سازند تعریف می‌شوند و در این میان $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{I}_2$ متغیرهای مستقلند:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \tag{۴۰}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{۴۱}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \tag{۴۲}$$

ماهیت پارامترها را می‌توان با تنظیم $\mathbf{V}_2 = 0$ مشخص کرد. پس

$$\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\bigg|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{امپدانس ورودی اتصال کوتاه}$$

$$\mathbf{h}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\bigg|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{بهره جریان مستقیم اتصال کوتاه}$$

با $\mathbf{I}_1 = 0$ هم داریم:

$$\mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\bigg|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{بهره ولتاژ معکوس مدار باز}$$

$$\mathbf{h}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\bigg|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{ادمیتانس خروجی مدار باز}$$

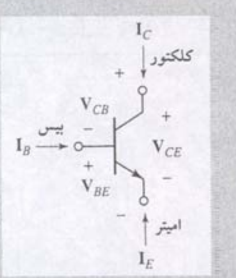
چون این پارامترها بیانگر امپدانس، ادمیتانس، بهره ولتاژ و بهره جریانند، به آن‌ها پارامترهای هیبرید می‌گوییم. هنگامی‌که این پارامترها برای ترانزیستور به‌کار‌بروند، زیرنویس‌ها ساده می‌شوند. پس $\mathbf{h}_{11}$، $\mathbf{h}_{12}$، $\mathbf{h}_{21}$ و $\mathbf{h}_{22}$ به ترتیب تبدیل به $\mathbf{h}_i$، $\mathbf{h}_r$، $\mathbf{h}_f$ و $\mathbf{h}_o$ می‌گردند که در آن‌ها زیرنویس‌ها به معنی ورودی، معکوس، مستقیم و خروجی می‌باشند.

کاربرد عملی

مشخصه‌های ترانزیستور

مقادیر پارامترهای ترانزیستورهای پیوندی دوقطبی برحسب پارامترهای **h** بیان می‌شوند. ترانزیستور به وسیله محققین آزمایشگاه بل در اواخر دهه ۱۹۴۰ اختراع شد (شکل ۲۴ـ۱۷) که یک وسیله نیمه هادی غیرخطی است که مبنای بسیاری از مدارهای تقویت‌کننده و دیجیتال منطقی را می‌سازد. سه پایانه یک ترانزیستور طبق شکل ۲۵ـ۱۷، بیس (b) کلکتور (c) و امیتر (e) نام‌گذاری و این نام‌ها با توجه به نقش آن‌ها در حمل بار در این وسیله انتخاب شده‌اند. پارامترهای **h** یک ترانزیستور پیوندی دوقطبی معمولاً با صفرکردن امیتر که به آن آرایش امیتر مشترک می‌گویند، اندازه‌گیری می‌شود. آن‌گاه بیس به عنوان ورودی و کلکتور خروجی است. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، در هر صورت ترانزیستور یک وسیله غیرخطی است و بنابراین پارامترهای **h** را نمی‌توان برای همه ولتاژها و جریان‌ها تعریف کرد.

شکل ۲۴ـ۱۷ عکسی از اولین ترانزیستور دوقطبی (bjt).



شکل ۲۵ـ۱۷ شماتیک bjt که جریان‌ها و ولتاژها را برحسب قرارداد IEEE نشان می‌دهد.

بنابراین عملاً باید پارامتر **h** را برای مقادیر خاصی از جریان کلکتور $\mathbf{I}_C$ و ولتاژ کلکتور ـ امیتر بیان نمود. نتیجه حاصل دیگر از خاصیت غیرخطی ترانزیستور این است‌که مقدار h، ac با h، dc از لحاظ مقدار کاملاً با یکدیگر متفاوتند.

وسایل اندازه‌گیری متعددی برای به‌دست‌آوردن پارامترهای یک ترانزیستور خاص در دسترس است. مثالی از این وسایل تحلیل‌گر پارامتر نیمه هادی، طبق شکل ۲۶ـ۱۷ است. این وسیله جریان را (محور عمودی) در برابر ولتاژ خاصی (محور افقی) رسم می‌نماید. دسته‌ای از منحنی‌ها با تغییر جریان در گام‌های گسسته ترسیم شده‌اند.

به‌عنوان مثال سازنده یک ترانزیستور سیلیکان 2N3904 NPN پارامترهای **h** را طبق جدول ۲ـ۱۷ بیان می‌کند.

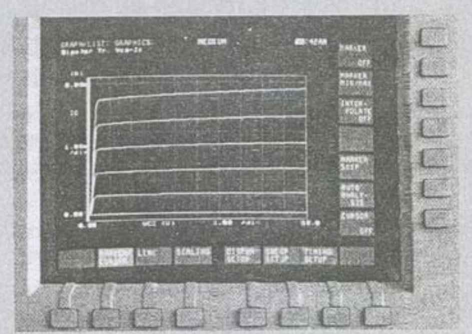
دقت کنید که علائم به‌کاررفته برای پارامترهای فوق توسط مهندسین به شکل (h_{ie}، h_{re} و غیره) است. اندازه‌گیری‌ها در $I_C = 1.0$ mA، $V_{CE} = 10$ Vdc و $f = 1.0$ kHz انجام شده است. به‌عنوان سرگرمی یکی از ناشرین تصمیم گرفت این پارامترها را خود اندازه بگیرد. لذا یکی از آن‌ها را برداشت و با وسیله شکل ۲۶ـ۱۷ مقادیر زیر را به‌دست‌آورد:

$$h_{oe} = 3.3\ \mu\text{mhos} \qquad h_{fe} = 1.9$$

$$h_{ie} = 3.02\ \text{k}\Omega \qquad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

سه مقدار اول به خوبی در گستره مقادیر دادشده به وسیله سازنده بوده و کمی نیز به مقادیر حداقل نزدیک‌تر است. با این وجود مقدار h_{re} بزرگ‌تر از آن‌چه که در برگه اطلاعات آمده می‌باشد. این نتیجه موجب شرمندگی است زیرا فکر می‌کردیم که تا به این‌جا خوب کار کرده‌ایم.

مادامی که سرگرم ترسیم منحنی‌ها در بالا و پایین $I_C = 1$mA هستیم، قطعه گرم می‌شود. متأسفانه به دلیل وابستگی شدید به حرارت، مشخصات ترانزیستور تغییر می‌یابد. مقادیر داده‌شده به وسیله سازنده در 25° C است. با کاهش دمای قطعه می‌توان مقدار h_{re} را تا 2.0×10^{-4} تقلیل داد. مدارهای خطی برای کار ساده‌اند ولی مدارهای غیر خطی حین کار جالبند.

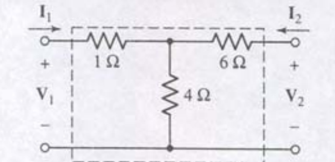


شکل ۲۶ـ۱۷ نمایش نمودارهای حاصل از تحلیل پارامتر نیمه هادی HP 4155A برای اندازه‌گیری **h** ترانزیستور 2N3904 دوقطبی.

جدول ۲ـ۱۷ خلاصه‌ای از پارامترهای ac ‏2N3904.

پارامتر	نام	مشخصات	واحد
$h_{ie}(h_{11})$	امپدانس ورودی	1.0-10	kΩ
$h_{re}(h_{12})$	نسبت پسخورد ولتاژ	$0.5\text{-}8.0 \times 10^{-4}$	-
$h_{fe}(h_{21})$	بهره جریان سیگنال کوچک	100-400	-
$h_{oe}(h_{22})$	ادمیتانس خروجی	1.0-40	μmhos

مثال ۹ـ۱۷



شکل ۲۷ـ۱۷ شبکه دوسویه‌ای که پارامترهای h آن به‌دست‌آمده است: $h_{12} = -h_{21}$.

برای مدار مقاومتی دوطرفه شکل ۲۷ـ۱۷، $\mathbf{h}$ را پیدا کنید.

با اتصال کوتاه خروجی $(v_2 = 0)$، و اعمال یک منبع 1A در ورودی $(I_1 = 1A)$ یک ولتاژ ورودی 3.4V $(V_1 = 3.4V)$ تولید می‌کند. پس $h_{11} = 3.4\Omega$ خواهد بود. تحت همین شرایط جریان خروجی به سادگی با تقسیم جریان به‌دست‌می‌آید، $I_2 = -0.4A$، پس $h_{21} = -0.4$.

دو پارامتر باقیمانده مدار باز را به‌دست‌می‌آوریم $(I_1 = 0)$. بگذارید ولتاژ 1V را به پایانه‌های خروجی اعمال کنیم $(V_2 = 1V)$. پاسخ در پایانه‌های ورودی 0.4V است $(V_1 = 0.4)$ و بنابراین $h_{12} = 0.4$ خواهد شد. جریان حمل‌شده به وسیله این منبع در پایانه‌های خروجی 0.1A $(I_2 = 0.1A)$ و لذا $h_{22} = 0.1S$ است. پس خواهیم داشت:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 3.4\,\Omega & 0.4 \\ -0.4 & 0.1\,\mathrm{S} \end{bmatrix}$$

این نتیجه قضیه تقابل است که در یک شبکه دوسویه $h_{12} = -h_{21}$ است.

تمرین

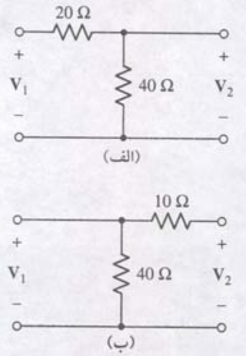
۱۰ـ۱۷ $\mathbf{h}$ را برای مدار دو درگاه، (الف) شکل ۲۸ـ۱۷ (الف)، (ب) شکل ۲۸ـ۱۷ (ب) پیدا کنید.

۱۱ـ۱۷ اگر $\mathbf{h}$ با رابطه زیر داده شود، مطلوبست (الف) $\mathbf{y}$ و (ب) $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 5\,\Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1\,\mathrm{S} \end{bmatrix}$$

جواب ۱۰ـ۱۷: $\begin{bmatrix} 8\,\Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20\,\mathrm{mS} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 20\,\Omega & 1 \\ -1 & 25\,\mathrm{mS} \end{bmatrix}$

جواب ۱۱ـ۱۷: $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} (\Omega)$ ، $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} (\mathrm{S})$



شکل ۲۸ـ۱۷

مدار شکل ۲۹ـ۱۷ نتیجه تبدیل مستقیم دو معادله (۴۰) و (۴۱) است. اولی KVL را حول حلقه ورودی نشان می‌دهد، درحالی‌که دومی از KCL در گره خروجی بالا نتیجه شده است این مدار، مدار معادل ترانزیستور نیز هست. بگذارید چند مقدار را برای آرایش امیتر مشترک درنظربگیریم: $h_{11} = 1200\Omega$، $h_{12} = 2 \times 10^{-4}$، $h_{21} = 50$، $h_{22} = 50 \times 10^{-6}$ S و یک منبع ولتاژ $1\ 0°$ که با یک مقاومت 800Ω سری بوده و به بار $5k\Omega$ وصل است. در ورودی

$$10^{-3} = (1200 + 800)\mathbf{I}_1 + 2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2$$

و در خروجی

$$\mathbf{I}_2 = -2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2 = 50\mathbf{I}_1 + 50 \times 10^{-6}\mathbf{V}_2$$

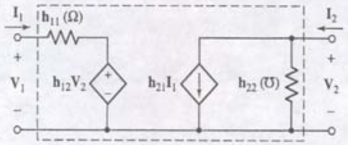
و از حل آن‌ها داریم:

$$\mathbf{I}_1 = 0.510\mu A \qquad \mathbf{V}_1 = 0.592mV$$

$$\mathbf{I}_2 = 20.4\mu A \qquad \mathbf{V}_2 = -102mV$$

در ترانزیستور مورد نظر بهره جریان 40، بهره ولتاژ 172- و بهره توان 6880 را داریم. امپدانس ورودی ترانزیستور 1160Ω و با چند محاسبه مختصر امپدانس خروجی $22.2k\Omega$ به‌دست‌می‌آید.

وقتی‌که دومدار دو درگاه بطور سری در ورودی و موازی در خروجی به‌هم وصل‌شوند پارامترهای هیبرید با هم جمع می‌گردند. این نوع ارتباط را اتصال سری ‑ موازی می‌نامند و خیلی استفاده نمی‌شود.



شکل ۲۹ـ۱۷ چهار پارامتر مربوط به مدار دودرگاه. معادلات حاکم بر مدار عبارتند: $I_2 = h_{21}I_1+h_{22}V_2$ و $V_1 = h_{11}I_1+h_{12}V_2$

۶ـ۱۷ پارامترهای انتقال

آخرین پارامتر مربوط به مدار دو درگاهی که بررسی خواهیم کرد **پارامترهای t**، **پارامترهای ABCD** یا ساده‌تر بگوییم **پارامترهای انتقال** است. این پارامترها چنین تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad (۴۳)$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad (۴۴)$$

یا

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

که V_1، V_2، I_1 و I_2 طبق معمول تعریف می‌شوند (شکل ۸ـ۱۷). علامت‌های منفی در معادلات (۴۳) و (۴۴) مربوط به جریان خروجی است. چون داریم $(-I_2)$، بنابراین هر دو جریان I_1 و $-I_2$ به سمت راست جهت یافته‌اند، که همان جهت انرژی یا انتقال است.

فرم دیگر نمایش این مجموعه پارامترها برابر زیر است:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

توجه کنید که هیچ علامت منفی در ماتریس $\mathbf{t}$ یا $\mathbf{ABCD}$ وجود ندارد.

با نگاه مجدد به معادلات (۴۳) تا (۴۵) می‌بینیم، کمیت‌های سمت چپ که اغلب مفروض یا متغیرهای مستقلی هستند، ولتاژ و جریان V_1 و I_1 می‌باشند. کمیت‌های وابسته، V_2 و I_2 معمولاً کمیت‌های خروجی‌اند. بنابراین پارامترهای انتقال رابطه مستقیمی بین ورودی و خروجی را فراهم می‌سازند. کاربرد عمده آن‌ها در تحلیل خط انتقال و در شبکه‌های متوالی است. بیایید اکنون پارامترهای $\mathbf{t}$ را برای مدار مقاومتی دو طرفه دو درگاهی شکل ۳۰ـ۱۷ (الف) به‌دست‌آوریم. برای بررسی یک روش ممکن دریافتی یک پارامتر چنین عمل می‌کنیم:

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{I}_2}\Big|_{V_2=0}$$

بنابراین خروجی را اتصال‌کوتاه می‌کنیم $(V_2 = 0)$ و $V_1 = 1V$ قرارمی‌دهیم (شکل ۳۰ـ۱۷(ب)). توجه کنید که نمی‌توان مخرج را با استقرار منبع 1A در خروجی، برابر واحد کرد. ما قبلاً منبع را اتصال کوتاه کرده‌ایم. مقاومت معادلی که منبع 1V می‌بیند، $R_{eq} = 2 + (4 \| 10)\Omega$ است و سپس با تقسیم جریان داریم:

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2 + (4 \| 10)} \times \frac{10}{10 + 4} = \frac{5}{34}\ \mathrm{A}$$

بدین ترتیب

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{1}{-\mathbf{I}_2} = \frac{34}{5} = 6.8\ \Omega$$

اگر بخواهیم هر چهار پارامتر را پیدا کنیم، می‌توانیم یک جفت معادله مناسب برحسب کمیات مربوط به پایانه‌ها، یعنی V_1، V_2، I_1 و I_2 بنویسیم. از شکل ۳۰ـ۱۷ (الف) دو معادله حلقه‌ای داریم:

$$\mathbf{V}_1 = 12\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \qquad (۴۷)$$

$$\mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_1 + 14\mathbf{I}_2 \qquad (۴۸)$$

با حل معادله (۴۸) برای I_1 داریم:

$$\mathbf{I}_1 = 0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2$$

پس $t_{21} = 0.1S$ و $t_{22} = 1.4$ می‌باشد. با جایگزینی I_1 در معادله (۴۷) داریم:

$$\mathbf{V}_1 = 12(0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2) + 10\mathbf{I}_2 = 1.2\mathbf{V}_2 - 6.8\mathbf{I}_2$$

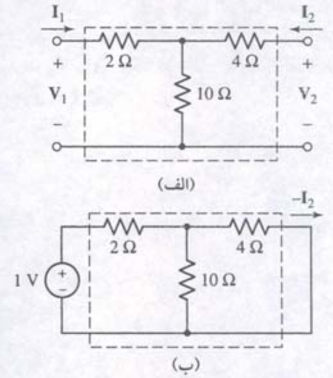
و دوباره $t_{11} = 1.2$ و $t_{12} = 6.8\Omega$ به‌دست‌می‌آید.

برای شبکه‌های دوسویه، دترمینان ماتریس $\mathbf{t}$ برابر واحد است:

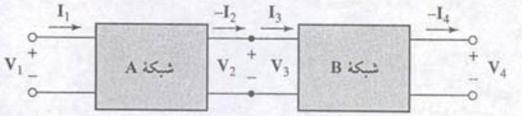
$$\Delta_t = \mathbf{t}_{11}\mathbf{t}_{22} - \mathbf{t}_{12}\mathbf{t}_{21} = 1$$

در مثال مقاومتی شکل ۳۰ـ۱۷، داریم:

$$\Delta_t = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$$



شکل ۳۰ـ۱۷ (الف) یک شبکه مقاومتی دودرگاه که پارامترهای t برای آن باید به‌دست‌آیند. (ب) برای یافتن t_{12}، $V_1 = 1V$ و $V_2 = 0$ را ایجاد کنید. سپس $t_{12} = 1/(-I_1) = 6.8\Omega$.



شکل ۳۱_۱۷ وقتی شبکه‌های دودرگاه A و B به‌طور پی‌درپی یا متوالی بسته شوند، ماتریس پارامتر **t** برای شبکه حاصل با ضرب ماتریسی $\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$ معین می‌شود.

بحث خود را در مورد مدارهای دو درگاه، با اتصال متوالی دو مدار دو درگاهی طبق شکل ۳۱_۱۷ پایان می‌دهیم. ولتاژ و جریان پایانه‌ها برای هر یک با دیگری یکسان تصور شده است. پارامترهای **t** متناظر برای شبکه A عبارتند:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

و برای شبکه B برابر است با:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

با ترکیب این نتایج داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

بنابراین پارامترهای **t** برای شبکه‌ی موازی از ضرب ماتریسی زیر به‌دست‌می‌آیند:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$$

این حاصل‌ضرب از ضرب‌کردن عناصر دو ماتریس حاصل نمی‌شود. در صورت لزوم به پیوست ۲ مراجعه کنید.

مثال ۱۰_۱۷

پارامترهای t را برای شبکه‌های شکل ۳۲_۱۷ پیداکنید.

شبکه A همان شبکه دو درگاه شکل ۳۲_۱۷ است و بنابراین:

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

درحالی‌که شبکه B دارای مقادیر مقاومت دو برابر است:

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

برای شبکه ترکیب‌شده داریم:

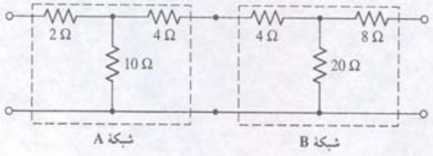
$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2 \times 1.2 + 6.8 \times 0.05 & 1.2 \times 13.6 + 6.8 \times 1.4 \\ 0.1 \times 1.2 + 1.4 \times 0.05 & 0.1 \times 13.6 + 1.4 \times 1.4 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84\ \Omega \\ 0.19\ \text{S} & 3.32 \end{bmatrix}$$

شکل ۳۲_۱۷



تمرین

۱۲_۱۷ با فرض رابطه زیر، (الف) **z** را بیابید. (ب) **t** را برای دو شبکه یکسان متوالی به‌دست‌آورید.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3.2 & 8\ \Omega \\ 0.2\ \text{S} & 4 \end{bmatrix}$$

جواب: $\begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$ (Ω)، $\begin{bmatrix} 11.84 & 57.6\ \Omega \\ 1.44\ \text{S} & 17.6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix}$ (Ω)

تحلیل کامپیوتری

وصف شبکه‌های دو درگاه با پارامترهای **t** فرضی را برای تحلیل ساده مدارهای دو درگاه فراهم می‌سازد. مثلاً همان‌طور که در این بخش ملاحظه شد:

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

دیدیم که پارامترهای **t** توصیف‌گر شبکه متوالی را می‌توان با ضرب $\mathbf{t}_A$ و $\mathbf{t}_B$ به‌دست‌آورد:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{t}_B$$

چنین اعمال ماتریسی را با یک ماشین حساب یا یک بسته نرم‌افزاری مثل متلب می‌توان به راحتی انجام داد. مثلاً برنامه متلب چنین است:

```
EDU» tA = [1.2 6.8; 0.1 1.4];
EDU» tB = [1.2 13.6; 0.05 1.4];
EDU» t = tA*tB

t =

    1.7800    25.8400
    0.1900     3.3200
```

که در مثال ۱۰_۱۷ هم مشاهده کردیم.

هنگام کار با ماتریس‌ها در متلب، هر نام متغیر حساس به نوع حروف می‌باشد (در این‌جا $\mathbf{t}_A$، $\mathbf{t}_B$ و **t**) عناصر ماتریس‌ها به صورت سطری و با شروع سطر بالا آغاز می‌شوند. سطرها با علامت نقل قول از یکدیگر جدا می‌شوند. خواننده هنگام اجرای جبری ماتریسی باید متوجه باشد که همیشه ترتیب عملیات مهم است. مثلاً $\mathbf{t}_A{*}\mathbf{t}_B$ ماتریسی کاملاً متفاوت با آن‌چه دیدیم تولید می‌کند:

$$\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس‌های ساده‌ای که در این مثال دیدیم یک ماشین حساب عملی کفایت می‌نماید. با این وجود شبکه‌های متوالی بزرگ‌تر با کامپیوتر بهتر بررسی می‌شوند و نیز می‌توان همه آرایه‌ها را به‌طور همزمان روی صفحه‌نمایش ملاحظه کرد.

۷_۱۷ خلاصه فصل و مرور

- برای به‌کارگیری روش‌های تحلیل توصیف‌شده در این فصل، لازم است به‌خاطربسپاریم که هر درگاه فقط می‌تواند به یک شبکه یک پورت یا به یک درگاه از شبکه چنددرگاهی وصل شود.
- معادلات معرفی‌شده برای تحلیل یک شبکه دودرگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس **y** عبارتند:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \qquad \text{و} \qquad I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

که

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \qquad y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{V_1=0}$$

و

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \qquad y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{V_1=0}$$

- معادلات تعریف‌شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه برحسب پارامترهای امپدانس **z** عبارتند از:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad و \quad V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

- معادلات تعریف‌شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه برحسب پارامترهای **h** عبارتند از:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad و \quad I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

- معادلات تعریف‌شده برای تحلیل یک شبکه دودرگاه برحسب پارامترهای **t** عبارتند از:

$$V_1 = t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \quad و \quad I_1 = t_{21}V_2 - t_{22}I_2$$

- تبدیل پارامترهای **h**، **z**، **t** و **y** به یکدیگر بسیار ساده است و به نیازهای تحلیل مدار وابسته می‌باشد. تبدیلات در جدول ۱-۱۷ آورده شده است.

۸-۱۷ خواندنی‌های کمکی

Further details of matrix methods for circuit analysis can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Analysis of transistor circuits using network parameters is described in:

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

مسائل

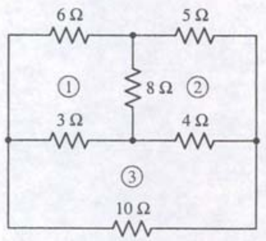
۱-۱۷ شبکه یک‌درگاهی

۱. مجموعه معادلات زیر را درنظربگیرید:

$$4I_1 - 8I_2 + 9I_3 = 12$$
$$5I_1 \qquad - 7I_3 = 4$$
$$7I_1 + 3I_2 + I_3 = 0$$

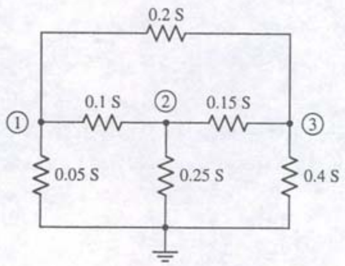
(الف) فرم ماتریسی این مجموعه معادلات را بنویسید. (ب) Δ_Z را محاسبه کنید. (ج) Δ_{11} را محاسبه کنید. (د) I_1 را محاسبه کنید. (و) I_3 را محاسبه کنید.

۲. Δ_Z را برای شبکه شکل ۱۷-۳۳ به‌دست‌آورید و سپس از آن در یافتن توان تولیدی به وسیله یک منبع 100 Vdc که در شاخه‌ای خارج از حلقه (الف) 1، (ب) 2 و (ج) 3 واقع است استفاده کنید.



شکل ۱۷-۳۳

۳. برای شبکه شکل ۱۷-۳۴، Δ_Y را پیدا کنید و سپس از آن در یافتن توان تولیدی به وسیله منبع 10A dc بین گره مرجع و گره (الف) 1، (ب) 2 و (ج) 3 را به‌دست‌آورید.



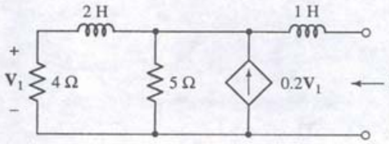
شکل ۱۷-۳۴

۴. ماتریس مقاومت یک شبکه تک‌درگاه در شکل ۱۷-۳۵ داده شده است. R_{in} را از دید منبعی که در حلقه 1 است به‌دست‌آورید.

$$[R] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \ (\Omega)$$

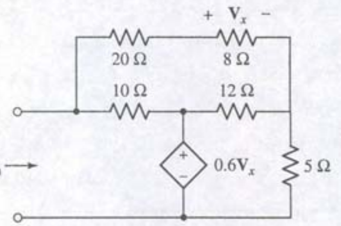
شکل ۱۷-۳۵

۵. امپدانس معادل تونن Z_{in} را برای مدار تک‌درگاه شکل ۱۷-۳۶ به‌دست‌آورید.



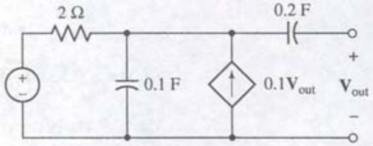
شکل ۱۷-۳۶

۶. برای مدار تک‌درگاه شکل ۱۷-۳۷ امپدانس Z_{in} را با (الف) یافتن Δ_Z (ب) یافتن Δ_Y و Y_{in} بیابید.



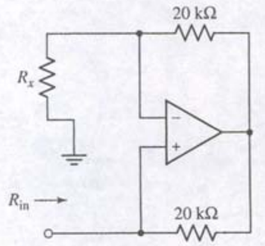
شکل ۱۷-۳۷

۷. امپدانس خروجی را برای شبکه شکل ۱۷-۳۸ به صورت تابعی از **s** پیدا کنید.



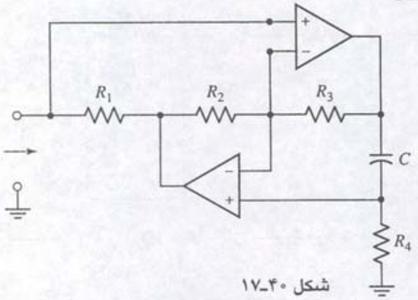
شکل ۱۷-۳۸

۸. اگر op amp شکل ۱۷-۳۹ ایده‌آل فرض شود ($R_i = \infty$، $R_o = 0$ و $A = \infty$) R_{in} را پیدا کنید.



شکل ۱۷-۳۹

۹. (الف) اگر هر دو op amp در مدار شکل ۱۷-۴۰ ایده‌آل باشند ($A = \infty$ و $R_o = 0$، $R_i = \infty$)، Z_{in} را پیدا کنید. (ب) $R_4 = 1k\Omega$، $R_3 = 10k\Omega$، $R_2 = 10k\Omega$، $R_1 = 4k\Omega$ و $C = 200pF$، نشان دهید که $Z_{in} = j\omega L_{in}$ که $L_{in} = 0.8mH$ است.



شکل ۱۷-۴۰

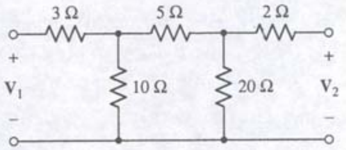
۲-۱۷ پارامترهای ادمیتانس

۱۰. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

(الف) I_2، اگر $y = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.3 \\ 0.3 & -0.02 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 9 \\ -3.5 \end{bmatrix}$ (V).

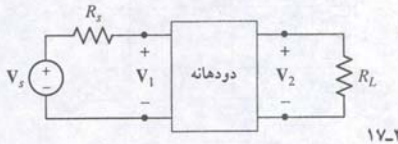
(ب) V_1، اگر $y = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.15 \\ 0.15 & 0.8 \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.02 \end{bmatrix}$ (A).

۱۱. برای شبکه دو درگاه شکل ۱۷-۴۱، y_{11} و y_{12} را بیابید.



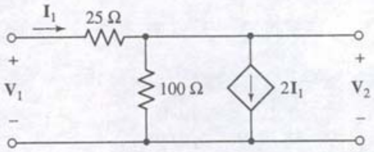
شکل ۱۷-۴۱

۱۲. اگر مدار دو درگاه در شکل ۱۷-۴۲ دارای مقادیر پارامتر $y_{11} = 10$، $y_{12} = -5$، $y_{21} = 50$ و $y_{22} = 20$ باشد. مطلوبست V_1 و V_2 اگر $V_s = 100V$، $R_s = 25\Omega$ و $R_L = 100\Omega$ باشد.



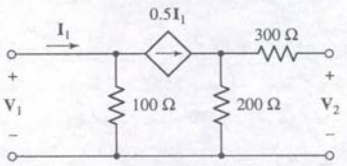
شکل ۱۷-۴۲

۱۳. چهار پارامتر شبکه شکل ۱۷-۴۳ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷-۴۳

۱۴. در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۴۴، $|y|$ را به‌دست‌آورید.

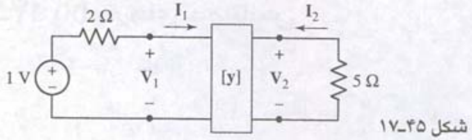


شکل ۱۷-۴۴

۱۵. در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۴۵، فرض کنید

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.0025 \\ -8 & 0.05 \end{bmatrix} \ (S)$$

باشد. (الف) مقادیر نسبت‌های V_2/V_1، I_2/I_1 و V_1/I_1 را به‌دست‌آورید. (ب) مقاومت 5Ω را حذف کنید. منبع 1V را برابر صفر نمایید و V_2/I_2 را بیابید.



شکل ۱۷-۴۵

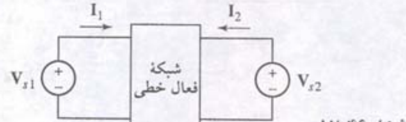
۱۶. پارامترهای ادمیتانس یک مدار دودرگاه مفروض برابر است با:

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 2 \end{bmatrix} \text{(mS)}$$

مطلوبست [y] جدید اگر مقاومت 100Ω به طریق زیر به مدار وصل شود. (الف) سری با یکی از سیم‌های ورودی و (ب) سری با یکی از سیم‌های خروجی.

۱۷. جدول موجود در شکل ۱۷-۴۶ را کامل کنید و برای پارامترهای **y** مقدار دهید.

	V_{s1} (V)	V_{s2} (V)	I_1 (A)	I_2 (A)
Exp't #1	100	50	5	−32.5
Exp't #2	50	100	−20	−5
Exp't #3	20	0		
Exp't #4			5	0
Exp't #5			5	15



شکل ۱۷-۴۶

۱۸. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

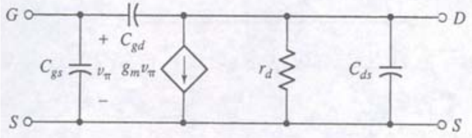
(الف) $\mathbf{I}_2$، اگر $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10^{-3} & j0.01 \\ j0.01 & -j0.005 \end{bmatrix}$ (S) و $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 12\underline{/43^\circ} \\ 2\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$ (V).

(ب) $\mathbf{I}_2$، اگر $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 120\underline{/30^\circ} \\ 88\underline{/45^\circ} \end{bmatrix}$ (A) و $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -j5 & 10 \\ 4 & j10 \end{bmatrix}$ (S).

۱۹. ترانزیستور نیمه هادی ـ اکسید فلز (MOSFET)، که یک عنصر سه پایانه است و در بسیاری از کاربردهای الکترونیک مورد استفاده است، اغلب برحسب پارامترهای هیبرید مشخص می‌شود. این پارامترهای ac اغلب به شرایط اندازه‌گیری وابسته است و با y_{is}، y_{rs}، y_{fs} و y_{os} مطابق زیر نام‌گذاری می‌شوند:

$$I_g = y_{is}V_{gs} + y_{rs}V_{ds} \quad (۴۹)$$
$$I_d = y_{fs}V_{gs} + y_{os}V_{ds} \quad (۵۰)$$

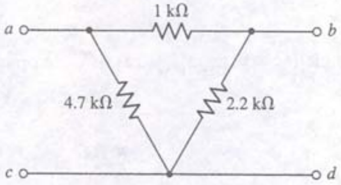
که I_g جریان گیت ترانزیستور، I_d جریان درین و سورس در حین اندازه‌گیری بین خروجی و ورودی مشترک است. بنابراین V_{gs} ولتاژ بین گیت و سورس و V_{ds} ولتاژ بین درین و سورس است. مدل فرکانس بالای به‌کاررفته در شکل ۱۷-۴۷ برای نمایش رفتار MOSFET آمده است. (الف) برای شکل مذکور کدام پایه به عنوان ورودی به‌کار رفته است و کدام یک خروجی است؟ (ب) عبارتی برای پارامترهای y_{is}، y_{rs}، y_{fs} و y_{os} تعریف‌شده در معادلات (۴۹) و (۵۰) به دست آورید که برحسب پارامترهای مدل C_{gs}، C_{gd}، g_m، r_d و C_{ds} شکل ۱۷-۴۷ باشد. (ج) y_{is}، y_{rs}، y_{fs} و y_{os} را محاسبه کنید اگر $g_m = 4.7$ mS، $C_{gs} = 3.4$ pF، $C_{gd} = 1.4$ pF، $C_{ds} = 0.4$ pF و $r_d = 10$ kΩ باشد.



شکل ۱۷-۴۷

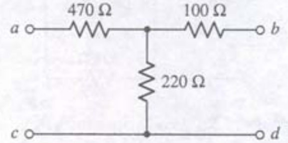
۱۷-۳ شبکه معادل

۲۰. شبکه Δ شکل ۱۷-۴۸ را به Y تبدیل کنید.



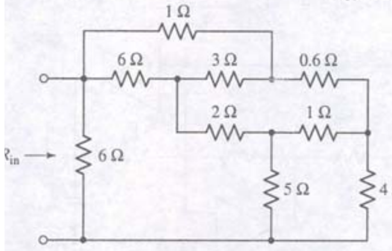
شکل ۱۷-۴۸

۲۱. شبکه Y شکل ۱۷-۴۹ را به Δ تبدیل کنید.



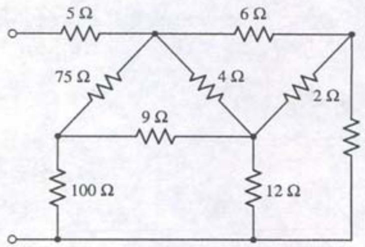
شکل ۱۷-۴۹

۲۲. R_{in} را در مدار تک‌درگاه شکل ۱۷-۵۰ با تبدیلات مناسبی از Y-Δ یا Δ-Y به‌دست‌آورید.



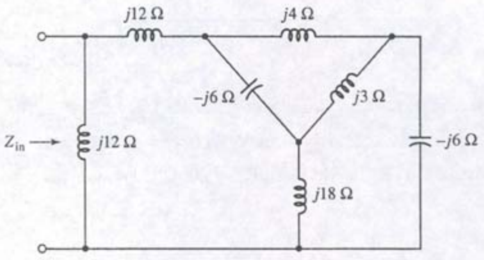
شکل ۱۷-۵۰

۲۳. تبدیلات Y-Δ و Δ-Y را برای یافتن مقاومت ورودی مدار تک‌درگاه شکل ۱۷-۵۱ به‌کاربرید.



شکل ۱۷-۵۱

۲۴. در شبکه شکل ۱۷-۵۲، $\mathbf{Z}_{in}$ را بیابید.

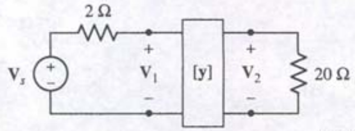


شکل ۱۷-۵۲

۲۵. اجازه بدهید در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۳

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.002 \\ -5 & 0.04 \end{bmatrix} \text{(S)}$$

باشد مطلوبست (الف) $\mathbf{G}_V$، (ب) $\mathbf{G}_I$، (ج) $\mathbf{G}_P$، (د) $\mathbf{Z}_{in}$ و (ه) $\mathbf{Z}_{out}$.

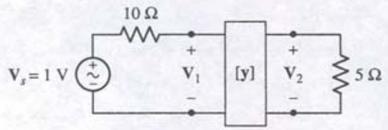


شکل ۱۷-۵۳

۲۶. اجازه بدهید در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۴،

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{(S)}$$

باشد. مطلوبست (الف) $\mathbf{G}_V$، (ب) $\mathbf{G}_I$، (ج) $\mathbf{G}_P$، (د) $\mathbf{Z}_{in}$ و (ه) $\mathbf{Z}_{out}$. (و) اگر بهره ولتاژ معکوس $\mathbf{G}_{V,rev}$ به صورت $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ با $\mathbf{V}_s = 0$ و حذف $\mathbf{R}_L$ تعریف شود $\mathbf{G}_{V,rev}$ را محاسبه کنید. (ز) اگر بهره توان تزریقی $\mathbf{G}_{ins}$ به صورت نسبت $\mathbf{P}_{5\Omega}$ در هنگام وجود دو درگاه به $\mathbf{P}_{5\Omega}$ هنگام نبودن دو درگاه و اتصال مستقیم پایانه‌های خروجی به پایانه‌های ورودی تعریف شود $\mathbf{G}_{ins}$ را بیابید.



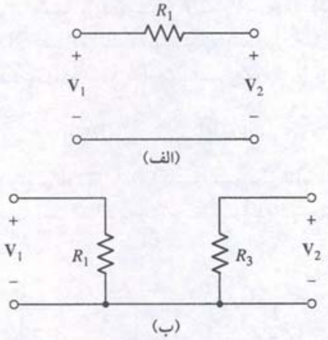
شکل ۱۷-۵۴

۲۷. یک مدار معادل شبیه مدار شکل ۱۷-۱۳ (ب) رسم کنید که برای آن

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{(mS)}$$

باشد. (ب) اگر دو عدد از این مدارهای دو درگاه به‌طور موازی وصل شوند، مدار معادل جدید را رسم کرده و نشان دهید که: $[\mathbf{y}]_{new} = 2[\mathbf{y}]$.

۲۸. (الف) $[\mathbf{y}]_a$ را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۵ (الف) پیداکنید. (ب) $[\mathbf{y}]_b$ را برای شکل ۱۷-۵۵ (ب) بیابید. (ج) شبکه را رسم کنید که از اتصال موازی این مدارهای دو درگاه حاصل شده است و نشان دهید که [y] برای این شبکه برابر $[\mathbf{y}]_a + [\mathbf{y}]_b$ است.



شکل ۱۷-۵۵

۱۷-۴ پارامترهای امپدانس

۲۹. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

(الف) $\mathbf{V}_1$، اگر $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4.7 & 2.2 \\ 2.2 & 3.3 \end{bmatrix}$ (kΩ) و $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -2.5 \end{bmatrix}$ (mA).

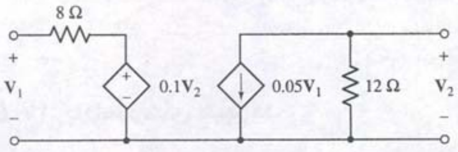
(ب) $\mathbf{I}_2$، اگر $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$ (kΩ) و $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (V).

۳۰. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

(الف) $\mathbf{V}_2$، اگر $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 5 & j \\ j & -j2 \end{bmatrix}$ (Ω) و $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2\underline{/20^\circ} \\ 2\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$ (A).

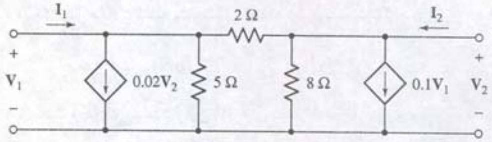
(ب) $\mathbf{I}_1$، اگر $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -j & 2 \\ 4 & j4 \end{bmatrix}$ (Ω) و $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 137\underline{/30^\circ} \\ 105\underline{/45^\circ} \end{bmatrix}$ (V).

۳۱. [z] را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۶ به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷-۵۶

۳۲. (الف) برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۷، [z] را بیابید. (ب) اگر $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = 1$A باشد، بهره ولتاژ $\mathbf{G}_V$ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷_۵۷

۳۳. یک مدار دو درگاه خاص با

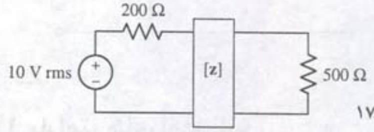
$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} (\Omega)$$

توصیف شده است. ورودی متشکل از یک $\mathbf{V}_s$ سری با 5Ω است، ضمن این‌که $R_L = 2\Omega$ می‌باشد. مطلوبست متوسط توان حمل‌شده به (الف) $\mathbf{G}_I$، (ب) $\mathbf{G}_V$، (ج) $\mathbf{G}_P$، (د) $\mathbf{Z}_{in}$ و (ه) $\mathbf{Z}_{out}$.

۳۴. فرض کنید

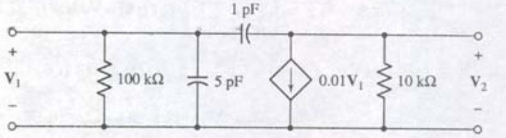
$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 1000 & 100 \\ -2000 & 400 \end{bmatrix} (\Omega)$$

را در مدار دو درگاه شکل ۱۷_۵۸ داشته باشیم. توان متوسط حمل‌شده به (الف) مقاومت 200Ω، (ب) مقاومت 500Ω و (ج) دو درگاه را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷_۵۸

۳۵. پارامترهای z را در $\omega = 10^8$ rad/s برای مدار معادل ترانزیستوری فرکانس بالا در شکل ۱۷_۵۹ به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷_۵۹

۳۶. یک مدار دو درگاه که در آن

$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}$$

است به وسیله منبع $\mathbf{V}_s = 100\underline{/0^\circ}$ V سری با مقاومت 5Ω و متصل به یک مقاومت 25Ω، راه‌اندازی شده است. مدار معادل تونن از دید مقاومت 25Ω چقدر است؟

۱۷_۵ پارامترهای هیبرید

۳۷. پارامترهای h یک مدار دودرگاهی عبارتند:

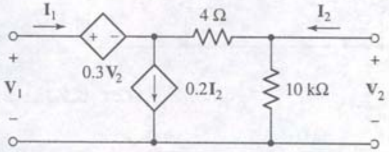
$$[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} 9\,\Omega & -2 \\ 20 & 0.2\,\text{S} \end{bmatrix}$$

اگر یک مقاومت 1Ω با (الف) ورودی، (ب) خروجی سری شود پارامترهای جدید h را پیدا کنید.

۳۸. $\mathbf{Z}_{in}$ و $\mathbf{Z}_{out}$ را برای مدار دو درگاهی که به منبعی با $R_s = 100\Omega$ و مصرفی با $R_L = 500\Omega$ وصل است، به‌دست‌آورید. به‌شرطی‌که

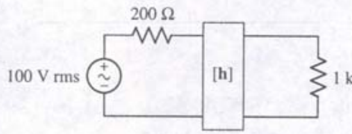
$$[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} 100\,\Omega & 0.01 \\ 20 & 1\text{ mS} \end{bmatrix}$$

۳۹. با مراجعه به مدار دو درگاه شکل ۱۷_۶۰، مطلوبست (الف) $\mathbf{h}_{12}$، (ب) $\mathbf{z}_{12}$ و (ج) $\mathbf{y}_{12}$.



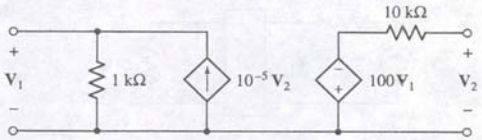
شکل ۱۷_۶۰

۴۰. برای مدار دو درگاه شکل ۱۷_۶۱ فرض کنید، $\mathbf{h}_{11} = 1\text{k}\Omega$، $\mathbf{h}_{12} = -1$، $\mathbf{h}_{21} = 4$ و $\mathbf{h}_{22} = 500\mu S$ باشد. متوسط توان حمل‌شده به (الف) $R_s = 200\Omega$، (ب) $R_L = 1k\Omega$ و (ج) تمام مدار دو درگاه را به‌دست‌آورید.



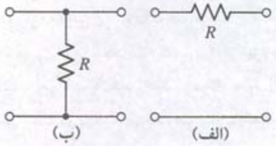
شکل ۱۷_۶۱

۴۱. (الف) مطلوبست [h] برای مدار دو درگاه شکل ۱۷_۶۲ (ب) $\mathbf{Z}_{out}$ را بیابید به‌شرطی‌که ورودی شامل $\mathbf{V}_s$ سری با $R_s = 200\Omega$ باشد.



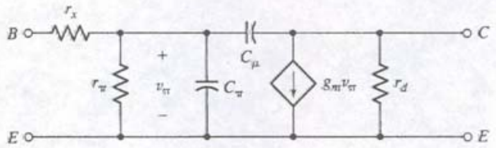
شکل ۱۷_۶۲

۴۲. برای هر دو مدار دو درگاه شکل ۱۷_۶۳، [y]، [z] و [h] را بیابید. اگر پارامتری بی‌نهایت است از مجموعه آن پارامتر بگذرید.



شکل ۱۷_۶۳

۴۳. شکل ۱۷_۶۴ یک مدل ترانزیستور دو قطبی (bjt) را نشان می‌دهد که برای سیگنال‌های کوچک معتبر است. اگر پایانه امیتر (E) برای ورودی و خروجی مشترک باشد و بیس (B) به عنوان ورودی فرض شود عبارتی برحسب r_x، r_π، C_π، C_μ، g_m، r_d برای (الف) h_{oe}، (ب) h_{fe}، (ج) h_{ie} و (د) h_{re}.



شکل ۱۷_۶۴

۱۷_۶ پارامترهای انتقال

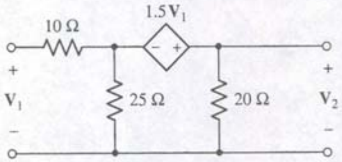
۴۴. با فرض

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

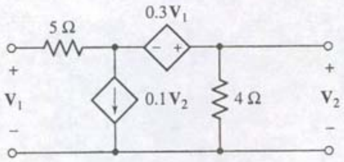
مطلوبست (الف) [y][b]، (ب) [b][y]، (ج) [b][c]، (د) [c][d] و (ه) [y][b][c][d].

۴۵. (الف) t را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷_۶۵ به‌دست‌آورید. (ب) $\mathbf{Z}_{out}$ را برای این مدار محاسبه کنید به‌شرط این‌که مقاومت منبع $R_s = 15\Omega$ باشد.



شکل ۱۷_۶۵

۴۶. [t] را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷_۶۶ به‌دست‌آورید.



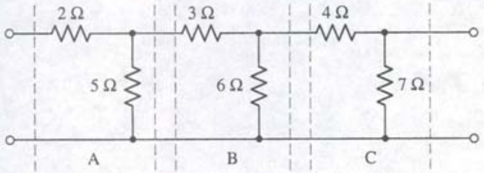
شکل ۱۷_۶۶

۴۷. (الف) $[\mathbf{t}]_A$، $[\mathbf{t}]_B$ و $[\mathbf{t}]_C$ را برای مدار دو درگاه متوالی شکل ۱۷_۶۷ پیدا کنید. (ب) [t] را برای مدار دودرگاه شش مقاومتی بیابید.

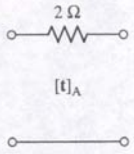
۴۸. (الف) $[\mathbf{t}]_A$ را برای مقاومت 2Ω شکل ۱۷_۶۸ به‌دست‌آورید. (ب) نشان دهید که [t] برای یک مقاومت 10Ω با رابطه زیر به‌دست‌می‌آید $([\mathbf{t}]_A)^5$.

۴۹. (الف) مطلوبست $[\mathbf{t}]_a$، $[\mathbf{t}]_b$ و $[\mathbf{t}]_c$ برای شبکه شکل ۱۷_۶۹ (الف)، (ب) و (ج). (ب) با استفاده از قوانین اتصال درونی متوالی مدارهای دو درگاه، [t] را برای شبکه شکل ۱۷_۶۹ (د) به‌دست‌آورید.

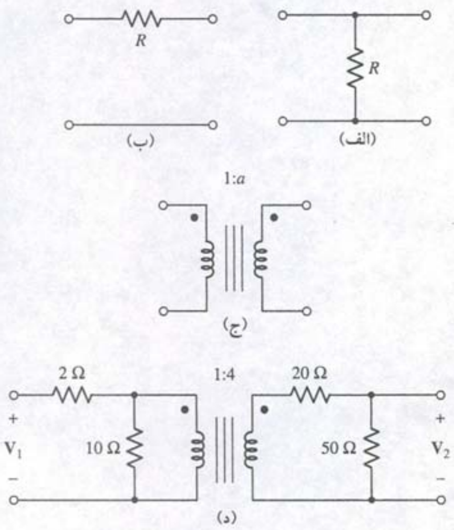
۵۰. (الف) [t] را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷_۷۰ پیدا کنید. از تکنیک‌های اتصال متوالی مدارهای دو درگاه استفاده کرده و $[\mathbf{t}]_{new}$ را بیابید به‌شرطی‌که مقاومت 20Ω در دو سر ورودی وصل باشد.



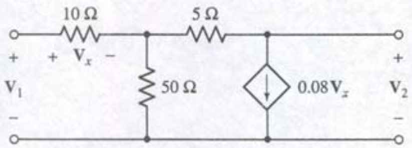
شکل ۱۷_۶۷



شکل ۱۷_۶۸



شکل ۱۷_۶۹



شکل ۱۷_۷۰

فصل هجدهم

تحلیل فوریه مدار

مفاهیم کلیدی

- نمایش توابع پریودیک به صورت مجموع سینوس‌ها و کسینوس‌ها
- فرکانس‌های هارمونیک
- تقارن زوج و فرد
- تقارن نیم‌موج
- فرم مختلط سری فوریه
- طیف خطوط منقطع
- تبدیل فوریه
- استفاده از سری فوریه و تبدیل فوریه در تحلیل مدار
- پاسخ سیستم و کانولوشن در حوزه فرکانس

مقدمه

ر این فصل به معرفی تحلیل مدار با مطالعه توابع تناوبی یا پریودیک در هر دو حوزه زمان و رکانس می‌پردازیم. خصوصاً توابع تحریک متناوبی که ماهیت عملیاتی دارند و شرایط ریاضی خاصی را برآورده می‌سازند و ما می‌توانیم آن‌ها را در آزمایشگاه تولید کنیم، وردبحث قرار خواهند گرفت. چنین توابعی می‌توانند از جمع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی که با هم هماهنگی دارند، تشکیل شوند. بنابراین چون پاسخ واداشته به هر مؤلفه سینوسی به سادگی از تحلیل حالت ماندگار تعیین می‌شود، پاسخ شبکه خطی به تابع تحریک تناوبی کلی می‌تواند از تجمیع پاسخ‌های جزئی به دست آید.

عنوان سری فوریه در زمینه‌های متعددی از جمله مخابرات اهمیتی خاص دارد. استفاده از کنیک‌های مبتنی‌بر سری فوریه در کمک به تحلیل مدار سال‌ها بود که از رده خارج شده بود، لی اکنون با تجهیزاتی مواجه هستیم که در آن‌ها از منابع تغذیه مدوله شده پالسی استفاده ی‌شود (مثل کامپیوتر). موضوع هارمونیک‌ها در سیستم‌های قدرت و الکترونیک قدرت و حتی نیروگاه‌های بزرگ به سرعت تبدیل به یک مسئله حاد شده است. این مشکلات و حل ن‌ها تنها به کمک تحلیل مبتنی‌بر سری فوریه امکان‌پذیر است.

۱۸-۱ فرم مثلثاتی سری فوریه

ی‌دانیم که پاسخ کامل یک مدار خطی به یک تابع تحریک اختیاری متشکل از مجموع پاسخ اداشته و پاسخ طبیعی است. پاسخ طبیعی قبلاً در فصل‌های ۷ تا ۹ ملاحظه شد، ولی با چند ستثناء فقط مدارهای ساده سری یا موازی RL، RC و RLC بررسی شدند. پس از آن در صل‌های ۱۴ و ۱۵ مفهوم فرکانس مختلط روشی کلی را در یافتن پاسخ طبیعی پیش رو گذاشت. دیدیم که پس از استقرار قطب‌های یک تابع تبدیل شبکه، می‌توان فرم پاسخ طبیعی را وشت و به این ترتیب روشی قوی و کلی را برای تعیین پاسخ طبیعی ملاحظه کردیم.

هارمونیک‌ها

عتبار نمایش تابع پریودیک حاصل از مجموع بینهایت تابع سینوسی یا کسینوسی را با مثالی ساده می‌توان حس کرد. اجازه دهید ابتدا یک تابع کسینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω_0 را ملاحظه کنیم:

$$v_1(t) = 2\cos\omega_0 t$$

ه در آن

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

پریود T برابر است با:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

گرچه T معمولاً زیرنویس صفر ندارد، ولی پریود فرکانس اصلی است. هارمونیک‌های این تابع سینوسی فرکانس‌های $n\omega_0$ دارند که در آن ω_0 فرکانس اصلی و $n = 1, 2, 3, \ldots$ است. فرکانس اولین هارمونیک، همان فرکانس اصلی می‌باشد.

اکنون بیایید ولتاژ هارمونیک سوم را بیابیم:

$$v_{3a}(t) = \cos 3\,\omega_0 t$$

تابع اصلی $v_1(t)$ و سومین هارمونیک $v_{3a}(t)$ و مجموع این دو موج به صورت توابع زمانی در شکل ۱-۱۸(الف) نشان داده شده است. باید توجه داشت که حاصل جمع نیز تناوبی است و پریود آن $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد.

با تغییر دامنه و فاز هارمونیک سوم، تابع پریودیک حاصل تغییر می‌نماید. بنابراین شکل ۱-۱۸ (ب) اثر ترکیب $v_1(t)$ را با هارمونیک سومی که در آن دامنه حاصل کمی بزرگتر است، نشان می‌دهد:

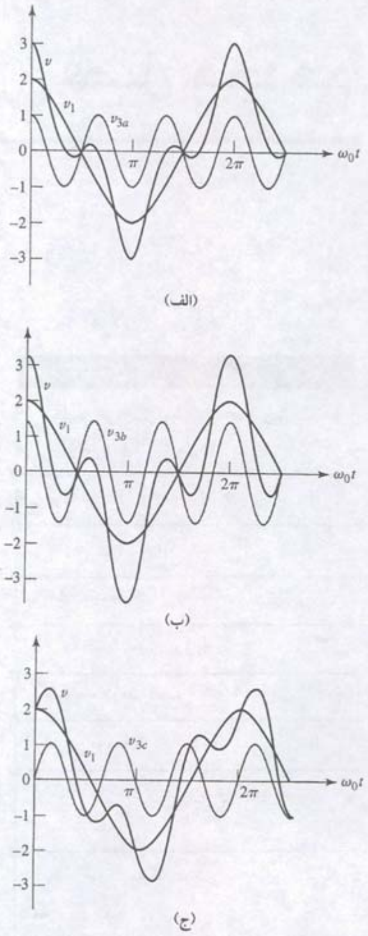
$$v_{3b}(t) = 1.5\cos 3\,\omega_0 t$$

با جابه‌جایی فاز هارمونیک سوم به صورت زیر:

$$v_{3c}(t) = \sin 3\,\omega_0 t$$

مجموع که در شکل ۱-۱۸(ج) دیده می‌شود، شکل متفاوتی دارد. در همه حالات، تناوب یا پریود موج برابر با پریود موج اصلی است. ماهیت موج به دامنه و فاز هارمونیک وابسته است و خواهیم دید که می‌توان امواجی را تولید کرد که مشخصه کاملاً غیرسینوسی را با ترکیب توابع سینوسی دارا هستند.

پس از آشنایی با کاربرد مجموع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی در نمایش پریودیک امواج، اکنون به نمایش حوزه فرکانس یک موج نامتناوب کلی به روشی مشابه تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.



شکل ۱-۱۸ چند شکل موج مختلف از بی‌نهایت موج موجود که می‌توان از ترکیب یک موج اصلی و هارمونیک سوم به‌دست‌آورد. موج اصلی $v_1 = 2\cos\omega_0 t$ است و هارمونیک سوم برابر است با (الف) $v_{3a} = \cos 3\omega_0 t$، (ب) $v_{3b} = 1.5\cos 3\omega_0 t$ و (ج) $v_{3c} = \sin 3\omega_0 t$.

تمرین

۱-۱۸ اجازه دهید هارمونیک سوم ولتاژی به هارمونیک اصلی به صورت $v = 2\cos\omega_0 t + V_{m3}\sin 3\omega_0 t$ اضافه شود. موج حاصل در شکل ۱-۱۸(ج) به ازای $V_{m3} = 1$ نشان داده شده است. (الف) مقدار V_{m3} را طوری به دست آورید که $v(t)$ در $\omega_0 t = 2\pi/3$ دارای شیب صفر باشد. (ب) $v(t)$ را در $\omega_0 t = 2\pi/3$ به دست آورید.

جواب: 0.577 و 1.000- .

سری فوریه

ابتدا تابع پریودیک f(t) را که در بخش ۲-۱۱ ملاحظه کردیم با رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(t) = f(t + T)$$

که در آن T دوره تناوب یا پریود است. به‌علاوه فرض می‌کنیم که f(t) شرایط زیر را برآورده می‌سازد.

۱. f(t) در هر جایی تک‌مقداری است، یعنی تعریف ریاضی یک تابع را برآورده می‌کند.

۲. انتگرال $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt$ در ازای هر t_0 وجود دارد (یعنی بینهایت نیست).

۳. تعداد گسستگی‌های f(t) در یک دوره تناوب معین است.

۴. f(t) دارای تعداد معینی ماکزیمم و مینیمم در یک پریود است.

f(t) را یک جریان یا ولتاژ فرض می‌کنیم. هر ولتاژ یا جریانی که عملاً تولید شود، این شرایط را تصدیق می‌کند. البته می‌توان توابعی ریاضی نوشت که شرایط را تأیید نکنند، ولی فرض بر این است که این چهار شرط همیشه برقرار باشد.

با فرض داشتن تابع پریود یک f(t)، قضیه فوریه بیان می‌کند که می‌توان f(t) را با یک سری نامحدود نشان داد:

$$f(t) = a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots$$
$$+ b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t + \cdots \qquad (۱)$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t)$$

که فرکانس اصلی با رابطه زیر به پریود T مرتبط است:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

که a_0، a_n و b_n ثابت‌های وابسته به n و f(t) می‌باشند. معادله (۱) فرم مثلثاتی سری فوریه f(t) است و روند تعیین مقادیر ثابت a_0، a_n و b_n را **تحلیل فوریه** می‌نامند. هدف ما اثبات این قضیه نیست بلکه ایجاد روش‌های تحلیل فوریه و ایجاد قضیه‌ای معقول است.

چند انتگرال مثلثاتی مفید

قبل از محاسبه ثابت‌های سری فوریه اجازه دهید چند انتگرال مفید را سرجمع کنیم. بگذارید تا n و k هر عنصر از مجموعه اعداد صحیح باشند. در انتگرال‌های زیر، حدود انتگرال 0 و T فرض شده‌اند و فواصل پریود همواره یکسان است. متوسط یک موج سینوسی در یک پریود صفر است.

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t\,dt = 0 \qquad (۲)$$

و

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t\,dt = 0 \qquad (۳)$$

همچنین به سادگی می‌توان نشان داد که انتگرال‌های زیر صفرند.

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t\cos n\omega_0 t\,dt = 0 \qquad (۴)$$

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t\sin n\omega_0 t\,dt = 0 \quad (k \neq n) \qquad (۵)$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t\cos n\omega_0 t\,dt = 0 \quad (k \neq n) \qquad (۶)$$

حالاتی که از معادلات (۵) و (۶) انتظار داریم، هم به سادگی محاسبه می‌شوند، داریم:

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\,dt = \frac{T}{2} \qquad (۷)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t\,dt = \frac{T}{2} \qquad (۸)$$

محاسبه ضرایب سری فوریه

کنون محاسبه ثابت‌های مجهول در سری فوریه به سادگی انجام می‌شود. ابتدا a_0 را به دست ی‌آوریم. اگر از هر دو طرف معادله (۱) در یک دوره تناوب انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T a_0\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t)\,dt$$

لی هر جمله در جمع فوق به صورت معادلات (۲) و (۳) است. پس:

$$\int_0^T f(t)\,dt = a_0 T$$

ا

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad (۹)$$

این ثابت a_0 درواقع مقدار متوسط $f(t)$ در یک دوره تناوب است و بنابراین ما آن را به‌عنوان مؤلفه dc تابع $f(t)$ می‌شناسیم.

برای محاسبه ضرایب کسینوسی، مثل a_k یعنی ضریب $\cos k\omega t$، ابتدا هر سمت معادله (۱) را در $\cos k\omega t$ ضرب و سپس از طرفین معادله در یک پریود کامل انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k\omega_0 t \sin n\omega_0 t\,dt$$

از معادلات (۳)، (۴) و (۶) دیده می‌شود که هر جمله در سمت راست این معادله به جز جمله a_n که در آن $n = k$ است، صفر می‌باشد. ما این جمله را بـا استفاده از مـعادله (۸) محاسبه می‌کنیم و پس از انجام آن درمی‌یابیم که a_n یا a_k برابر است با:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \qquad (۱۰)$$

این نتیجه دو برابر مقدار متوسط حاصل‌ضرب $f(t)\cos \omega_0 t$ در یک پریود است.

به روشی مشابه، ما b_k را با ضرب در $\sin k\omega_0 t$ و گرفتن انتگرال حول یک پریود و این که همه جملات به جز یکی صفرند و اجرای تک انتگرال به وسیله معادله (۷) به دست می‌آوریم. نتیجه چنین است:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \qquad (۱۱)$$

که دو برابر مقدار متوسط $f(t)\sin n\omega_0 t$ در یک دوره تناوب می‌باشد.

اکنون به کمک معادلات (۹) تا (۱۱) می‌توان مقادیر a_0 و همه a_n و b_n را در سری فوریه معادله (۱) به دست آوریم.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad (۱)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

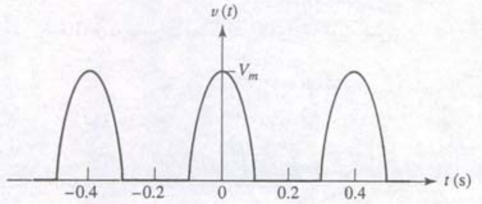
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad (۹)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \qquad (۱۰)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \qquad (۱۱)$$

مثال ۱ـ۱۸

شکل موج نیم سینوسی شکل ۲-۱۸ یک پاسخ ولتاژ حاصل از یک مدار یکسوساز نیم موج غیرخطی است که هدف از آن تبدیل ولتاژ ورودی سینوسی به یک ولتاژ خروجی dc است. سری فوریه مربوط به این موج را نشان دهید.



شکل ۲ـ۱۸ خروجی یک یکسوساز نیم‌موج که به ورودی آن موج سینوسی اعمال شده است.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

ما با تابع پریودیکی مواجهیم که بخشی از آن یک موج سینوسی است و از ما خواسته شده است تا سری فوریه آن را پیدا کنیم. اگر همه ولتاژهای منفی حذف نشده بود، مسئله بسیار پیش پا افتاده می‌شد و تنها یک موج سینوسی لازم بود.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

برای این که این تابع را به صورت سری فوریه درآوریم، ابتدا باید تناوب را معین کنیم و سپس ولتاژ گرافیکی را به صورت یک تابع تحلیلی از زمان بیان نماییم، از روی گراف، پریود برابر است با:

$$T = 0.4\ \text{s}$$

و بنابراین

$$f_0 = 2.5\ \text{Hz}$$

و

$$\omega_0 = 5\pi\ \text{rad/s}$$

- **ارائه طرح.**

سرراست‌ترین روش استفاده از معادلات ۹ تا ۱۱ برای محاسبه مجموعه ضرایب a_0، a_n و b_n می‌باشد. برای انجام آن، تابعی برای $v(t)$ لازم داریم، که سرراست‌ترین آن در فاصله $t = 0$ تا $t = 0.4$ تعریف می‌شود:

$$V(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \le t \le 0.1 \\ 0 & 0.1 \le t \le 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \le t \le 0.4 \end{cases}$$

با این وجود، انتخاب پریود از $t = -0.1$ تا $t = 0.3$ معادلات کمتر و درنتیجه انتگرال کمتری نیاز دارد:

$$V(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \le t \le 0.1 \\ 0 & 0.1 \le t \le 0.3 \end{cases} \qquad (۱۲)$$

گرچه هر یک از دو فرم نمایش، پاسخ صحیحی را به دست می‌دهد ولی نمایش اخیر تابع ترجیح داده می‌شود.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

مؤلفه فرکانس صفر به سادگی به دست می‌آید.

$$a_0 = \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.3} v(t)\,dt = \frac{1}{0.4}\left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t\,dt + \int_{0.1}^{0.3} (0)\,dt\right]$$

توجه کنید انتگرال‌گیری باید بـه چـند بـخش در طول یک پریود تقسیم شود، که در هر یک از آن‌ها فرم تابعی $v(t)$ معلوم است.

دامنه موج کسینوس کلی برابر است:

$$a_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t\,dt$$

و دامنه موج سینوسی کلی برابر است با:

$$b_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \sin 5\pi n t\,dt$$

که در واقع همیشه صفر است و از اینرو در اینجا بیشتر مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

وقتی که n برابر واحد باشد، فرم تابعی که پس از انتگرال‌گیری بـه دست مـی‌آید، بـا بـقیه مقادیر انتخابی n تفاوت دارد. اگر $n = 1$ باشد:

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t \, dt = \frac{V_m}{2} \qquad (۱۳)$$

در صورتی که اگر n برابر واحد نباشد، داریم:

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi n t \, dt$$

■ اقدام به حل.

پس از حل داریم:

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi}$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2}[\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t]\, dt \qquad (۱۴)$$

یا

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi} \frac{\cos(\pi n/2)}{1 - n^2} \qquad (n \neq 1) \qquad (۱۵)$$

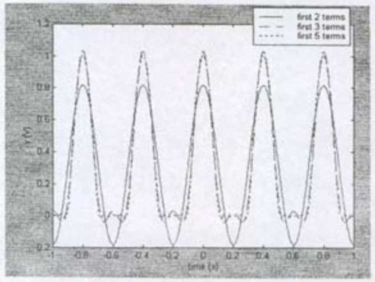
انتگرال‌گیری مشابهی نشان می‌دهد که برای هر مقدار n، $b_n = 0$ است و به این ترتیب سری فوریه فاقد جملات سینوسی می‌باشد. پس سری فوریه حاصل از معادلات (۱)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) برابر است با:

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi} \cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi} \cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \dots \qquad (۱۶)$$

■ صحت حل را تصدیق کنید. آیا منطقی است؟

حل را می‌توان با اعمال مقدار در معادله (۱۶) و تکرار آن به دفعات، چک کرد. با این وجود روش دیگر ترسیم آن برای $n = 1, 2, 4$ طبق شکل ۳-۱۸ است. می‌توان دید هر چقدر جملات در تابع بیشتر باشد، منحنی به شکل ۲-۱۸ نزدیک‌تر است.

باید یادآوری کنیم که در اینجا تصادفاً عبارت a_n به ازای $n \neq 1$، در حد $n \to 1$ جملهٔ درست a_1 را به‌دست‌می‌آورد.



شکل ۱۸-۳ معادلهٔ (۱۶) با درنظرگرفتن $n = 1$، $n = 2$ و $n = 6$ جملهٔ اول. برای سادگی فرض کرده‌ایم $V_m = 1$.

تمرین

۱۸-۲ موج تناوب f(t) به صورت زیر تعریف شده است: $f(t) = -4$ در $0 < t < 0.3$، $f(t) = 6$ در $0.3 < t < 0.4$، $f(t) = 0$ در $0.4 < t < 0.5$ و $T = 0.5$. مطلوب است (الف) a_0، (ب) a_3، (ج) b_1.

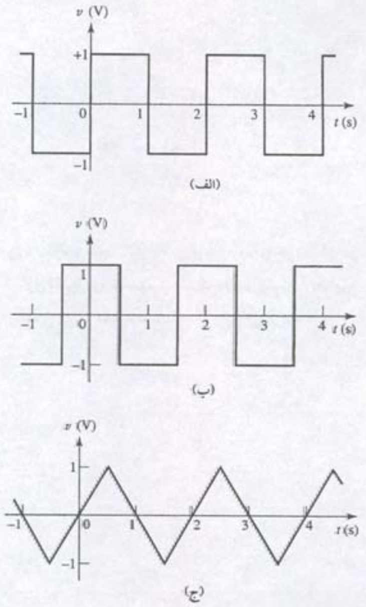
۱۸-۳ سری فوریه را برای سه موج ولتاژ شکل ۴-۱۸ بنویسید.

جواب ۱۸-۲: ‎-1.200، 1.383 و ‎-4.44.

جواب ۱۸-۳: $(4/\pi)(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots)$ V

$(4/\pi)(\cos \pi t - \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t - \dots)$ V

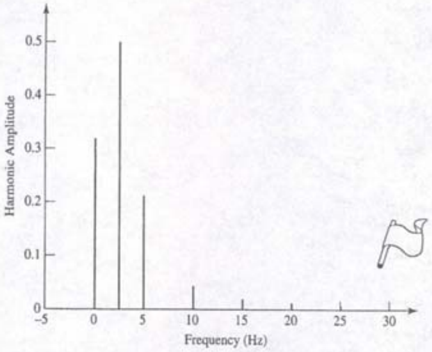
$(8/\pi^2)(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \dots)$ V



شکل ۱۸-۴

طیف خطی و فاز

در شکل ۲-۱۸، $v(t)$ از مثال ۱-۱۸ را به صورت گرافیکی و به فرم تابعی از زمان نشان داده شد. در معادله (۱۲)، $v(t)$ به شکل تابعی تحلیلی از زمان بیان گشت که هر یک از نمایش‌ها را می‌توان در حوزه زمان تصور کرد. معادله (۱۶) یعنی نمایش سری فوریه $v(t)$، نیز در حوزه زمان بیان شده است، ولی به راحتی می‌تواند در حوزه فرکانس هم نمایش داده شود. مثلاً شکل ۵-۱۸ دامنه هر مولفه $v(t)$ را که به آن طیف خطی می‌گویند، نشان می‌دهد. در این‌جا اندازه هر مولفه فرکانس (یعنی $|a_0|$، $|a_1|$ و غیره) با طول خطی عمودی در فرکانس مربوطه (f_0، f_1 و غیره) مشخص می‌شود. به خاطر سادگی $V_m = 1$ فرض می‌شود. اگر مقداری متفاوت برای V_m موجود باشد، تنها تغییر محور y با مقدار جدید لازم است.



شکل ۱۸-۵

چنین نموداری که گاهی طیف گسسته خوانده می‌شود، با یک نگاه سریع اطلاعات زیادی را در اختیار می‌گذارد. خصوصاً می‌توان دید که چند جمله از سری برای داشتن تقریبی منطقی از موج اصلی لازم است. در طیف خطی شکل ۵-۱۸ هارمونیک‌های هشتم و دهم تنها اصلاح کوچکی را فراهم می‌کنند (به ترتیب فرکانس‌های 20 و 25 هرتز). با حذف هارمونیک‌های بعد از ششم تقریبی مناسب دارد. خواننده می‌تواند با مشاهده شکل ۳-۱۸ در این امر قضاوت کند.

به یک نکته باید توجه کرد. در مثالی که ملاحظه کردیم، جملات سینوسی وجود نداشته و لذا دامنه هارمونیک nام برابر $|a_n|$ بود. اگر b_n برابر صفر نباشد، آن‌گاه دامنه مؤلفه در فرکانس $n\omega_0$ باید $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ باشد. این یک کمیت کلی است که باید در طیف خطی آن را نشان دهیم. هنگامی که راجع به فرم مختلط سری فوریه صحبت می‌کنیم، خواهیم دید که این دامنه خیلی سرراست‌تر به دست می‌آید.

علاوه‌بر طیف دامنه، **طیف فاز** گسسته را نیز ایجاد می‌نماییم. در هر فرکانس $n\omega_0$، جملات سینوس و کسینوس را با یکدیگر ترکیب می‌کنیم تا زاویه فاز ϕ_n به دست آید.

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

یا

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}$$

در معادله (۱۶) در ازای هر n، $\phi = 0$ یا 180° است.

سری فوریه حاصل برای این مثال، جملات سینوسی هارمونیک‌های فرد را در میان جملات کسینوسی به جز هارمونیک اصلی نداشت. غیاب بعضی جملات را می‌توان در سری فوریه انتظار داشت. این موضوع با بررسی تقارن تابع زمانی موجود قبل از انتگرال‌گیری قابل پیش‌بینی است. ما استفاده از تقارن را در بخش زیر دنبال می‌کنیم.

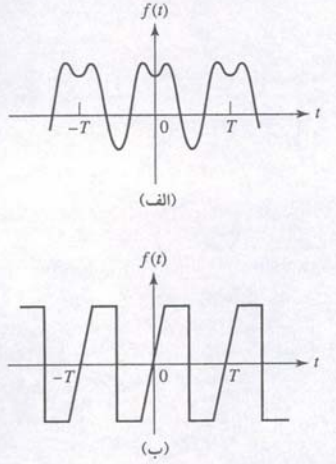
۱۸-۲ استفاده از تقارن

تقارن زوج و فرد

دو نوع تقارن که ما به راحتی می‌توانیم آن‌ها را تشخیص دهیم، تقارن تابع زوج و تقارن تابع فرد و یا ساده‌تر بگوییم، تقارن زوج و تقارن فرد است. گوییم تابع f(t) دارای خاصیت تقارن زوج است اگر

$$f(t) = f(-t) \qquad (۱۷)$$

توابعی چون t^2، $\cos 3t$، $\text{Ln}(\cos t)$، $\sin^2 7t$ و ثابت C همگی خاصیت تقارن زوج دارند. جایگزینی t با (-t) مقدار هیچ یک از این توابع را عوض نمی‌کند. این تقارن را می‌توان به صورت گرافیکی نیز تشخیص داد. اگر $f(t) = f(-t)$ باشد، آن‌گاه تقارن تصویری حول محور f(t) وجود دارد. تابع شکل ۶-۱۸(الف) تقارن زوج دارد. اگر شکل حول محور f(t) تا شود، آن‌گاه بخش‌های مثبت و منفی تابع دقیقاً روی هم منطبق می‌شوند.



شکل ۱۸-۶ (الف) موجی با تقارن زوج. (ب) موجی با تقارن فرد.

تابع فرد را چنین تعریف می‌کنیم که اگر در تابع، f(t) تقارن فرد وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$f(t) = -f(-t) \qquad (۱۸)$$

به بیان دیگر اگر t با (-t) جایگزین شود، آن‌گاه منفی تابع حاصل می‌گردد. مثلاً t، $\sin t$، $t \cos 70t$، $t\sqrt{1+t^2}$ و تابع ترسیم شده در شکل ۶-۱۸(ب) همگی تقارن فرد دارند.

مشخصات گرافیکی تابع فرد آشکار است. اگر بخشی از f(t) را برای $T > 0$ حول محور مثبت t بچرخانیم و شکل حاصل حول محور f(t) بچرخد، دو نمودار بر هم منطبق خواهد شد و درواقع یکی بر روی دیگری قرار می‌گیرد. به بیان دیگر تقارن را نسبت به مبدأ داریم و نه همچون تابع زوج حول محور f(t) .

با تعریف تقارن زوج و فرد، باید توجه کرد که ضرب دو تابع با تقارن زوج یا دو تابع با تقارن فرد، به یک تابع زوج منجر می‌گردد. به‌علاوه، ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، یک تقارن فرد را به دنبال دارد.

تقارن و جملات سری فوریه

اکنون بیایید تأثیر تقارن را در یک سری فوریه تحقیق کنیم. اگر عبارتی را درنظربگیریم که یک تابع زوج f(t) و مجموع بینهایت جمله سینوسی و کسینوسی را برابر قرار دهد، آنگاه واضح است که مجموع نیز باید تابع زوجی باشد. در هر صورت سینوس یک تابع فرد است و هیچ جمعی از سینوس‌ها نمی‌تواند یک تابع زوجی به جز صفر تولید نماید (صفر هم زوج و هم فرد است). بنابراین چنین باید انتظار داشت که سری فوریه هر تابع زوج فقط از یک ثابت و توابع کسینوسی تشکیل می‌گردد. بیایید اکنون به دقت نشان دهیم که $b_n = 0$ است. داریم:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right]$$

حال بگذارید متغیر t را در اولین انتگرال به $-\tau$ یا $t = -\tau$ تبدیل کنیم و از $f(t) = f(-t) = f(\tau)$ استفاده نماییم:

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(-\tau)\sin(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{T/2} f(\tau)\sin n\omega_0\tau\,d\tau + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right]$$

اما تغییر نماد برای شناسایی متغیر انتگرال نمی‌تواند مقدار انتگرال را تغییر دهد.

$$\int_{0}^{T/2} f(\tau)\sin n\omega_0\tau\,d\tau = \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

و

(۱۹) $$b_n = 0 \qquad \text{(تقارن زوج)}$$

و دیده می‌شود که هیچ جمله سینوسی وجود ندارد. بنابراین اگر f(t) تقارن زوجی را به نمایش بگذارد، آنگاه $b_n = 0$ است. برعکس، اگر $b_0 = 0$ باشد، آنگاه f(t) باید تقارن زوج داشته باشد.

بررسی مشابهی روی عبارت a_n منجر به انتگرال در نیم پریود $t = 0$ تا $t = \frac{1}{2}T$ می‌گردد:

(۲۰) $$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

می‌بینیم که a_n را برای یک تابع زوج می‌توان با دو برابر کردن انتگرال در نیمی از محدوده آن به دست آورد. یک تابع فرد فاقد جمله ثابت یا جملات کسینوسی در بسط فوریه‌اش می‌باشد. بگذارید بخش دوم عبارت فوق را ثابت کنیم:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

اکنون در اولین انتگرال $t = -\tau$ قرار دهید:

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\cos(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{T/2} f(-\tau)\cos n\omega_0\tau\,d\tau + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

ولی $f(-\tau) = -f(\tau)$ است و لذا

(۲۱) $$a_n = 0 \qquad \text{(تقارن فرد)}$$

استدلالی مشابه ولی ساده‌تر نشان می‌دهد که

$$a_0 = 0 \qquad \text{(تقارن فرد)}$$

بنابراین با تقارن فرد $a_n = 0$ و $a_0 = 0$ است. برعکس اگر $a_n = 0$ و $a_0 = 0$ باشد، تابع تقارن فرد دارد.

می‌توان b_n را دوباره با انتگرال‌گیری در نصف محدوده به دست آورد.

(۲۲) $$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

مثال‌هایی از تقارن فرد و زوج در تمرین ۳-۱۸، قبل از این بخش ارائه شد. در بخش‌های (الف) و (ب) دو موج مربعی با دامنه‌ها و پریود مساوی توابع مفروض بودند. با این وجود با انتخاب مبدأ زمان، تقارن فرد در بخش (الف) و تقارن زوج در بخش (ب) ایجاد شده است و سری‌های حاصل به ترتیب شامل جملات فقط سینوسی و فقط کسینوسی‌اند. لازم به تذکر است که فقط $t = 0$ را می‌توان طوری اختیار کرد که هیچ تقارن زوج یا فرد به وجود نیاید. در این صورت تعیین ضرایب جملات در سری فوریه حداقل دو برابر طولانی‌تر خواهد شد.

تقارن نیم موج

سری فوریه هر دو موج مربعی فوق یک مشخصه جالب دیگر نیز دارد: هیچ یک از آن‌ها **هارمونیک‌های*** زوج ندارند. یعنی فقط مؤلفه‌هایی از فرکانس در سری وجود دارند که فرکانس‌های آن‌ها مضارب فردی از فرکانس اصلی است. برای مقادیر زوج n، a_n و b_n صفرند. این نتیجه حاصل نوع دیگری از تقارن به نام **تقارن نیم‌موج** است. در این حالت گوییم f(t) خاصیت تقارن نیم موج دارد. اگر

$$f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$$

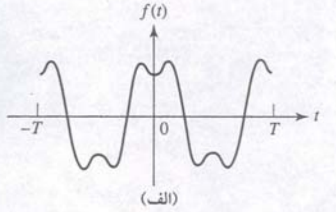
به عبارتی دیگر

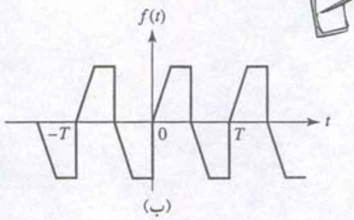
$$f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$$

به جز در تغییر علامت، هر نیم سیکل مثل نیم سیکل دیگر است. تقارن نیم‌موج، برخلاف تقارن زوج و فرد تابعی از انتخاب نقطه $t = 0$ نیست. بنابراین می‌توان گفت که موج مربعی (شکل ۴-۱۸(الف) یا (ب)) تقارن نیم موج دارد. هیچ یک از امواج شکل ۶-۱۸ دارای تقارن نیم موج نیستند ولی شکل موج‌های شکل ۷-۱۸ که تا حدی تقارن دارند.

می‌توان نشان داد که سری فوریه هر تابعی که تقارن نیم‌موج دارد، شامل هارمونیک‌های فرد است. اجازه بدهید ضرایب a_n را بررسی کنیم. داریم:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$





شکل ۷-۱۸ (الف) موجی که تا حدودی شبیه شکل ۶-۱۸ (الف) است، ولی تقارن نیم‌موج دارد. (ب) موجی که شبیه شکل ۶-۱۸ (ب) است ولی تقارن نیم‌موج دارد.

دقت کنید تا هارمونیک زوج را با تابع زوج و هارمونیک فرد را با تابع فرد اشتباه نکنیم. مثلاً b_{10} ضریب یک هارمونیک زوج است. ولی اگر f(t) یک تابع زوج باشد، مقدار آن صفر است.

که می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$a_n = \frac{2}{T}(I_1 + I_2)$$

اکنون تغییر متغیر $\tau = t + \frac{1}{2}T$ را در انتگرال I_1 می‌دهیم:

$$I_1 = \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right) \cos n\omega_0 \left(\tau - \frac{1}{2}T\right) d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} -f(\tau)\left(\cos n\omega_0\tau \cos\frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0\tau \sin\frac{n\omega_0 T}{2}\right) d\tau$$

از طرفی $\omega_0 t$ برابر 2π است و بنابراین

$$\sin\frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

پس

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau)\cos n\omega_0\tau\, d\tau$$

پس از توجه به فرم I_2 می‌توان نوشت:

$$a_n = \frac{2}{T}(1 - \cos n\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

ضریب $(1 - \cos n\pi)$ چنین مشخص می‌کند که اگر n زوج باشد، $a_n = 0$ است. پس :

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_o t\, dt & \text{n فرد} \\ 0 & \text{n زوج} \end{cases} \quad \text{(نیم موج متقارن)} \qquad (۲۳)$$

تحقیقی مشابه نشان می‌دهد که در ازای همه nهای زوج $b_n = 0$ است و بنابراین:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_o t\, dt & \text{n فرد} \\ 0 & \text{n زوج} \end{cases} \quad \text{(نیم موج متقارن)} \qquad (۲۴)$$

متذکر می‌شویم که تقارن نیم موج ممکن است در امواجی با تقارن زوج یا تقارن فرد ظاهر گردد. مثلاً موج ترسیم شده در شکل ۷-۱۸(الف) هر دو تقارن زوج و نیم‌موج را دارا است. هنگامی که موجی تقارن نیم موج و یکی از دو تقارن زوج و فرد را دارد، می‌توان آن را در فاصله یک چهارم پریود، باز ساخت. a_n و b_n را هم با انتگرال‌گیری در هر یک از یک چهارم پریود، می‌توان به دست آورد. پس:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt && \text{n فرد} \\ a_n &= 0 && \text{n زوج} \\ b_n &= 0 && \text{n زوج و فرد} \end{aligned}\right\} \text{(تقارن نیم موج و زوج)} \qquad (۲۵)$$

بهتر است همیشه چند لحظه‌ای را صرف بررسی تقارن تابع کنید و بعد به یافتن سری فوریه آن بپردازید.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 && \text{n زوج و فرد} \\ b_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin \omega_0 t\, dt && \text{n فرد} \\ b_n &= 0 && \text{n زوج} \end{aligned}\right\} \text{(تقارن نیم موج و فرد)} \qquad (۲۶)$$

جدول ۱ـ۱۸ خلاصه‌ای از ساده‌سازی‌ها را ارائه کرده است.

تمرین

۱۸-۴ هر یک از توابع توصیف شده را رسم کنید. بگویید تقارن آن‌ها زوج است یا فرد، آیا تقارن نیم‌موج وجود دارد؟ پریود آن را مشخص نمایید:

(الف) $v=0,\ -2 < t < 0$ و $2 < t < 4$، $v = 5,\ 0 < t < 2$، $v = -5,\ 4 < t < 6$،
به همین ترتیب، (ب) $v = 10,\ 1 < t < 3$، $v = 0,\ 3 < t < 7$،

$v = -10,\ 7 < t < 9$ و به همین ترتیب (ج) $v=8t,\ -1 < t < 1$، $v=0,\ 1 < t < 3$
و به همین ترتیب

۱۸-۵ سری فوریه را برای تمرین ۴-۱۸(الف) و (ب) معین نمایید.

جواب ۴-۱۸: خیر، خیر، بله، 8؛ خیر، خیر، خیر، 8؛ خیر، بله، خیر، 4؛

جواب ۵-۱۸:

$$\sum_{n=1(odd)}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{4} + \sin\frac{n\pi t}{4}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left[\left(\sin\frac{3n\pi}{4} - 3\sin\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi t}{4} + \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi t}{4}\right]$$

جدول ۱ـ۱۸ خلاصه‌ای از ساده‌سازی‌های مبتنی بر سری فوریه.

نوع متقارن	مشخصه	ساده‌سازی
زوج	$f(t) = -f(t)$	$b_n = 0$
فرد	$f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$
نیم موج	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ یا $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$
نیم موج و زوج	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ و $f(t) = -f(t)$ یا $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ و $f(t) = -f(t)$	$a_n = \begin{cases} \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$ $b_n = 0$ برای تمام n ها
نیم موج و فرد	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ و $f(t) = -f(-t)$ یا $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ و $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ برای تمام n ها $b_n = \begin{cases} \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$

۳-۱۸ پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب

کنون با استفاده از سری فوریه می‌توان یک تابع تحریک متناوب دلخواه را با مجموع بینهایت تابع تحریک سینوسی نشان داد. پاسخ واداشته به هر یک از این توابع را می‌توان با تحلیل حالت ماندگار معین می‌کرد و پاسخ طبیعی هم از قطب‌های یک تابع تبدیل مناسب شبکه به دست می‌آید. مقادیر اولیه موجود در تمام شبکه از جمله مقدار اولیه پاسخ واداشته، اجازه می‌دهد تا دامنه پاسخ طبیعی انتخاب گردد. آنگاه پاسخ‌های واداشته و طبیعی حاصل می‌شود.

مثال ۲ـ۱۸

پاسخ متناوب موج مربعی شکل ۸-۱۸(الف)، همراه با مؤلفه dc آن، وقتی که به مدار RL سری شکل ۸-۱۸(ب) اعمال شود را بیابید. تابع تحریک در $t = 0$ اعمال می‌شود و جریان پاسخ مورنظر است. مقدار اولیه آن صفر می‌باشد.

تابع تبدیل، یک فرکانس اصلی $\omega_0 = 2$ rad/s دارد و سری فوریه آن با مقایسه سری فوریه موج شکل ۴-۱۸(الف) در تمرین ۳-۱۸ نوشته می‌شود:

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1(odd)}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{n}$$

پاسخ واداشته را برای nامین هارمونیک می‌توان با کار در حوزه فرکانس به دست آورد. پس:

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{n\pi}\sin 2nt$$

و

$$V_{sn} = \frac{20}{n\pi}(-j)$$

امپدانس ایجاد شده به وسیله مدار RL در این فرکانس چنین است:

$$Z_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

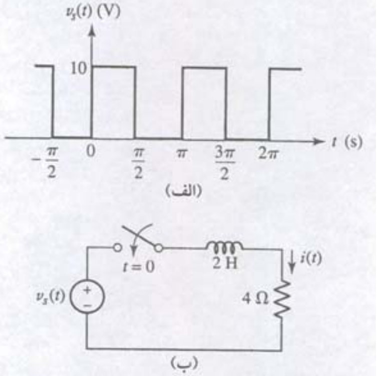
و لذا مؤلفه پاسخ واداشته در این فرکانس برابر است با:

$$I_{fn} = \frac{V_{sn}}{Z_n} = \frac{-j5}{n\pi(1 + jn)}$$

به‌خاطر داشته باشید که $V_m \sin\omega t$ برابر است با $V_m\cos(\omega t - 90°)$ که متناظر است با $V_m \angle -90° = 0jV_m$.

با تبدیل به حوزه زمان داریم:

$$i_{fn} = \frac{5}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\cos(2nt - 90° - \tan^{-1} n)$$
$$= \frac{5}{\pi(1+n^2)}\left(\frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt\right)$$



شکل ۱۸-۸ (الف) تابع تحریک ولتاژ موج مربعی. (ب) تابع تبدیل بخش (الف) به این مدار RL سری در $t = 0$ اعمال شده است. پاسخ کامل $i(t)$ موردنظر است.

چون پاسخ به مؤلفه dc درواقع $5 \text{ V}/4\ \Omega = 1.25 \text{ A}$ است، می‌توان پاسخ واداشته را به صورت جمع زیر نشان داد:

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty}\left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2}\right]$$

پاسخ طبیعی آشنای این مدار ساده یک جمله نمایی است (این جمله قطبی به فرم $I_f/V_s = 1/(4+2s)$ دارد).

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

پس پاسخ کامل برابر است با

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

و چون $i(0) = 0$ است باید A به صورت زیر انتخاب گردد:

$$A = -i_f(0)$$

با $t = 0$، و فرض $i_0(0)$ داریم:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{فرد})}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

هرچند صحیح، ولی بهتر است از مقدار عددی این مجموع استفاده شود. مجموع پنج جمله اول $\Sigma\, 1/(1+n^2) = 0.671$ است، مجموع ده جمله اول 0.695 می‌باشد و مجموع بیست جمله اول 0.720 می‌گردد. پس:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}(0.720) = -0.104$$

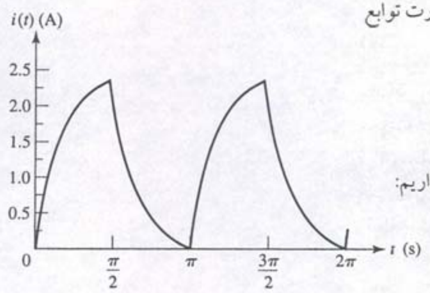
و

$$i(t) = -0.104e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty}\left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2}\right]$$

در به دست آوردن این حل، مجبور شدیم، چندین مفهوم اصلی معرفی شده در این فصل و ۱۷ فصل قبل را به کار ببریم. بعضی از مفاهیم را هم نتوانستیم استفاده کنیم زیرا ماهیت این مثال خاص بسیار ساده بود ولی نقش آن‌ها در تحلیل کلی مشخص شد. درواقع، ما به حل این مسئله به‌عنوان یافته مهمی در تحلیل مدار ساده نگاه خواهیم کرد. با این وجود، علی‌رغم این احساس بالنده باید ذکر کرد که پاسخ کامل، مثل آن‌چه در مثال ۲-۱۸ به فرم تحلیلی دیدیم، آن‌قدر که

ظاهرش نشان می‌دهد، ارزشمند نیست. این تابع تصویر روشنی از طبیعت پاسخ ارائه نمی‌دهد. آن‌چه که ما لازم داریم ترسیمی از $i(t)$ برحسب زمان است. این منحنی با محاسبات خسته کننده‌ای در لحظات متعددی از زمان رسم می‌گردد، یک کامپیوتر و یا یک ماشین حساب برنامه‌پذیر هم می‌تواند کمک مؤثری در این کار بنماید. منحنی را می‌توان به صورت تقریب با جمع گرافیکی پاسخ طبیعی، جمله dc و چند هارمونیک اول به دست آورد. این کار هم عملی بی‌ارزش است.

وقتی که همه کارها گفته و انجام شد، آموزنده‌ترین حل برای این مسئله شاید با تکرار تحلیل گذرا باشد. یعنی فرم پاسخ مطمئناً در فاصله $t = 0$ و $t = \pi/2$ s قابل محاسبه است. این یک تابع نمایی است که به سمت 2.5 A رو به افزایش است. پس از تعیین اول دوره، مقدار اولیه‌ای برای دوره دوم بعدی $\pi/2 < t < \pi$ است. این کار تا حصول به حالتی پریودیک تکرار می‌گردد. روش خصوصاً برای این مثال که تغییر ناچیزی در موج جریان در پریودهای متوالی $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2}$ وجود دارد، مناسب است. پاسخ جریان کامل در شکل ۹-۱۸ ترسیم شده است.



شکل ۹-۱۸ بخش اولیه پاسخ کامل مدار شکل ۸-۱۸ (ب) به تابع تحریک شکل ۸-۱۸ (الف).

تمرین

۶-۱۸ روش‌های فصل ۸ را برای تعیین مقدار جریان شکل ۹-۱۸ در tهای زیر به کار ببرید: (الف) $\frac{\pi}{2}$، (ب) π و (ج) $\frac{3\pi}{2}$.

جواب: 2.392 A، 0.1034 A و 2.396 A.

۴-۱۸ فرم مختلط سری فوریه

هنگام یافتن طیف فرکانس، دیدیم که دامنه هر مؤلفه فرکانس به هر دو مقدار a_n و b_n وابسته است. یعنی هر دو جمله سینوسی و کسینوسی در دامنه نقش دارند. عبارت دقیق برای این دامنه، $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ بود. همچنین می‌توان دامنه را مستقیماً با استفاده از فرم سری فوریه که هر جمله آن یک تابع کسینوسی با زاویه فاز است، به دست آورد. دامنه و زاویه فاز تابعی از $f(t)$ و n هستند.

حتی راحت‌تر از سری فوریه این است‌که جملات سینوسی و کسینوسی به صورت توابع نمایی با ثابت‌های مختلط بیان شوند.

ابتدا بگذارید فرم مثلثاتی سری فوریه را در نظر بگیریم:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t)$$

و سپس جملات سینوسی و کسینوسی را با نمایی جایگزین نماییم. در این صورت داریم:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{jn\omega_0 t}\frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t}\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

اکنون یک ثابت مختلط c_n تعریف می‌کنیم.

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (27)$$

مقادیر a_n، b_n و c_n همگی به n و $f(t)$ وابسته‌اند. اکنون فرض کنید n را با (-n) جایگزین کنیم. مقادیر ثابت چگونه تغییر می‌کنند؟ ضرایب a_n و b_n با معادلات (۱۰) و (۱۱) تعریف شدند و واضح است که

$$a_{-n} = a_n$$

اما

$$b_{-n} = -b_n$$

پس از معادله (۲۷) داریم:

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (28)$$

بنابراین

$$c_n = c^*_{-n}$$

و نیز اجازه دهید تا $c_0 = a_0$ باشد. بنابراین f(t) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

یا

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

بالاخره به جای جمع سری دوم روی مقادیر مثبت صحیح از 1 تا ∞، روی مقادیر صحیح منفی از 1- تا ∞- عمل جمع را انجام می‌دهیم:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

یا

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (۲۹)$$

بنا به توافق، مجموع از ∞- تا ∞+ شامل جمله $n = 0$ نیز می‌گردد.

معادله (۲۹) فرم مختلط سری فوریه برای f(t) است. جمع و جوری آن یکی از دلایل مهم کاربرد آن است. برای تهیه عبارتی که به وسیله آن یک ضریب مختلط c_n قابل محاسبه باشد، معادلات (۱۰) و (۱۱) را در معادله (۲۷) قرار می‌دهیم.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

و سپس معادله نمایی سینوس و کسینوس را به کار برده و ساده می‌کنیم.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad (۳۰)$$

بنابراین یک معادله خلاصه شده جای دو معادله مثلثاتی سری فوریه را می‌گیرد. به جای محاسبه دو انتگرال برای یافتن ضرایب سری فوریه فقط یک انتگرال‌گیری لازم است. علاوه بر آن معمولاً این انتگرال ساده‌تر هم هست. باید دقت کرد که معادله (۳۰) حاوی ضریب $\frac{1}{T}$ است، در صورتی که انتگرال‌های a_n و b_n هر دو ضریب 2/T دارند. با جمع‌وجور کردن دو رابطهٔ اصلی برای فرم نمایی سری فوریه داریم:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (۲۹)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad (۳۰)$$

که طبق معمول $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است.

دامنهٔ مؤلفهٔ سری فوریه نمایی در $\omega = n\omega_0$ که $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$، برابر $|c_n|$ می‌باشد. می‌توانیم منحنی طیف فرکانس گسسته $|c_n|$ را در برابر $n\omega_0$ یا nf_0 رسم کنیم که محور افقی هر دو مقدار مثبت و منفی را نشان دهد و پس از انجام آن، گراف حول مبدأ، تقارن خواهد داشت. زیرا معادلات (۲۷) و (۲۸) نشان می‌دهند که $|c_n| = |c_{-n}|$ است.

از معادلات (۲۹) و (۳۰) ملاحظه می‌شود که دامنه مؤلفه سینوسی در $\omega = n\omega_0$، $(n = 1, 2, 3, \dots)$ برابر $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| = 2|c_{-n}| = |c_n| + |c_{-n}|$ است.

برای مؤلفه dc، $a_0 = c_0$ می‌باشد. ضرایب فوریه نمایی، در معادله (۳۰) تحت تأثیر برخی

تقارن‌ها در f(t) قرار می‌گیرد. بنابراین عبارات مناسب برای c_n برابرند با:

$$c_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad \text{(زوج متقارن)} \qquad (۳۱)$$

$$c_n = \frac{-j2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \quad \text{(فرد متقارن)} \qquad (۳۲)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt & \text{(نیم موج متقارن، n فرد)} \quad (۳۳\text{الف}) \\ 0 & \text{(نیم موج متقارن، n زوج)} \quad (۳۳\text{ب}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & \text{(نیم موج و زوج متقارن، n فرد)} \quad (۳۴\text{الف}) \\ 0 & \text{(نیم موج و زوج متقارن، n زوج)} \quad (۳۴\text{ب}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{-j4}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt & \text{(نیم موج و فرد متقارن، n فرد)} \quad (۳۵\text{الف}) \\ 0 & \text{(نیم موج و فرد متقارن، n زوج)} \quad (۳۵\text{ب}) \end{cases}$$

مثال ۳ـ۱۸

c_n را برای موج مربعی شکل ۱۰ـ۱۸ معین کنید.

این موج مربعی هر دو نوع تقارن زوج و نیم موج را دارد. اگر از این تقارن چشم بپوشیم و معادله کلی (۳۰) را به کار ببریم، با $T = 2$، $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ داریم:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-0.5} -e^{-jn\pi t}\, dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-jn\pi t}\, dt - \int_{0.5}^{1} e^{-jn\pi t}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{-1}^{-0.5} + \frac{1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{0.5}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{j2n\pi}(e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2})$$

$$= \frac{1}{j2n\pi}(2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که $c_0 = 0$، $c_1 = \frac{2}{\pi}$، $c_2 = 0$، $c_3 = -\frac{2}{3\pi}$، $c_4 = 0$ و $c_5 = \frac{2}{5\pi}$ و الی آخر. این مقادیر با سری فوریه مثلثاتی حاصل در تمرین ۳–۱۸ برای موج شکل ۴–۱۸(ب) تطابق دارد. به یاد داشته باشید که هرگاه $b_n = 0$ آنگاه $a_n = 2c_n$ است.

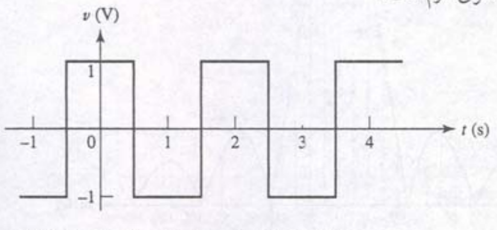
با استفاده از تقارن موج (زوج و نیم موج) با اعمال معادلات ۳۴(الف) و (ب) کار کمتری لازم است.

$$c_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{0.5} \cos n\pi t\, dt = \frac{2}{n\pi}(\sin n\pi t)\Big|_0^{0.5}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} & \text{(n فرد)} \\ 0 & \text{(n زوج)} \end{cases}$$

نتایج همان‌هایی هستند که در آن تقارن امواج لحاظ گردید.

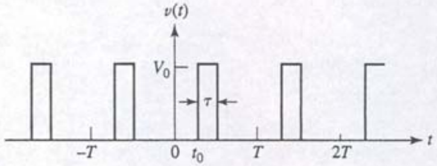


شکل ۱۰ـ۱۸ موج مربعی حاوی هر دو تقارن زوج و نیم‌موج.

مثال ۴-۱۸

اکنون اجازه بدهید مثالی مشکل‌تر و جالب‌تری را ملاحظه کنیم.

یک تابع f(t) معین رشته‌ای از پالس‌های مربعی با دامنه V_0 و دوره تناوب τ است که هر T ثانیه یک بار رخ می‌دهند، شکل ۱۱-۱۸. فرم نمایی سری فوریه را برای f(t) به دست آورید.



شکل ۱۱-۱۸ رشته پریودیک پالس‌های مربعی.

فرکانس اصلی $f_0 = \frac{1}{T}$ است. تقارنی هم وجود ندارد و مقدار ضریب مختلط کلی هم از معادله (۳۰) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{V_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0}\right) \\
&= \frac{2V_0}{n\omega_0 T}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right) \\
&= \frac{V_0\tau}{T}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}
\end{aligned}$$

بنابراین مقدار c_n برابر است با

$$|c_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}\right| \qquad (۳۶)$$

و زاویه c_n برابر است با

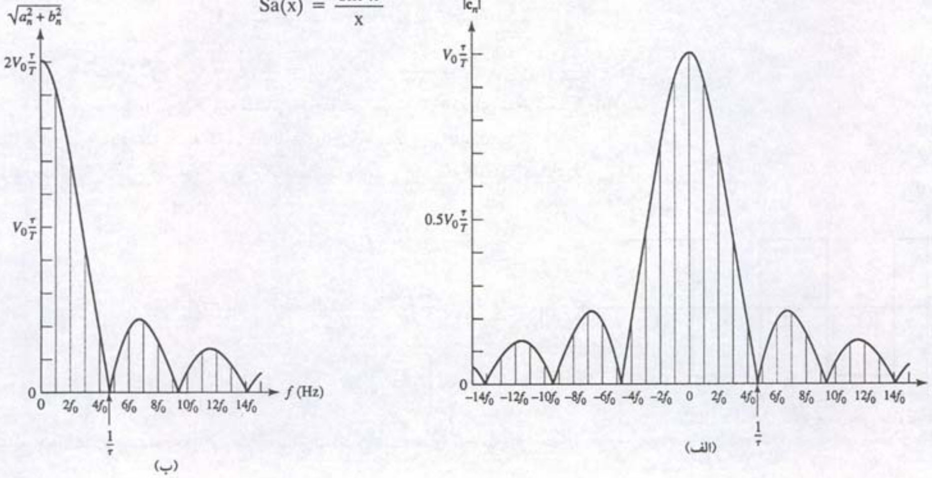
$$\text{ang } c_n = -n\omega_0\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) \quad (\text{احتمالاً به‌علاوه } 180^\circ) \qquad (۳۷)$$

معادلات (۳۶) و (۳۷) حل را برای سری فوریه نمایی نمایش می‌دهند.

تابع نمونه‌برداری

عبارت مثلثاتی معادله (۳۶) کراراً در تئوری جدید مخابرات دیده می‌شود، و با آن **تابع نمونه‌برداری** می‌گویند. کلمه "نمونه‌برداری" به تابعی زمانی (شکل ۱۱-۱۸) اتلاق می‌شود که عمل نمونه‌برداری از آن حاصل می‌گردد. تولید این رشته از پالس‌ها و هر تابع f(t) دیگر بیانگر نمونه‌های f(t) در هر T ثانیه است. به شرط این‌که τ کوچک و $V_0 = 1$ باشد، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$



شکل ۱۲-۱۸ (الف) طیف خطی متناظر برای $|C_n|$ برحسب $f = nf_0$ که $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ و (ب) $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ در برابر $f = nf_0$ که $n = 0, 1, 2, ...$ است.

به دلیل روش موجود در تعیین دامنه مؤلفه‌های فرکانس مختلف در تابع f(t)، درک اهمیت مشخصه‌های این تابع ارزشمند است. در ابتدا توجه کنید که هر وقت x ضریب صحیحی از π باشد، $Sa(n\pi)$ برابر صفر است. یعنی

$$Sa(n\pi) = 0 \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

وقتی که x صفر باشد. تابع نامعین است، ولی به‌سادگی می‌توان نشان داد که مقدار آن برابر واحد می‌باشد یعنی: $Sa(0) = 1$. پس دامنه Sa(x) در $x = 0$ از واحد شروع، و در $x = \pi$ به صفر کاهش می‌یابد. با افزایش x از π به سمت 2π، $|Sa(x)|$ از صفر به حداکثری کمتر از واحد افزایش می‌یابد و دوباره به صفر بازمی‌گردد. با ادامه افزایش x، حداکثرهای متوالی کوچک‌تر می‌شوند زیرا صورت Sa(x) هرگز از واحد بیشتر نمی‌شود ولی مخرج مرتباً بالا می‌رود. تابع Sa(x) تقارن زوجی را هم به نمایش می‌گذارد.

اکنون بیایید طیف خطی را رسم کنیم. ابتدا $|c_n|$ را ملاحظه نمایید، معادله (۳۶) را برحسب فرکانس دوره‌ای اصلی f_0 می‌نویسیم:

$$|c_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau}\right| \qquad (۳۸)$$

دامنه هر c_n با معلوم بودن مقادیر τ و $T = \frac{1}{f_0}$ و انتخاب معلوم n، ±2، ±1 و $n = 0$ از معادله (۳۸) به دست می‌آید. به جای ارزیابی معادله (۳۸) در این فرکانس‌های گسسته بگذارید پوش $|c_n|$ را با فرض پیوسته بودن فرکانس، ترسیم کنیم. یعنی f که همان nf_0 است می‌تواند فقط مقادیر گسسته فرکانس‌های هارمونیک 0، $\pm f$، $\pm f$، $\pm 3f$ و الی آخر را داشته باشد، ولی در حال حاضر به‌عنوان یک متغیر پیوسته تصور می‌گردد. وقتی $f = 0$ است، $|c_n| = \frac{V_0\tau}{T}$ است و وقتی f به $1/\tau$ افزایش یابد، $|c_n|$ صفر می‌شود. پوش حاصل در شکل ۱۲-۱۸(الف) رسم شده است. آن‌گاه طیف خطی با ترسیم خطوط عمودی در هر فرکانس هارمونیک طبق شکل رسم می‌گردد. دامنه‌های موجود مربوط به c_n است. آن‌چه رسم شده مربوط به حالت $\tau/T = 1/(1.5\pi) = 0.212$ می‌باشد. در این مثال، ملاحظه می‌شود که فقط در نقطه‌ای که دامنه پوش صفر می‌شود، دقیقاً فرکانس هارمونیکی وجود ندارد. انتخاب دیگری از τ یا T می‌تواند چنین حالتی را تولید نماید.

در شکل ۱۲-۱۸(ب) دامنه مؤلفه سینوسی به صورت تابعی از فرکانس رسم شده است. دوباره توجه کنید که $a_0 = c_0$ و $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n| + |c_{-n}|$ است. طبق شکل ۱۲-۱۸(ب) چند نکته قابل ملاحظه و چند نتیجه حاصل از طیف خطی پالس‌های مربعی متناوب قابل ذکر است. در پوش طیف گسسته، واضح است که عرض پوش به τ وابسته است و نه به T. درواقع شکل پوش تابع T نیست. این بدان معنی است که فیلتری که برای عبور پالس‌های متناوب طراحی می‌شود تابعی از عرض پالس τ می‌باشد و نه پریود پالس T. بررسی شکل ۱۲-۱۸(ب) نشان می‌دهد که عرض باند $1/\tau$ Hz است. اگر پریود پالس T اضافه شود (که نتیجه فرکانس f_0 کم می‌شود)، عرض باند $1/\tau$ تغییر نمی‌کند، ولی تعداد خطوط خطی بین فرکانس صفر و $1/\tau$ Hz، هر چند به طور گسسته، اضافه می‌شود. دامنه هر خط به طور معکوس متناسب با T است. بالاخره یک جابه‌جایی در مبدأ زمان طیف خطی را تغییر نمی‌دهد. یعنی $|c_n|$ تابعی از t_0 نیست. فاز نسبی مؤلفه‌های فرکانس با انتخاب t_0 تغییر می‌نماید.

تمرین

۷-۱۸ برای شکل‌های (الف) ۴-۱۸(الف) ؛ (ب) ۴-۱۸(ج)، ضریب کلی c_n را برای سری فوریه مختلط معین کنید.

جواب: برای n فرد $-j2/(n\pi)$، برای n زوج 0، به ازای همه nها $-j[4/(n^2\pi^2)]\sin n\pi/2$.

۵-۱۸ تعریف تبدیل فوریه

اکنون که با مفاهیم نمایش سری فوریه توابع پریودیک آشنا شدید، اجازه دهید تبدیل فوریه را با بررسی طیف پالس‌های مربعی بخش قبل تعریف کنیم. این همان طیف گسسته‌ای است که

همیشه باید برای توابع زمانی پریودیک آن را به دست آوریم. طیف بدین لحاظ گسسته است که فرم آن تابعی صاف و پیوسته از فرکانس نمی‌باشد. درعوض فقط دارای مقادیر غیرصفر در فرکانس‌های خاصی است.

با این وجود توابع تحریک مهم متعددی وجود دارند که توابع پریود یکی از زمان نیستند، مثل یک تک پالس مربعی، تابع پله، تابع شیب و یک پالس عجیب دیگر به نام تابع ضربه‌ای که در فصل ۱۴ دیدیم. می‌توان طیف فرکانس را برای چنین توابع نامتناوب به دست آورد ولی به لحاظ این‌که علی‌رغم کوچکی، در هر فاصله فرکانس غیرصفری مقداری انرژی وجود دارد، می‌توان طیف پوسته را برای آن‌ها تصور کرد.

این مفهوم را با انتخاب یک تابع متناوب و افزایش پریود آن به بینهایت گسترش می‌دهیم. تجربه ما با پالس‌های مربعی نشان می‌دهد که دامنه پوش بدون تغییر شکل کاهش می‌یابد و مؤلفه‌های فرکانس بیشتری در هر فاصله فرکانس یافت می‌شود. مثلاً تعداد مؤلفه‌های فرکانس بین 0 و 100 Hz بینهایت می‌شود ولی دامنه هر یک به سمت صفر میل می‌نماید. در بدو امر وجود طیفی با دامنه صفر مفهومی گیج کننده دارد. می‌دانیم که طیف خطی هر تابع تحریک متناوب، دامنه هر مؤلفه فرکانس را نشان می‌دهد. اما طیف پیوسته با دامنه صفر تابع تحریک غیرپریودیک چه چیزی را بیان می‌کند؟ این سئوال در بخش زیر پاسخ داده شده است. در این‌جا در عبارات فوق حدگیری را دنبال می‌نماییم.
با فرم نمایی سری فوریه آغاز می‌کنیم.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (۳۹)$$

که

$$\mathrm{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \quad (۴۰)$$

و

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \quad (۴۱)$$

اجازه دهید

$$\mathrm{T} \to \infty$$

و بنابراین از معادله (۴۱)، ω_0 باید به سمت صفر میل کند. این مقدار کوچک را در حد با یک دیفرانسیل نشان می‌دهیم.

$$\omega_0 \to d\omega$$

پس

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi} \quad (۴۲)$$

سرانجام فرکانس هر هارمونیک $n\omega_0$ به متغیر فرکانس پیوسته‌ای که طیف برحسب آن بیان می‌شود، تبدیل می‌گردد. به بیان دیگر، با میل ω_0 به صفر، n باید بینهایت گردد، به نحوی که حاصل‌ضرب مقدار معینی باقی بماند.

$$n\omega_0 \to \omega \quad (۴۳)$$

با گذاشتن این چهار حد در معادله (۴۰) درمی‌یابیم که c_n، همان‌طور که قبلاً پیش‌بینی شد، به سمت صفر میل خواهد کرد. اگر هر سمت معادله (۴۰) را در پریود T ضرب کنیم و حد بگیریم به نتیجه‌ای قابل توجه می‌رسیم.

$$\mathrm{c}_n T \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

سمت راست این عبارت تابعی از ω است (و نه t) و ما آن را با $\mathrm{F}(j\omega)$ تکرار می‌نماییم:

$$\mathrm{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \quad (۴۴)$$

اکنون بگذارید حد را به معادله (۳۹) اعمال کنیم. کار را با ضرب و تقسیم مجموع با T آغاز خواهیم کرد.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_n T e^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T}$$

به جای $\mathrm{c}_n\mathrm{T}$ کمیت جدید $\mathrm{F}(j\omega)$ را می‌گذاریم و سپس از عبارات (۴۲) و (۴۳) کمک می‌گیریم. در حد، مجموع تبدیل به انتگرال می‌گردد و

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \quad (۴۵)$$

معادلات (۴۴) و (۴۵) را مجموعاً جفت تبدیل فوریه گویند. $\mathrm{F}(j\omega)$ تبدیل فوریه f(t) و f(t) عکس تبدیل فوریه $\mathrm{F}(j\omega)$ است.

این جفت رابطه تبدیل، بسیار مهم‌اند. باید آن‌ها را به خاطر داشته باشیم و همیشه در ضمیر خود نگهداریم. برای تأکید بر اهمیت دو رابطه، آن‌ها را در داخل مستطیلی قرار می‌دهیم.

$$\mathrm{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\,dt \quad (۴۶\ \text{الف})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{F}(j\omega)\,d\omega \quad (۴۶\ \text{ب})$$

خواننده ممکن است متوجه چند تشابه بین تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس شده باشد. اختلاف کلیدی بدین قرار است که انرژی ذخیره شده در حالت تحلیل تبدیل لاپلاس نقش بازی نمی‌کند، در صورتی که در تبدیل فوریه این‌طور نیست. همچنین در تبدیل لاپلاس چندین تابع زمانی وجود دارد (مثل نمایی افزایشی) که تبدیل فوریه برای آن‌ها موجود نیست. با این وجود اگر اطلاعات طیفی برخلاف پاسخ گذرا است، تبدیل فوریه کلید کار است.

جملات نمایی در این دو معادله دارای علامات مخالف در نما هستند. برای حفظ آن‌ها چنین تجسم کنید که نمای مثبت متعلق به f(t) است و این درست مثل سری فوریه مختلط در معادله (۳۹) است.

در این‌جا خوب است سئوالی را مطرح کنیم. آیا می‌توان برای تبدیل فوریه معادلات (۴۶)، تبدیل فوریه هر f(t) دلخواه را به دست آورد؟ به نظر می‌رسد که برای تقریباً هر ولتاژ و جریان قابل تولید، جواب آری باشد. شرط کافی برای وجود $\mathrm{F}(j\omega)$ این است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

به هر حال این شرط لازم نیست، زیرا بعضی از توابع که این شرط را ندارند، دارای تبدیل فوریه هستند. تابع پله، نمونه‌ای از این گونه توابع است. بعداً خواهیم دید که f(t) برای داشتن تبدیل فوریه حتی لازم نیست نامتناوب باشد. نمایش سری فوریه برای یک تابع زمانی تناوبی درواقع حالت خاصی از نمایش تبدیل فوریه است.

همان‌طور که قبلاً گوشزد شد، رابطه جفت تبدیل فوریه یک به یک است. در ازای هر f(t) یک $\mathrm{F}(j\omega)$ و برای هر $\mathrm{F}(j\omega)$ یک f(t) خاص موجود می‌باشد.

مثال ۵-۱۸

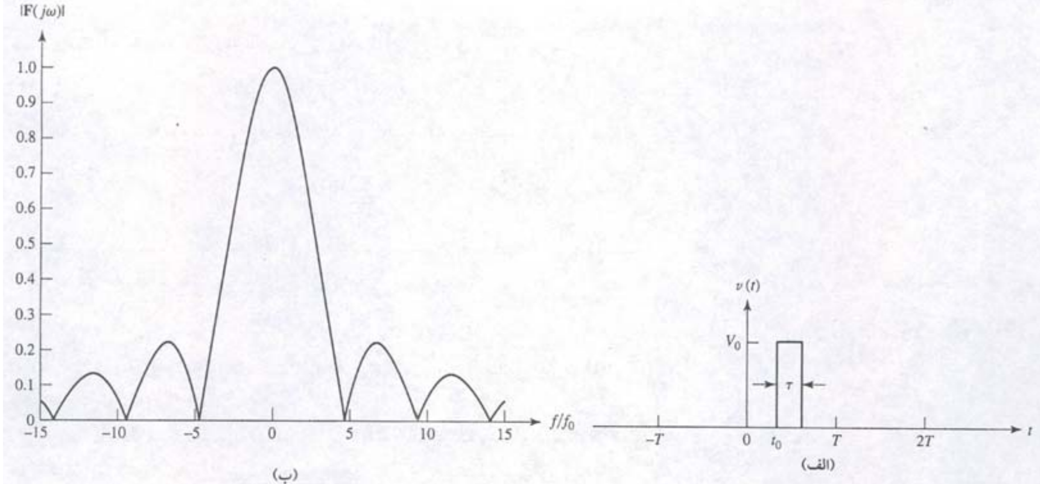
برای به دست آوردن طیف پیوسته یک تک پالس مربعی شکل ۱۳-۱۸ (الف) از تبدیل فوریه استفاده کنید.

پالس با رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ and } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

تبدیل فوریه f(t) از معادله (۴۶الف) به دست می‌آید:

$$\mathrm{F}(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V_0 e^{-j\omega t}\,dt$$



شکل ۱۳-۱۸ (الف) یک پالس مربعی مشابه با شکل ۱۱-۱۸. (ب) نمودار |F(jω)| متعلق به پالس، با $V_0 = 1$، $\tau = 1$ و $t_0 = 0$. محور فرکانس به مقدار $f_0 = 1/1.5\pi$ نرمالیزه شده است که متعلق به شکل ۱۲-۱۸ (الف) است تا بتوان مقایسه‌ای کرد. دقت کنید که f_0 مفهوم خاصی ندارد.

که می‌توان آن را به راحتی انتگرال‌گیری کرده و ساده نمود.

$$F(j\omega) = V_0\tau \frac{\sin\frac{1}{2}\omega\tau}{\frac{1}{2}\omega\tau} e^{-j\omega(t_0+\tau/2)}$$

اندازه F(jω) طیف پیوسته فرکانسی را به دست می‌دهد که درواقع مشابه تابع نمونه‌برداری است. مقدار F(0) برابر $V_0\tau$ است. شکل طیف مشابه با پوش در شکل ۱۲-۱۸(ب) است. منحنی |F(jω)| به عنوان تابعی از ω اندازه ولتاژ در هر فرکانس را نشان نمی‌دهد. پس چه چیز را نشان می‌دهد؟ بررسی معادله (۴۵) نشان می‌دهد که اگر f(t) یک موج ولتاژ است، بُعد F(jω) نیز "ولت بر واحد فرکانس" است. مفهومی که در بخش ۱-۱۵ معرفی گردید.

تمرین

۸-۱۸ اگر $f(t) = -10$ V، $-0.2 < t < -0.1$ s با $f(t) = 10$ V، $0.1 < t < 0.2$ s و $f(t) = 0$ با همه tهای دیگر باشد، F(jω) را برای ωهای (الف) 0، (ب) 10π rad/s، (ج) -10π rad/s، (د) 15π rad/s و (ه) -20π rad/s به دست آورید.

جواب ۸-۱۸: 0، j1.273 V/(rad/s)، -j1.273 V/(rad/s) و -j0.424 V/(rad/s).

۹-۱۸ اگر $F(j\omega) = -10$ V/(rad/s) در $-4 < \omega < -2$ rad/s، $+10$ V/(rad/s) در $2 < \omega < 4$ و 0 برای دیگر ωها باشد، مقدار عددی f(t) را در زمان‌های (الف) 10^{-4} s، (ب) 10^{-2} s، (ج) $\frac{\pi}{4}$ s، (د) $\frac{\pi}{2}$ s و (ه) π s به دست آورید.

جواب ۹-۱۸: j0.1910 V، $j1.9099 \times 10^{-3}$ V، j4.05 V، -j4.05 V و 0.

۶-۱۸ بعضی از خواص تبدیل فوریه

هدف ما در این بخش، پی‌ریزی چند خاصیت ریاضی تبدیل فوریه و حتی مهم‌تر از آن، درک اهمیت فیزیکی آن است. کار را با اتحاد اولر و جایگزینی $e^{-j\omega t}$ در معادله ۴۶(الف) آغاز می‌کنیم:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \qquad (۴۷)$$

چون f(t)، cos ωt، sin ωt همگی توابعی حقیقی از زمان هستند، هر دو انتگرال در معادله (۴۷) توابعی واقعی از ω می‌باشند. بنابراین با فرض

$$F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \qquad (۴۸)$$

داریم:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \qquad (۴۹)$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \qquad (۵۰)$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad (۵۱)$$

و

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad (۵۲)$$

جایگزینی ω با ω- نشان می‌دهد که A(ω) و |F(jω)| هر دو توابعی زوج از ω می‌باشند. در حالی که B(ω)، φ(ω) هر دو تابع فردی از ω هستند.

اکنون اگر f(t) تابع زوجی از t باشد، پس عبارت زیر انتگرال معادله (۵۰) تابعی فرد از t است و به دلیل وجود حدود متقارن، B(ω) به صفر واداشته می‌شود. بنابراین اگر f(t) زوج باشد، تبدیل فوریه F(jω) مربوط به آن هم تابعی حقیقی، زوج نسبت به ω و برای همه ωها، و تابع فاز φ(ω) صفر یا π است. با این وجود، اگر f(t) تابعی فرد از t باشد، آنگاه $A(\omega) = 0$ و F(jω) هم فرد و هم تابعی موهومی از ω است. φ(ω) هم $\pm\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. با این وجود به طور کلی F(jω) تابعی مختلط از ω است.

بالاخره دقت کنید که جایگزینی ω با ω- در معادله (۴۷) فرم مزدوج F(jω) را تولید می‌نماید. پس

$$F(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = F^*(j\omega)$$

داریم:

$$F(j\omega)\,F(-j\omega) = F(j\omega)F^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |F(j\omega)|^2$$

همیت فیزیکی تبدیل فوریه

ا این خواص اساسی ریاضی تبدیل فوریه در ذهن، اکنون آماده‌ایم اهمیت فیزیکی آن را لاحظه نماییم. بگذارید فرض کنیم که f(t) یا ولتاژ دو سر مقاومت 1 Ω و یا جریان درون آن اشد. به این ترتیب $f^2(t)$ توان لحظه‌ای تلف شده در مقاومت 1 Ω به وسیله f(t) خواهد بود. با نتگرال این توان در تمام زمان‌ها انرژی کل تحویلی f(t) به مقاومت 1 Ω به دست خواهد آمد.

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt \qquad (۵۳)$$

کنون به حقه‌ای روی می‌آوریم. عبارت زیر انتگرال در معادله (۵۳) برابر حاصل‌ضرب f(t) ر خودش است. ما به جای یکی از آن‌ها معادله (۴۶ب) را می‌گذاریم:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}F(j\omega)\, d\omega\right] dt$$

ون f(t) تابعی از متغیر انتگرال‌گیری ω نیست، آن را به داخل کروشه برده و ترتیب نتگرال‌گیری را تعویض می‌کنیم.

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} f(t)\, dt\right] d\omega$$

پس F(jω) را از داخل انتگرال بیرون می‌کشیم و در این صورت این انتگرال با F(-jω) برابر ی‌شود:

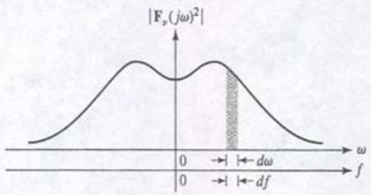
$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)F(-j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\, d\omega$$

جمع‌بندی این نتایج داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\, d\omega \qquad (۵۴)$$

معادله (۵۴) عبارت مفیدی است و **قضیه پارسوال** نامیده می‌شود. این معادله به همراه ادله (۵۳) چنین می‌گوید که انرژی مربوط به f(t) را می‌توان با انتگرال‌گیری حول تمام زمان

مارک آنتوان پارسوال، ریاضی‌دان گمنام فرانسوی این قضیه را هفده سال قبل از اینکه فوریه مطلب خود را بیان کند، در سال ۱۸۰۵ منتشر کرد.



شکل ۱۴ـ۱۸ مساحت برش $|F_v(j\omega)|$، انرژی 1Ω متناظر با $v(t)$ که در پهنای باند df است را نشان می‌دهد.

در حوزه زمان و یا از ضرب $1/(2\pi)$ در انتگرال در تمام فرکانس‌ها در حوزه فرکانس به دست آورد.

قضیه پارسوال ما را به درک بیشتر و تعبیر بهتر تبدیل فوریه رهنمون می‌کند. ولتاژ $v(t)$ با تبدیل فوریه $F_v(j\omega)$ را در نظر بگیرید که انرژی در مقاومت $1\ \Omega$ آن برابر $W_{1\Omega}$ است:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega$$

که در آن تساوی سمت راست به این معنی است که $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ یک تابع زوج از ω است. چون $\omega = 2\pi f$ است می‌توان نوشت:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df = 2\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df \qquad (۵۵)$$

شکل ۱۴–۱۸ یک منحنی نمونه از $|F_v(j\omega)|^2$ را به صورت تابعی از ω و f نشان می‌دهد. اگر مقیاس فرکانس را به فواصل کوچکی مانند df تقسیم کنیم، معادله (۵۵) نشان می‌دهد که سطح برش دیفرانسیل به عرض df زیر منحنی $|F_v(j\omega)|^2$ برابر $|F_v(j\omega)|^2 df$ است. این سطح در روی شکل سایه زده شده است. از مجموع مساحت همه این برش‌ها و با تغییر f از $-\infty$ تا $+\infty$ کل انرژی $1\ \Omega$ ولتاژ $v(t)$ به دست می‌آید. پس $|F_v(j\omega)|^2$ چگالی انرژی (1Ω) یا انرژی بر واحد پهنای باند (J/Hz) ولتاژ $v(t)$ است. این چگالی انرژی همیشه تابعی حقیقی، زوج و غیرمنفی از ω است. با انتگرال‌گیری از $|F_v(j\omega)|^2$ در یک فاصله فرکانسی می‌توانیم انرژی کل واقع در آن فاصله را به دست آوریم. توجه کنید که چگالی انرژی مستقل از فاز $F_v(j\omega)$ است. پس تعداد توابع زمنی و تبدیلات فوریه‌ای که توابع چگالی انرژی یکسانی دارند، نامحدود است.

مثال ۶ـ۱۸

پالس نمایی یک طرفه [یعنی $v(t) = 0$ در $t < 0$] زیر را به ورودی یک فیلتر میان‌گذر اعمال می‌کنیم.

$$v(t) = 4e^{-3t}\,u(t)$$

اگر فیلتر میان‌گذر با $1 < |f| < 2H$ تعریف شود، مطلوب است محاسبه انرژی خروجی کل.

ولتاژ خروجی فیلتر را $v_o(t)$ می‌نامیم. پس انرژی $v_o(t)$ برابر با انرژی مؤلفه‌های فرکانسی واقع در $1 < f < 2$، $-2 < f < -1$ است. تبدیل فوریه $v(t)$ را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{F}_v(j\omega) = 4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-3t}u(t)\,dt = 4\int_{0}^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}\,dt = \frac{4}{3+j\omega}$$

آن‌گاه می‌توان انرژی $1\ \Omega$ کل را در سیگنال ورودی با هر یک از دو رابطه زیر محاسبه کرد:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega = \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{8}{3}\ \mathrm{J}$$

یا

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt = 16\int_{0}^{\infty} e^{-6t}\,dt = \frac{8}{3}\ \mathrm{J}$$

اما انرژی کل $v_o(t)$ کمتر از این است:

$$W_{o1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-4\pi}^{-2\pi}\frac{16\,d\omega}{9+\omega^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{16\,d\omega}{9+\omega^2}$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{3\pi}\left(\tan^{-1}\frac{4\pi}{3} - \tan^{-1}\frac{2\pi}{3}\right) = 0.358\ \mathrm{J}$$

به طور کلی می‌بینیم که فیلتر میان‌گذر ایده‌آل اجازه می‌دهد تا انرژی واقع در فاصله فرکانسی از پیش تعیین شده‌ای حذف شود و انرژی واقع در بقیه فاصله را نگه می‌دارد. تبدیل فوریه به توصیف عملی کمّی فیلتر بدون محاسبه واقعی $v_o(t)$ کمک می‌نماید. هر چند بعداً خواهیم دید که باکمک تبدیل فوریه هم می‌توان در صورت تمایل، $v_o(t)$ را به دست آورد.

تمرین

۱۸-۱۰ اگر $i(t) = 10e^{20t}\,[u(t + 0.1) - u(t - 0.1)]$ A باشد، مطلوب است (الف) $F_i(j0)$، (ب) $F_i(j10)$، (ج) $A_i(10)$، (د) $B_i(10)$ و (ه) $\phi_i(10)$.

۱۸-۱۱ انرژی $1\ \Omega$ مربوط به جریان $i(t) = 20e^{-10t}\,u(t)$ A در فاصله‌های زیر را به دست آورید. (الف) $-0.1 < t < 0.1$ s، (ب) $-10 < \omega < 10$ rad/s، (ج) $10 < \omega < \infty$ rad/s.

جواب ۱۰-۱۸: 3.63 A/(rad/s)، $3.33 \angle -31.7^\circ$ A/(rad/s) A/(rad/s)، 2.83 A/(rad/s) و $-1.749 - 31.7^\circ$.

جواب ۱۱-۱۸: 17.29 J، 10 J و 5 J.

۷-۱۸ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده

تابع ضربه واحد

کنون به جستجوی تبدیل فوریه تابع ضربه واحد $\delta(t - t_0)$، تابعی که در بخش ۴-۱۴ ملاحظه شد می‌رویم. یعنی علاقمندیم تا خواص یا توصیف حوزه فرکانس این **تابع یکتا** را بدانیم. اگر ز علامت $\mathcal{F}\{\}$ برای نمادین کردن جمله "تبدیل فوریه {}" استفاده کنیم، آن‌گاه:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)\,dt$$

ز بحث قبلی خود در مورد این‌گونه انتگرال‌ها داریم:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos\omega t_0 - j\sin\omega t_0$$

ین تابع مختلط از ω به چگالی انرژی $1\ \Omega$ زیر را می‌دهد.

$$|\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}|^2 = \cos^2\omega t_0 + \sin^2\omega t_0 = 1$$

ین نتیجه چنین بیان می‌دارد که انرژی $(1\ \Omega)$ بر واحد عرض یا پهنای باند برای **همه رکانس‌ها** برابر واحد است و انرژی کل ذخیره شده در تابع ضربه واحد بسیار بزرگ است. جای تعجب نخواهد بود که نتیجه بگیریم تابع ضربه واحد یک تابع غیرعملی است زیرا قابل ولید در آزمایشگاه نمی‌باشد. حتی اگر می‌توانست در دسترس قرار بگیرد، پس از این‌که در عرض پهنای باند محدود هر وسیله آزمایشگاهی عملی قرار گیرد، باید دارای اعوجاج شود.

چون بین تابع زمانی و تبدیل فوریه ارتباط منحصر یک به یک وجود دارد، می‌توان گفت ه عکس تبدیل فوریه $e^{-j\omega t_0}$ برابر $\delta(t - t_0)$ است. با به‌کارگیری نماد $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ برای عکس بدیل، داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t - t_0)$$

ابراین اکنون می‌دانیم که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}e^{-j\omega t_0}\,d\omega = \delta(t-t_0)$$

تی اگر در تلاش خود برای ارزیابی مستقیم این انتگرال موفق باشیم، به طور سمبلیک ی‌توان چنین نوشت:

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \qquad (۵۶$$

که علامت ⇔ به معنی این‌است‌که دو تابع، جفت تبدیل فوریه را تشکیل می‌دهند.
در ادامه ملاحظات خود در مورد تابع ضربه واحد بیایید تبدیل فوریه را به فرم زیر بررسی نماییم:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

که تابع ضربه واحد در **حوزه فرکانس** بوده و در $\omega = \omega_0$ واقع است. آنگاه تابع f(t) باید چنین باشد:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

که در آن از **خاصیت غربالی تابع** ضربه واحد استفاده شده است. بنابراین اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega-\omega_0)$$

یا

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \qquad (۵۷)$$

همچنین با یک متغیر علامت ساده داریم:

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0) \qquad (۵۸)$$

واضح است که تابع زمانی در هر دو عبارت (۵۷) و (۵۸) مختلط اند و آن‌ها را نمی‌توان در آزمایشگاه تولید نمود. توابعی مانند $\cos\omega_0 t$ را می‌توان با تجهیزات آزمایشگاهی تولید کرد ولی $e^{-j\omega_0 t}$ را نمی‌توان. با این وجود می‌دانیم که

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

و با تعریف تبدیل فوریه به سادگی دیده می‌شود که

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \qquad (۵۹)$$

بنابراین

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\} = \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

که نشان می‌دهد توصیف حوزه فرکانس $\cos\omega_0 t$ یک جفت تابع ضرب واقع در $\omega = \pm\omega_0$ است. نباید تعجب کرد، زیرا در اولین بحث از فرکانس مختلط در فصل ۱۴، گفتیم که یک تابع سینوسی زمانی همیشه با یک جفت فرکانس موهومی واقع در $s = \pm j\omega_0$ نمایش داده می‌شود. بنابراین داریم:

$$\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] \qquad (۶۰)$$

تابع تحریک ثابت

اولین تابع تحریکی که چند فصل قبل ملاحظه کردیم ولتاژ یا جریان dc بود. برای یافتن تابع تبدیل فوریه تابع ثابتی در زمان مثل $f(t) = K$، اولین تلاش ما جایگزینی این ثابت در معادله تبدیل فوریه و محاسبه انتگرال حاصل است. پس از آن عبارتی مبهم را در دستان خود خواهیم یافت. با این وجود خوشبختانه قبلاً این مسئله را در معادله (۵۸) حل کرده‌ایم.

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

می‌بینیم اگر $\omega = 0$ اختیار کنیم، آنگاه جفت تبدیل فوریه مطابق زیر خواهد بود:

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad (۶۱)$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$K \Leftrightarrow 2\pi K\,\delta(\omega) \qquad (۶۲)$$

و به این ترتیب مسئله حل شده است. طیف فرکانس تابع زمانی ثابت فقط از یک مؤلفه در $\omega = 0$ تشکیل شده است، این را از قبل هم می‌دانستیم.

تابع علامت

به عنوان مثالی دیگر بگذارید تبدیل فوریه یک تابع یگانه به نام **تابع علامت**، sgn(t) را که در زیر تعریف شده، بررسی کنیم.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad (۶۳)$$

یا

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

مجدداً باید سعی کنیم این تابع را در معادله تبدیل فوریه قرار دهیم، که پس از گذاشتن حدود انتگرال با یک عبارت مبهم روبرو می‌شویم. هر بار بخواهیم تبدیل فوریه تابعی زمانی را به دست آوریم که برای |t| در بینهایت تابع به صفر میل نکند، باز همین مشکل را خواهیم داشت. خوشبختانه می‌توان از این وضعیت با استفاده از تبدیل لاپلاس اجتناب کرد، زیرا این روش یک جمله همگرا کننده درونی دارد که بسیاری از مشکلات موجود در محاسبه تبدیل فوریه بعضی از توابع را رفع می‌نماید.

تابع تبدیل را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

توجه کنید عبارت داخل کروشه با بزرگ شدن |t| به سمت صفر میل می‌کند. با به‌کارگیری تبدیل فوریه داریم:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a\to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-at}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega t}e^{at}dt\right]$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}$$

مؤلفه حقیقی صفر است زیرا sgn(t) یک تابع فرد از t است. بنابراین:

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \qquad (۶۴)$$

تابع پله واحد

به عنوان آخرین مثال در این بخش، بگذارید به تابع آشنای پله واحد u(t) نگاه کنیم.
با توجه به تعریف تابع علامت در بخش قبل، تابع پله واحد را چنین نمایش می‌دهیم

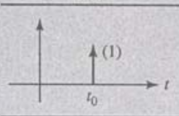
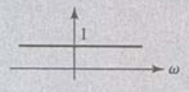
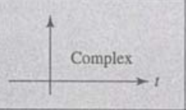
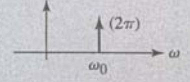
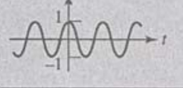
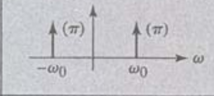
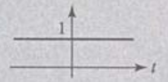
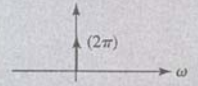
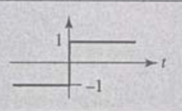
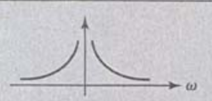
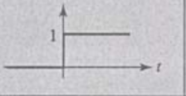
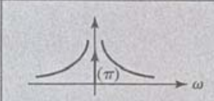
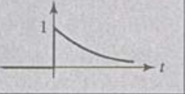
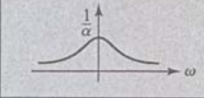
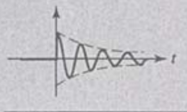
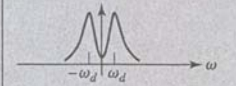
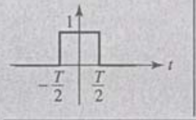
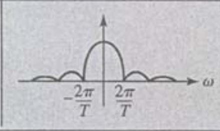
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

و جفت تبدیل فوریه چنین است:

$$u(t) \Leftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \qquad (۶۵)$$

جدول ۲-۱۸ خلاصه‌ای از مثال‌های موردبحث در این بخش و چند جفت تبدیل فوریه دیگر که جزئیات آن‌ها بیان نشده را نشان می‌دهد.

جدول ۱۸ـ۲ خلاصه‌ای از چند جفت تبدیل فوریه.

$f(t)$	$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$	$\lvert\mathbf{F}(j\omega)\rvert$
	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{\alpha+j\omega}$	
	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_d t]u(t)$	$\dfrac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_d^2}$	
	$u(t+\frac{1}{2}T)-u(t-\frac{1}{2}T)$	$T\dfrac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	

مثال ۱۸ـ۷

از جدول ۲-۱۸ برای یافتن تبدیل فوریه تابع زمانی $3e^{-t}\cos 4t\ u(t)$ استفاده کنید.

با توجه به یک سطر مانده به آخر جدول داریم:

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_d t u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_d^2}$$

بنابراین چون $\alpha = 1$ و $\omega_d = 4$ است داریم:

$$\mathbf{F}(j\omega) = (3)\frac{1+j\omega}{(1+j\omega)^2+16}$$

تمرین

۱۸-۱۲ برای توابع زمانی زیر تبدیل فوریه را در $\omega = 12$ محاسبه کنید. (الف) $4u(t) - 10\delta(t)$، (ب) $5e^{-8t}\,u(t)$، (ج) $4\cos 8t\ u(t)$ و (د) $-4\,\mathrm{sgn}\,(t)$.

۱۸-۱۳ $f(t)$ را در $t = 2$ به دست آورید. به شرطی که $F(j\omega)$ برابر باشد با (الف) $5e^{-j3\omega} - j(4/\omega)$، (ب) $8[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]$ و (ج) $(8/\omega)\sin 5\omega$.

جواب ۱۸-۱۲: $10.01\ \angle -178.1^\circ$، $0.347\ \angle -56.3^\circ$، $-j0.6$ و $j0.667$.

جواب ۱۸-۱۳: 2.45، 2.00 و 0.800.

۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی

در بخش ۵-۱۸ گفتیم، می‌توان نشان داد که توابع متناوب هم مثل توابع نامتناوب تبدیل فوریه دارند. حال بگذارید تا این مطلب را بر مبنایی محکم بنا کنیم. یک تابع متناوب $f(t)$ با پریود T و بسط سری فوریه را طبق آن‌چه در معادلات (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) دیدیم، در نظر بگیرید.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (۳۹)$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad (۴۰)$$

و

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (۴۱)$$

به یاد دارید که تبدیل فوریه یک مجموع برابر مجموع تبدیل تک‌تک جملات در آن است و چون c_n تابع زمان نیست، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

پس از یافتن تبدیل $e^{jn\omega_0 t}$ از عبارت (۵۷) داریم:

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n\delta(\omega - n\omega_0) \qquad (۶۶)$$

این رابطه نشان می‌دهد که $f(t)$ دارای طیف گسسته‌ای متشکل از توابع ضربه‌ای واقع در نقاطی روی محور ω در $\omega = n\omega_0$ است که $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots$ می‌باشد. قوت هر ضربه 2π برابر مقدار متناظر ضریب فوریه در فرم مختلط بسط سری فوریه برای $f(t)$ است.

برای آزمایش این کار، بگذارید ببینیم عکس تبدیل فوریه سمت راست عبارت (۶۶) باز هم $f(t)$ می‌شود یا خیر. این تبدیل معکوس می‌تواند چنین نوشته شود:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n\delta(\omega-n\omega_0)\right]d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

چون جمله نمایی زیرنویس n ندارد، می‌توانیم جای انتگرال و جمع را عوض کنیم.

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{j\omega t}\delta(\omega-n\omega_0)\,d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

c_n تابع ω نیست، بنابراین نمی‌توان با آن مثل یک ثابت رفتار کرد. خاصیت غربالی تابع ضربه واحد نشان می‌دهد که

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

که دقیقاً همان معادله (۳۹)، یعنی بسط سری فوریه مختلط برای f(t) است. حال می‌توانیم علامت سئوالی که روی معادلات قبلی ملاحظه کردیم را برداریم و به این ترتیب وجود تبدیل فوریه برای تابع زمانی متناوب تحقق می‌یابد. در هر صورت تعجبی هم ندارد. در آخرین بخش ما تبدیل فوریه تابع کسینوسی را محاسبه کردیم که تابعی کاملاً متناوب بود و ما نیز اشاره مستقیمی به تناوبی بودن آن نکردیم. با این وجود، در به دست آوردن تبدیل فوریه آن روش مستقیمی به کار نبردیم. اما اکنون ابزاری ریاضی در دست داریم که به وسیله آن تبدیل خیلی سراست‌تر حاصل می‌شود. برای نمایش این روش $f(t) = \cos\omega_0 t$ را یک بار دیگر در نظر بگیرید. ابتدا ضرایب فوریه c_n را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t\, e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

بنابراین

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

این عبارت فقط در $n = \pm 1$ دارای مقادیر غیرصفر است و بنابراین تمام طیف به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

که دقیقاً همان رابطه‌ای است که قبلاً به دست آمد. راحت شدیم!

تمرین

۱۸-۱۴ مطلوب است (الف) $F(\sin^2 3t)$، (ب) $F(A \sin \omega_0 t)$ و (ج) $F\{6\cos(8t + 0.1\pi)\}$.

جواب: $2.5\pi[2\delta(\omega) - \delta(\omega+6) - \delta(\omega-6)]$، $j\pi A[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$ و $[18.85 \angle 18^\circ]\,\delta(\omega - 8) + [18.85 \angle -18^\circ]\,\delta(\omega + 8)$.

۹-۱۸ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس

در بخش ۵-۱۵، موضوع تعیین خروجی یک سیستم فیزیکی برحسب ورودی و پاسخ ضربه با استفاده از انتگرال کانولوشن و کار اولیه‌ای در حوزه زمان حل شد. ورودی، خروجی و پاسخ ضربه همگی توابع زمانی‌اند. به دنبال آن دریافتیم که بهتر است در حوزه فرکانس کار کنیم، زیرا تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع درواقع حاصل‌ضرب هر تابع در حوزه فرکانس است. در همین امتداد، این مطلب در تبدین فوریه هم صحیح است.

برای انجام این کار، تبدیل فوریه خروجی سیستم را بررسی می‌کنیم. با فرض این‌که ورودی و خروجی ولتاژ باشند، تعریف اولیه تبدیل فوریه را اعمال کرده و خروجی را با انتگرال کانولوشن بیان می‌نماییم:

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = \mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz\right]dt$$

دوباره فرض می‌کنیم هیچ انرژی اولیه‌ای ذخیره نشده باشد. در ابتدا ممکن است این عبارت پیچیده به نظر برسد، ولی می‌توان تا حد شگفت‌انگیزی آن را ساده کرد. چون جمله نمایی فاقد متغیر انتگرال‌گیری است می‌توان آن را به داخل انتگرال منتقل کرد. سپس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم و به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_i(t-z)h(z)\,dt\right]dz$$

چون $h(z)$ تابع t نیست آن را از داخل انتگرال خارج کرده و با تغییر $t - z = x$ آن را ساده می‌کنیم:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_i(x)\,dx\right]dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_i(x)\,dx\right]dz$$

به نظر می‌رسد کار پیشرفت کرده است و انتگرال داخلی فقط تبدیل فوریه $v_i(t)$ است. به‌علاوه این بخش جمله z ندارد و می‌توان در هر انتگرال‌گیری روی z، آن را ثابت فرض کرد. پس می‌توان این تبدیل، $F_i(j\omega)$، را کلاً به بیرون همه علامات انتگرال‌گیری منتقل نمود.

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\,dz$$

بالاخره بقیه انتگرال دوست قدیمی ما یعنی یک تبدیل فوریه دیگر را نشان می‌دهد! این یکی تبدیل فوریه پاسخ ضربه است که ما آن را با $H(j\omega)$ نشان می‌دهیم، بنابراین همه تلاش ما به نتیجه ساده زیر منتهی می‌شود:

$$F_0(j\omega) = F_i(j\omega)\,H(j\omega) = F_i(j\omega)\,F\{h(t)\}$$

این نیز نتیجه مهم دیگری است: این رابطه تابع سیستم $H(j\omega)$ را به صورت نسبت تبدیل فوریه تابع پاسخ نه تبدیل فوریه تابع تحریک نشان می‌دهد. همچنین تابع سیستم و پاسخ ضربه جفت تبدیل فوریه را ایجاد می‌نماید.

$$h(t) \Leftrightarrow H(j\omega) \qquad (۶۷)$$

به طور خلاصه اگر تبدیل فوریه تابع تحریک و پاسخ ضربه را می‌دانیم آن‌گاه تبدیل فوریه تابع پاسخ به راحتی با ضرب آن‌ها به دست می‌آید. نتیجه تابعی در حوزه فرکانس خواهد بود. توصیف حوزه زمان از عکس تبدیل فوریه حاصل می‌گردد. پس می‌بینیم که کانولوشن در حوزه زمان معادل عملی نسبتاً ساده از ضرب در حوزه فرکانس است.

آن‌چه در پاراگراف فوق ملاحظه شد، بیانگر یک عبارت کلی است که تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع زمانی، حاصل‌ضرب تبدیل‌های فوریه آن‌ها است:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F_f(j\omega)F_g(j\omega)} \qquad (۶۸)$$

عبارت فوق ممکن است یک بار دیگر ما را نگران کند که چرا اصولاً ما حوزه زمان را برای کار انتخاب می‌کنیم ولی باید به یاد داشت که ما چیزی را برای هیچ نمی‌دهیم. شاعری گفته بهترین خنده همراه با درد است. درد ما این‌جا مشکلات مقطعی، دریافتن عکس تبدیل یک تابع پاسخ است و دلیل آن هم پیچیدگی ریاضی آن می‌باشد. از طرف دیگر یک کامپیوتر ساده رومیزی به راحتی می‌تواند کانولوشن دو تابع زمانی را با سرعتی عالی فراهم کند. به این منظور می‌توان یک FFT (تبدیل فوریه سریع) را به سرعت به دست آورد و ما آن را در مثال متلب زیر به دست خواهیم آورد. پس مزیت قاطعی برای کار در حوزه زمان و حوزه فرکانس وجود ندارد. برای هر مسئله جدید باید جداگانه تصمیم‌گیری کرد. تصمیم باید بر اطلاعات موجود و امکانات کامپیوتری مبتنی باشد.

تابع تحریکی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$v_i(t) = u(t) - u(t - 1)$$

و پاسخ ضربه واحد با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = 2e^{-t}\,u(t)$$

ابتدا تبدیل فوریه متناظر را به دست می‌آوریم. تابع تحریک تفاضل بین دو تابع پله واحد است. این دو تابع یکی هستند، به جز این‌که یکی 1 ثانیه بعد از دیگری شروع می‌شود. ما پاسخ را در ازای $u(t)$ محاسبه می‌کنیم. پاسخ در ازای $u(t - 1)$ هم با 1s تأخیر با آن برابر است. تفاضل بین این دو پاسخ جزئی، پاسخ کلی برای $v_i(t)$ است.

تبدیل فوریه u(t) را در بخش ۷–۱۸ مشاهده کردیم:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

تابع سیستم از تبدیل لاپلاس h(t) در جدول ۲–۱۸ به دست می‌آید.

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}\, u(t)\} = \frac{2}{1 + j\omega}$$

عکس تبدیل حاصل‌ضرب این دو تابع، مؤلفه $v_o(t)$ ناشی از u(t) را نتیجه می‌دهد.

$$v_{o1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1 + j\omega} + \frac{2}{j\omega(1 + j\omega)}\}$$

با استفاده از خاصیت غربالی تابع ضربه، عکس تبدیل اولین جمله مقدار ثابت واحد است. بنابراین:

$$v_{o1}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2}{j\omega(1 + j\omega)}\}$$

دومین جمله دارای ضرب جملات در مخرج و به فرم $(\alpha + j\omega)$ است و عکس تبدیل به سادگی با روش بسط به کسرهای جزئی می‌تواند به دست آید که ما در بخش ۵ـ۱۴ دیدیم. بیایید یک بسط به کسرهای جزیی را که مزیت زیادی دارد، برگزینیم گرچه روش‌های سریع‌تری در بسیاری از موارد وجود دارند. در صورت هر کسر کمیت مجهولی را تخصیص می‌دهیم:

$$\frac{2}{j\omega(1 + j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1 + j\omega}$$

سپس مقادیری را برای $j\omega$ جایگزین کنید. در اینجا $j\omega = 1$ را در نظر می‌گیریم:

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

آنگاه $j\omega = -2$

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

درنتیجه $A = 2$ و $B = -2$ است. پس

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{2}{j\omega(1 + j\omega)}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1 + j\omega}\} = \text{sgn}(t) - 2e^{-t}\, u(t)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 1 + \text{sgn}(t) - 2e^{-t}\, u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t}\, u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})\, u(t) \end{aligned}$$

به همین ترتیب مؤلفه دوم $v_o(t)$ یعنی $v_{o2}(t)$ که به وسیله u(t - 1) تولید می‌شود برابر است با

$$v_{o2}(t) = 2(1 - e^{-(t - 1)})\, u(t - 1)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_{o1}(t) + v_{o2}(t) \\ &= 2(1 - e^{-1})\, u(t) - 2(1 - e^{-1 + t})u(t - 1) \end{aligned}$$

گسستگی در $t = 0$ و $t = 1$ تابع را به سه بخش زمانی تقسیم می‌نماید.

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

تمرین

۱۵–۱۸ پاسخ ضربه یک شبکه خطی $h(t) = 6e^{-20t}\, u(t)$ است. سیگنال ورودی $3e^{-6t}\, u(t)$ V می‌باشد. مطلوب است (الف) $H(j\omega)$، (ب) $V_i(j\omega)$، (ج) $V_o(j\omega)$، (د) $V_o(0.1)$، (هـ) $v_o(0.3)$ و (و) $v_{o,max}$.

جواب: $6/(20+j\omega)$، $3/(6+j\omega)$، $18/[(20+j\omega)(6+j\omega)]$، 0.532V، 0.209V و 0.5372.

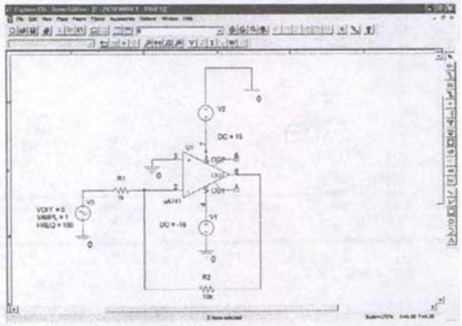
تحلیل کامپیوتری

مواردی که در این فصل ارائه شد، پایه بسیاری از زمینه‌های پیشرفته در مطالعات از جمله پردازش سیگنال، مخابرات و کنترل است. ما فقط قادریم بعضی از مفاهیم اصلی را در قالب مدارهای ساده ارائه کنیم ولی حتی در این سطح تنها قسمتی از توانمندی‌های تحلیل مبتنی‌بر فوریه بیان شد. به‌عنوان اولین مثال، مدار op-amp شکل ۱۵–۱۸ را در نظر بگیرید، که با تقویت کننده عملیاتی μA741 در PSpice ساخته شده است.

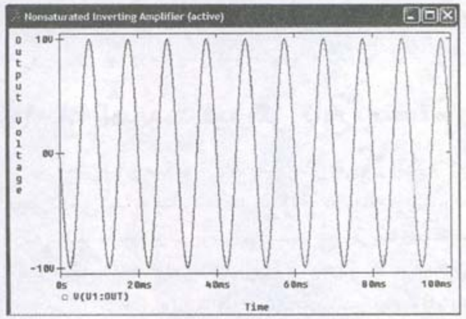
مدار دارای بهره ولتاژ 10 است بنابراین انتظار داریم دامنه خروجی سینوسی، 10 V باشد. این نتیجه را در شکل ۱۶–۱۸ هم می‌توان ملاحظه کرد.

PSpice اجازه می‌دهد تا طیف فرکانس ولتاژ خروجی با آن‌چه که تبدیل سری فوریه سریع (FFT) خوانده می‌شود، فراهم شود، که تقریب گسسته زمانی از تبدیل فوریه دقیق است. از probe، ما در زیر Trace ، Fourier را انتخاب می‌کنیم. نتیجه حاصل در شکل ۱۷ـ۱۸ دیده می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت طیف خطی ولتاژ خروجی این مدار تقویت‌کننده متشکل از یک ویژگی در فرکانس 100 Hz است.

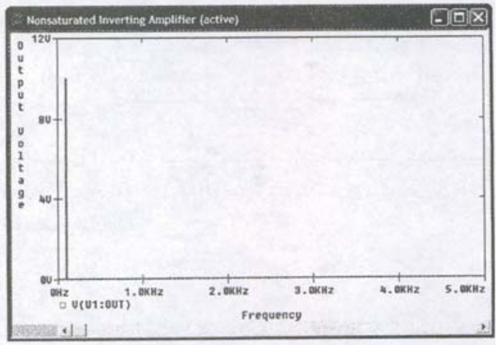
با افزایش ولتاژ اوج ورودی، به ولتاژ اشباعی می‌رسیم که به وسیله منابع ولتاژ dc (در این مثال ±15 V) برای راه‌اندازی op-amp به کار رفته‌اند. مثلاً یک ورودی با دامنه 1.8 V شکل موج ولتاژ خروجی بریده شده‌ای مانند شکل ۱۸–۱۸ را به دست می‌دهد. چون موج ولتاژ، دیگر یک سینوسی کامل نیست، انتظار می‌رود تا فرکانس‌های هارمونیک در طیف فرکانس تابع مطابق شکل ۱۹ـ۱۸ ظاهر گردند. تأثیر رسیدن به اشباع ایجاد اعوجاج در سیگنال است و اگر به یک بلندگو وصل شود، دیگر یک موج صاف 100 Hz نخواهد بود. در عوض می‌توان آن را از تجمیع امواجی با فرکانس‌های 300 و 500 Hz علاوه‌بر 100 Hz دانست. اعوجاج بیشتر موج سبب افزایش انرژی در فرکانس‌های هارمونیک می‌شود، به طوری که در این حالت



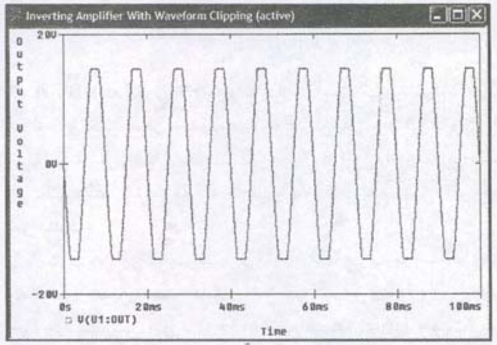
شکل ۱۵ـ۱۸ یک مدار تقویت‌کننده وارونگر با ورودی سینوسی 100Hz.



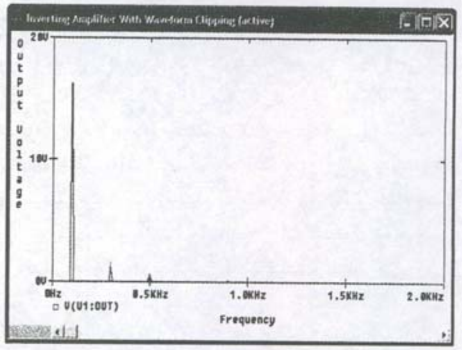
شکل ۱۶ـ۱۸ خروجی شبیه‌سازی شده شکل ۱۵ـ۱۸.



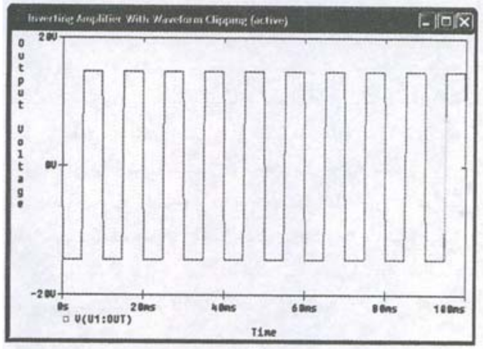
شکل ۱۷ـ۱۸ تقریب گسسته تبدیل فوریه شکل ۱۶ـ۱۸. عرض محدود به دلیل محدودیت در تعداد پریود شبیه‌سازی شده است.



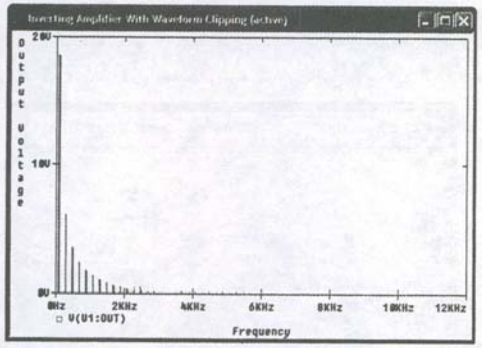
شکل ۱۸ـ۱۸ تحلیل گذرای حاصل برای یک ورودی سینوسی 1.8V که تأثیر اشباع را نشان می‌دهد.



شکل ۱۸ـ۱۹ طیف فرکانس موج ترسیم‌شده شکل ۱۸ـ۱۸ که وجود چند هارمونیک را علاوه‌بر فرکانس اصلی نشان می‌دهد. پهنای محدود ناشی از تفکیک‌سازی عددی است.



(الف)



(ب)

شکل ۱۸ـ۲۰ (الف) اثر فاحش تقویت اشباع شبیه‌سازی‌شده ورودی 15 V سینوسی. (ب) FFT موج که افزایش قابل توجهی در بخشی از انرژی موجود در هارمونیک را برخلاف فرکانس 100Hz اصلی نشان می‌دهد.

سهم انرژی هارمونیک‌های بالاتر بااهمیت‌تر می‌شود. این نکته به راحتی از شبیه‌سازی‌های حاصل از شکل‌های ۱۸ـ۲۰ (الف) و (ب) ولتاژ خروجی در حوزه زمان و فرکانس مشهود است.

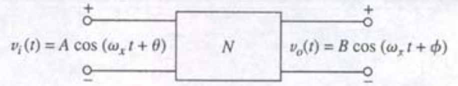
۱۸-۱۰ اهمیت فیزیکی تابع سیستم

در این بخش سعی می‌کنیم تا چند جنبه تبدیل فوریه را با کاری که در چند فصل تکمیل شد، به هم مرتبط سازیم. شبکه دو دهانه N را بدون انرژی اولیه در نظر بگیرید و نیز فرض می‌کنیم توابع تحریک و پاسخ سینوسی مطابق شکل ۲۱-۱۸ ولتاژ باشند. ولتاژ ورودی را $A\cos(\omega_x t + \theta)$ و خروجی را $v_o(t) = B\cos(\omega_x t + \phi)$ می‌نامیم که دامنه B و زاویه فاز ϕ تابعی از ω_x هستند. می‌توانیم توابع تحریک پاسخ را به صورت فیزوری $V_i = Ae^{j\theta}$ و $V_o = Be^{j\phi}$ بنویسیم. نسبت پاسخ فیزوری به فیزور تابع تحریک، عددی مختلط است که تابعی از ω_x می‌باشد:

$$\frac{V_o}{V_i} = G(\omega_x) = \frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

که B/A دامنه G، $(\phi - \theta)$ زاویه فاز آن است. تابع تبدیل $G(\omega_x)$ را می‌توان با تغییر ω_x در محدوده‌ای از مقادیر تولید کرد و B/A و $\phi - \theta$ را برای هر مقدار ω_x اندازه گرفت. اگر هر یک از این پارامترها را برحسب فرکانس رسم کنیم، دو معادله حاصل به طور کامل تابع تبدیل را توصیف خواهند کرد.

اکنون باید این تفسیرها را در یادمان نگه داریم و جنبه تا حدی متفاوت، از همین مسئله تحلیلی را ملاحظه کنیم. برای مداری با ورودی و خروجی سینوسی، مثل مدار ۲۱-۱۸ تابع سیستم $H(j\omega)$ چیست؟ برای پاسخ به این سئوال، با تعریف $H(j\omega)$ به عنوان نسبت تبدیلات فوریه خروجی و ورودی آغاز می‌کنیم. هر دو تابع زمانی دارای فرم تابعی $\cos(\omega_x t + \beta)$ هستند که تبدیل فوریه آن‌ها تاکنون محاسبه نشده است،



شکل ۱۸ـ۲۱ تحلیل سینوسی برای تعیین تابع تبدیل $H(j\omega_x) = (B/A)e^{j(\phi-\theta)}$ می‌تواند به‌کار رود که در آن B و ϕ تابعی از ω_x اند.

هرچند تبدیل $\cos\omega_x t$ را می‌دانیم. تبدیلی که ما می‌خواهیم به قرار زیر است:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\cos(\omega_x t + \beta)\,dt$$

اگر جایگزینی $\omega_x t + \beta = \omega_x \tau$ را انجام دهیم، آنگاه

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau + j\omega\beta/\omega_x}\cos\omega_x\tau\,d\tau$$

$$= e^{j\omega\beta/\omega_x}\mathcal{F}\{\cos\omega_x t\}$$

$$= \pi e^{j\omega\beta/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]$$

که جفت تبدیل فوریه جدید است.

$$\cos(\omega_x t + \beta) \Leftrightarrow \pi e^{j\omega\beta/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)] \qquad (۶۹)$$

که اکنون می‌تواند برای یک تابع سیستم مطلوب به کار رود.

$$H(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{B\cos(\omega_x t + \phi)\}}{\mathcal{F}\{A\cos(\omega_x t + \theta)\}}$$

$$= \frac{\pi Be^{j\omega\phi/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]}{\pi Ae^{j\omega\theta/\omega_x}[\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]} = \frac{B}{A}e^{j\omega(\phi-\theta)/\omega_x}$$

عبارت $G(\omega_0)$ برابر بود با:

$$G(\omega_x) = \frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

که B و ϕ در $\omega = \omega_x$ محاسبه شده‌اند. اگر $H(j\omega)$ را هم در $\omega = \omega_x$ حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$H(\omega_x) = G(\omega_x) = \frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

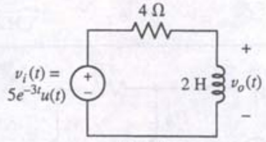
چون زیرنویس x چیز خاصی را نشان نمی‌دهد، پس آن را حذف می‌کنیم و نیز نتیجه می‌گیریم که تابع تبدیل و تابع سیستم یکی هستند:

$$H(j\omega) = G(\omega) \qquad (۷۰)$$

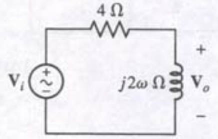
این که یکی از آرگومان‌ها $j\omega$ و دیگری ω است، اهمیتی ندارد. ژصرفاً مقایسه مستقیم‌تری را بین تبدیل‌های فوریه و لاپلاس ممکن می‌سازد.

معادله (۷۰) ارتباط مستقیمی بین تکنیک‌های تبدیل فوریه و تحلیل حالت ماندگار سینوسی را نمایش می‌دهد. کار قبلی ما روی تحلیل سینوسی حالت ماندگار به کمک فیزورها، حالت خاصی از حالت کلی‌تر تحلیل تبدیل فوریه است. خاص به این معنی که ورودی‌ها و خروجی‌ها سینوسی فرض شدند، در صورتی که تبدیل‌های فوریه و توابع سیستم امکان دستکاری توابع و پاسخ‌های غیرسینوسی را هم ممکن می‌سازند.

بنابراین برای یافتن تابع سیستم $H(j\omega)$ برای یک شبکه کافی است که تابع تبدیل سینوسی متناظر برحسب ω یا $(j\omega)$ را به دست آوریم.



(الف)



(ب)

شکل ۱۸ـ۲۲ (الف) پاسخ $v_o(t)$ که به وسیله $v_i(t)$ تولید شده است. (ب) تابع سیستم $H(j\omega)$ را می‌توان با تحلیل حالت ماندگار سینوسی به صورت $H(j\omega) = V_o/V_i$ معین کرد.

مثال ۸ـ۱۸

ولتاژ دو سر القاگر مدار شکل ۲۲-۱۸(الف) را بیابید.

ولتاژ ورودی یک پالس میرای نمایی ساده است. ما تابع سیستم را لازم داریم، ولی لازم نیست که یک تابع ضربه اعمال کنیم، پاسخ ضربه را به دست آوردیم و سپس عکس تبدیل را یافتیم. درعوض ما معادله (۷۰) را برای یافتن تابع سیستم $H(j\omega)$ به کار می‌بریم، با این فرض که ولتاژهای ورودی و خروجی سینوسی بوده و با فیزورهای متناظر نمایش داده شوند، در

شکل ۲۲–۱۸(ب) با به‌کارگیری تقسیم ولتاژ داریم:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$

تبدیل فوریه تابع ورودی عبارت است از:

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\} = \frac{5}{3 + j\omega}$$

تبدیل $V_o(t)$ چنین است:

$$\mathcal{F}\{v_o(t)\} = H(j\omega)\,\mathcal{F}\{v_i(t)\}$$
$$= \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}\,\frac{5}{3 + j\omega}$$
$$= \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}$$

که کسرهای جزئی در آخرین گام برای تعیین عکس تبدیل فوریه به کار می‌روند:

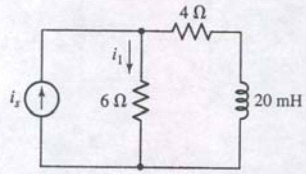
$$v_o(t) = F^{-1}\left\{\frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\right\}$$
$$= 15e^{-3t}\,u(t) - 10e^{-2t}\,u(t)$$
$$= 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t})\,u(t)$$

مسئله ما بدون دردسرهای کانولوشن و یا معادلات دیفرانسیل حل شد.

تمرین

۱۸–۱۶ با استفاده از روی تبدیل فوریه در شکل ۲۳–۱۸، $i_1(t)$ را در $t = 1.5$ ms به دست آورید. i_s برابر است با (الف) $\delta(t)$ A، (ب) $u(t)$ A و (ج) $\cos 500t$ A.

جواب: -141.7 A، 0.683 A و 0.308 A.



شکل ۲۳ـ۱۸

جمع‌بندی

به معادله (۷۰)، یعنی رابطه بین تابع سیستم $H(j\omega)$ و تابع تبدیل حالت ماندگار سینوسی $G(\omega)$ باز می‌گردیم. اکنون تابع سیستم را به صورت نسبت فیزور خروجی به فیزور ورودی در نظر می‌گیریم. فرض کنید دامنه فیزور ورودی واحد و زاویه فاز آن صفر باشد. آن‌گاه فیزور خروجی $H(j\omega)$ است. تحت این شرایط، اگر دامنه خروجی فاز را برحسب تمام مقادیر ω ثبت کنیم، تابع سیستم را برحسب تمام مقادیر ω ثبت کرده‌ایم. در این صورت پاسخ سیستمی را بررسی کرده‌ایم که متوالیاً به ورودی‌اش، بینهایت سیگنال سینوسی، همه با دامنه واحد و فاز صفر اعمال شده است. اکنون فرض کنید ورودی یک تابع ضربه واحد باشد، سپس به پاسخ ضربه $h(t)$ توجه نمایید. آیا اطلاعات حاصل با آن‌چه که قبلاً به دست آمده متفاوت است؟ تبدیل فوریه تابع ضربه واحد مقدار ثابت واحد است و نشان می‌دهد که همه مؤلفه‌های فرکانس وجود دارند، همگی دارای دامنه برابر و فاز صفر می‌باشند. پاسخ سیستم ما مجموع پاسخ‌ها به همه این مؤلفه‌ها است. می‌توان نتیجه را روی یک اسیلوسکوپ هم مشاهده کرد. واضح است که تابع سیستم و پاسخ ضربه از لحاظ پاسخ سیستم حاوی اطلاعات یکسانی هستند.

پس برای توصیف پاسخ یک سیستم به یک تابع تحریک کلی دو روش مختلف داریم. یکی توصیف در حوزه زمان است و دیگری توصیف در حوزه فرکانس می‌باشد. با کار در حوزه زمان ما کانولوشن را روی تابع تحریک و پاسخ ضربه سیستم اجرا می‌کنیم تا پاسخ به دست آید.

در ابتدای مبحث کانولوشن گفتیم که این روش را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که ورودی مجموع پیوسته‌ای از توابع ضربه‌ای است که با قدرت متفاوت و در زمان‌های متفاوت اعمال می‌شوند. خروجی هم مجموع پیوسته‌ای از پاسخ‌های ضربه‌ها است.

با این وجود در حوزه فرکانس، پاسخ را با ضرب تبدیل فوریه تابع تحریک در تابع سیستم به دست می‌آوریم. در این حالت، تابع تحریک را یک طیف پیوسته یا مجموعه پیوسته‌ای از

سینوس‌ها فرض می‌کنیم. با ضرب این تبدیل در تابع سیستم، تبدیل تابع پاسخ را به دست می‌آوریم که باز مجموعه پیوسته‌ای از سینوس‌ها است.

چه خروجی را مجموعه پیوسته‌ای از پاسخ ضربه‌ها بدانیم و یا آن را مجموعه پیوسته‌ای از پاسخ‌های سینوسی تصور کنیم، خطی بودن و اصل تجمیع کمک می‌کنند تا خروجی کل را به عنوان تابعی از زمان و مجموع تمام فرکانس‌ها (عکس تبدیل فوریه) و یا به عنوان تابعی از فرکانس با جمع در تمام زمان‌ها (تبدیل فوریه) تعیین کنیم.

متأسفانه هر دو تکنیک مشکلات و محدودیت‌هایی دارند. در مورد کانولوشن، محاسبه انتگرال مشکل است، زیرا تابع تحریک یا پاسخ ضربه پیچیده است. علاوه بر آن به لحاظ تجربی هم اندازه‌گیری پاسخ ضربه سیستم امری غیرممکن است، زیرا در عمل نمی‌توان تابع تحریک ضربه را تولید کرد. حتی اگر بخواهیم ضربه را با یک پالس باریک و بلند به طور تقریب تولید کنیم، سیستم اشباع می‌شود و از حیطه عملکرد خطی خود خارج می‌گردد.

در مورد حوزه فرکانس، یک محدودیت بزرگ داریم و آن این که به سادگی می‌توان توابع تحریکی را در نظر گرفت که تبدیل فوریه نداشته باشد. علاوه بر آن اگر بخواهیم توصیف حوزه زمان تابع پاسخ را به دست آوریم، باید عکس تبدیل فوریه را حساب کنیم و این کار در بعضی مواقع بسیار مشکل است.

بالاخره هیچ یک از این روش‌ها نمی‌توانند مقادیر اولیه‌ای را وارد محاسبات نمایند. از این لحاظ تبدیل لاپلاس ارجحیت دارد.

بزرگترین مزیت ناشی از کاربرد تبدیل فوریه اطلاعات مفید فراوانی است که راجع‌به خواص طیفی سیگنال در اختیار می‌گذارد. خصوصاً می‌توان از اطلاعات مربوط به انرژی یا توان بر واحد پهنای باند را نام برد. بعضی از این اطلاعات هم به سادگی به وسیله تبدیل لاپلاس حاصل می‌گردد. ما بحث بیشتری را در این مورد ادامه نمی‌دهیم و آن را به مطالعات پیشرفته‌تر وامی‌گذاریم.

خوب، سئوال این است که پس چرا تا این‌جا چیزی گفته نشد؟ بهترین پاسخ شاید این باشد که تکنیک‌های قوی حل مسائل ساده را پیچیده‌تر می‌کند و تفسیر فیزیکی رفتار شبکه‌های ساده‌تر را می‌پیچاند. مثلاً اگر ما فقط علاقمند به پاسخ واداشته هستیم، دلیلی ندارد که با استفاده از تبدیل لاپلاس و با محاسبه یک تبدیل معکوس مشکل، هم پاسخ واداشته و هم پاسخ طبیعی را به دست آوریم. البته می‌توان به پیش رفت ولی همه چیزهای خوب به پایان می‌رسد. با آرزوی موفقیت در مطالعات بعدی شما.

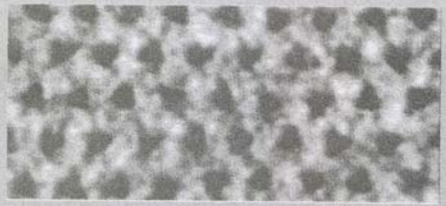
کاربرد عملی

پردازش تصویر

هر چند در راستای درک کامل کار یک ماهیچه پیشرفت‌های بسیاری صورت گرفته است، هنوز سوالات زیادی مطرح است. تحقیقات زیادی هم با استفاده پای قورباغه انجام شده است (شکل ۲۴ـ۱۸).

شکل ۲۴ـ۱۸ چهره‌ای که یک بیولوژیست خیلی به آن علاقمند است.

یکی از این روش‌ها که بسیاری از دانشمندان تحلیل‌گر آن را به کار می‌برند، استفاده از میکروسکپ الکترونی است. شکل ۲۵ـ۱۸ یک میکروگراف الکترونی از لایه‌ای از ماهیچه قورباغه را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده نظمی در آرایش myosin است که نوعی پروتئین contractile می‌باشد. برای بیولوژیست‌ها نکته جالب پریودیکی‌بودن و عدم اطاعت آن در



شکل ۱۸ـ۲۵ گراف الکترونیکی ناحیه‌ای از ماهیچه.

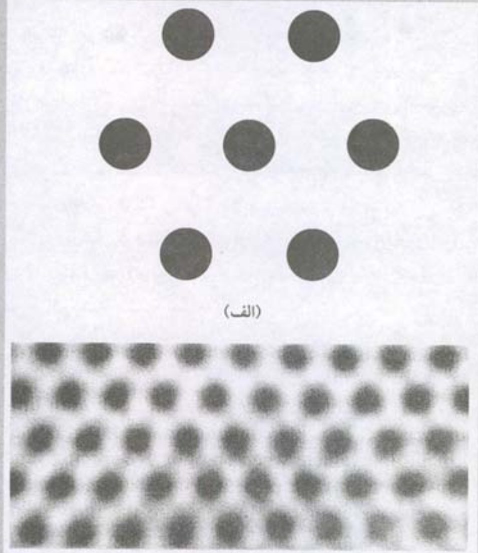
یک لایه ماهیچه وسیع است. برای ایجاد مدلی از برای این مشخصات، یک روش عددی را می‌توان به کار برد، تا تحلیل چنین تصاویری امکان‌پذیر باشد. با این وجود همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، تصویر تولیدشده به وسیله میکروسکپ الکترونی ممکن‌است با پارازیت‌های زمینه، تخریب شود و شناخت فیلامان‌های برون ماهیچه را دچار خطا نماید.

با معرفی روش‌های کمکی تحلیل مدارهای خطی متغیر با زمان، روش‌های مبتنی بر فوریه این فصل در واقع روش‌هایی قوی‌اند که کاربردهایی در دیگر زمینه‌ها هم فراهم ساخته است. از میان آن‌ها، زمینه پردازش تصویر به دفعات از تبدیل فوریه (FFT) و روش‌های عددی مربوطه بهره می‌برد. تصویر شکل ۱۸ـ۲۵ قابل توصیف با تابع فضایی $f(x, y)$ است که $f(x, y) = 0$ متعلق به سفید، $f(x, y) = 1$ متعلق به خاکستری و (x, y) مشخص‌کننده یک پیکسل در تصویر است. با تعریف یک تابع فیلتر $h(x, y)$ که در شکل ۱۸ـ۲۶ (الف) قابل مشاهده است عمل کانولوشن

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

تصویر شکل ۱۸ـ۲۶ (ب) را نتیجه می‌دهد که در آن فیلامان یا لایه myosin قابل تشخیص‌تر است.

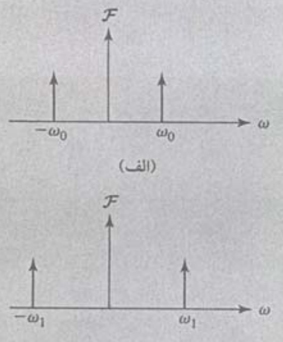
در عمل این پردازش تصویر در حوزه فرکانس انجام می‌شود، که در آن FFT هر دو تابع f و h محاسبه‌شده و ماتریس‌های حاصل در هم ضرب می‌شود. عمل عکس تبدیل لاپلاس تصویر فیلترشده ۱۸ـ۲۶ (ب) را به دست می‌دهد. راستی چرا این کانولوشن با یک عمل فیلترکردن برابر گرفته شده است؟ آرایش فیلامان myosin یک تقارن شش وجهی را داراست، که این خاصیت تابع $h(x, y)$ نیز هست ـ در واقع هم آرایش فیلامان myosin و تابع فیلتر فرکانس‌های فضایی یکسانی دارند. کانولوشن f و h نتیجه‌اش تجلی الگوی شش‌وجهی در تصویر اصلی و حذف پیکسل پارازیت است که دارای تقارن شش وجهی نیستند. این نکته بهتر قابل درک است اگر ما سطر افقی شکل ۱۸ـ۲۵ را به صورت تابع سینوسی $f(x) = \cos\omega_0 t$، که تبدیل فوریه شکل ۱۸ـ۲۷ (الف) دارد نشان دهیم که جفت توابعی است که با $2\omega_0$ از هم جدا شده‌اند. اگر ما این تابع را با تابع فیلتر $h(x) = \cos\omega_1 t$ کانولو کنیم، تبدیل فوریه‌ای به دست می‌آید که در شکل ۱۸ـ۲۷ (ب) هم دیده می‌شود که اگر $\omega_1 \neq \omega_0$ باشد مقدار صفر حاصل خواهد شد. اگر در عوض ما تابع فیلتری با همان فرکانس $f(x)$ انتخاب کنیم مقداری غیرصفر به دست می‌آوریم، یعنی: $\omega = \pm\omega_0$.



(الف)

(ب)

شکل ۱۸ـ۲۶ (الف) یک فیلتر فضایی با تقارن شش وجهی. (ب) تصویر پس از کانولوشن و عکس تبدیل فوریه گسسته که کاهشی را در پارازیت زمینه می‌دهد.



شکل ۱۸ـ۲۷ (الف) تبدیل فوریه $f(x) = \cos\omega_0 t$. (ب) تبدیل فوریه $h(x) = \cos\omega_1 t$.

۱۸ـ۱۱ خلاصه فصل و مرور

- فرکانس‌های هارمونیک یک تابع سینوسی که فرکانس اصلی ω_0 را دارد، برابر $n\omega_0$ است.
- قضیه فوریه بیان می‌کند که اگر یک تابع $f(t)$ خواص بخصوصی را دارا باشد، قابل نمایش با سری نامحدود بینهایت $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_0 \sin n\omega_0 t)$ می‌باشد که در آن $a_0 = (1/T)\int_0^T f(t)\,dt$ و $a_n = (2/T)\int_0^T f(t)\cos\omega_0 nt\,dt$ و $b_n = (2/T)\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$ می‌باشد.
- تابعی تقارن زوج دارد که در آن $f(t) = f(-t)$ باشد.
- تابعی تقارن فرد دارد که در آن $f(t) = -f(-t)$ باشد.
- تابعی تقارن نیم موج دارد که در آن $f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$ باشد.
- سری فوریه یک تابع زوج فقط از یک ثابت و توابع کسینوسی تشکیل شده است.
- سری فوریه یک تابع فرد فقط از یک ثابت و توابع سینوسی درست شده است.
- سری فوریه هر تابع با تقارن نیم‌موج فقط شامل هارمونیک‌های فرد است.
- سری فوریه هر تابع را می‌توان به صورت مختلط با نمایی بیان کرد که در آن $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ که در آن $c_n = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$ است.
- تبدیل فوریه به ما اجازه می‌دهد تا توابع وابسته به زمان را مثل تبدیل لاپلاس در حوزه فرکانس نمایش دهیم. معادلات تبدیل عبارتند از:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\,dt \qquad f(t) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega$$

۱۸ـ۱۱ خواندنی‌های کمکی

A very readable treatment of Fourier analysis can be found in

A. Pinkus and S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Finally, for those interested in learning more about muscle research, including electron microscopy of tissue, an excellent treatment can be found in

J. Squire, *The Structural Basis of Muscular Contraction*. New York: Plenum Press, 1981.

مسائل

۱۸ـ۱ فرم مثلثاتی سری فوریه

پنج فرکانس هارمونیک اول (n = 1 تا 5) امواج زیر را به دست آورید:
(الف) $v_1(t) = 77\cos(5t)$ V
(ب) $i(t) = 32\sin(5t)$ nA
(ج) $q(t) = 4\cos(90t - 85°)$ C

پریود و فرکانس اصلی هر یک از موارد زیر را به دست آورید:
(الف) $q(t) = 8.5\cos(2\pi t)$ nC
(ب) $v(t) = 9\sin(5.95t)$ MV
(ج) $i(t) = 1.113\cos(t - 45°)$ pA

بگذارید $v(t) = 3 - 3\cos(100\pi t - 40°) + 4\sin(200\pi t - 10°) + 2.5\cos 300\pi t$ V باشد. مطلوب است (الف) V_{av}، (ب) V_{eff}، (ج) T و (د) $v(18\text{ ms})$.

۴. (الف) موج ولتاژ $v(t) = 2\cos\pi t + 1.8\sin 4\pi t$ را در فاصله $0 < t < T$ رسم کنید. (ب) مقدار حداکثر $v(t)$ را در این فاصله به دست آورید. (ج) اندازه منفی‌ترین مقدار $v(t)$ را در این فاصله تعیین کنید.

۵. a_0 را برای توابع زیر به دست آورید:
(الف) $5\cos 100t$
(ب) $5\sin 100t$
(ج) $5 + \cos 100t$
(د) $5 + \sin 100t$

۶. a_0 را برای توابع زیر به دست آورید:
(الف) $100\cos(5t - 18°)$
(ب) $100\sin(5t - 18°)$

(ج) $100 + 100\cos(5t - 18°)$

(د) $100 + 100\sin(5t - 18°)$

۷. a_0، a_1، a_2، b_1 و b_2 را برای $f(t)$ با مقادیر (الف) 3، (ب) $3\cos 3t$ ، (ج) $3\sin 3t$ و (د) $3\cos(3t - 10°)$ به دست آورید.

۸. a_0، a_1، a_2، b_1 و b_2 را برای تابع زیر به دست آورید:

$$f(t) = 5u(t-1) - 5u(t-2) + 5u(t-3) - 5u(t-4) + \ldots$$

۹. a_0، a_1، a_2، a_3، b_1، b_2 و b_3 را برای تابع زیر به دست آورید:

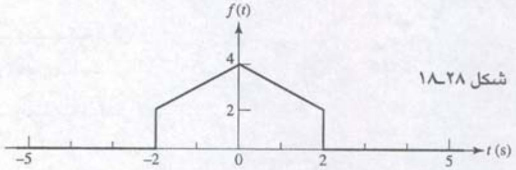
$$g(t) = 2u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-3) - 2u(t-5) + \ldots$$

۱۰. مقادیر عددی a_0، a_1، a_2، a_3، b_1، b_2 و b_3 را برای تابع $h(t) = -3 + 8\sin 2t + f(t)$ که

$$f(t) = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4) + \ldots$$

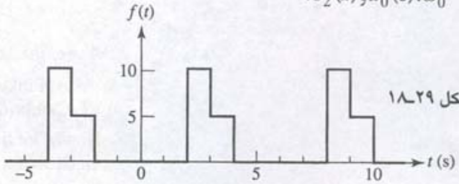
می‌باشد، به دست آورید.

۱۱. موج شکل ۲۸-۱۸ یک موج متناوب با پریود T = 10s است. مطلوب است (الف) مقدار متوسط، (ب) مقدار مؤثر، (ج) مقدار a_3.



شکل ۲۸-۱۸

۱۲. برای موج متناوب شکل ۲۹-۱۸ مطلوب است (الف) T، (ب) f_0، (ج) ω_0، (د) a_0 و (ه) b_2.



شکل ۲۹-۱۸

۱۳. مطلوب است a_3، b_3، $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ برای موج شکل ۲۹-۱۸.

۱۴. فرم مثلثاتی سری فوریه، مقدار T و مقدار متوسط هر تابع زمانی متناوب زیر را معین کنید. (الف) $3.8\cos^2 80\pi t$، (ب) $3.8\cos^3 80\pi t$ و (ج) $3.8\cos 79\pi t - 3.8\sin 80\pi t$.

۱۵. یک تابع زمانی متناوب با T = 2s دارای مقادیر زیر است: f(t) = 0 در $-1 < t < 0$، f(t)=1 در $0 < t < t_1$ و f(t) = 0 در $t_1 < t < 1$. (الف) چه مقداری از t_1، مقدار b_4 را حداکثر می‌سازد؟ (ب) $b_{4,max}$ را پیدا کنید.

۱۶. فرض کنید یک سیگنال الکتریکی با رابطه زیر تعریف شود:

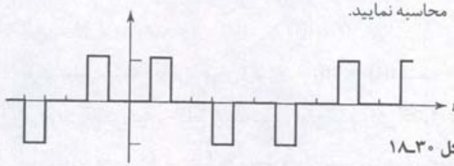
$$g(t) = -5 + 8\cos 10t - 5\cos 15t + 3\cos 20t - 8\sin 10t - 4\sin 15t + 2\sin 20t$$

مطلوب است (الف) پریود g(t)، (ب) عرض باند سیگنال به Hz، (ج) مقدار متوسط g(t)، (د) مقدار مؤثر g(t) و (ه) طیف گسسته دامنه و فاز سیگنال.

۱۷. موج مثال ۱-۱۸ (در شکل ۲-۱۸) خروجی یکسوساز نیم‌موج است. اگر فاصله $-0.5 < t < -0.3$، $-0.1 < t < 0.1$، $-0.3 < t < -0.1$ ر یک نیم‌موج اشغال کند، آنگاه خروجی برابر با یکسوساز تمام موج است. سری فوریه مثلثاتی برای این حالت چیست؟

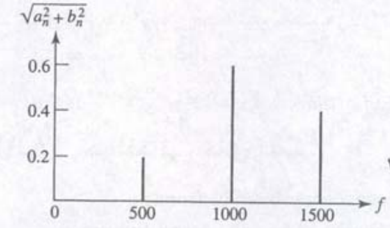
۲-۱۸ استفاده از تقارن

۱۸. (الف) نوع تقارن را در شکل ۳۰-۱۸ مشخص کنید. (ب) کدام یک ا[ز] ضرایب a_n، b_n یا a_0 صفر است؟ (ج) a_1، b_1، a_2، b_2، a_3، b_3 را محاسبه نمایید.



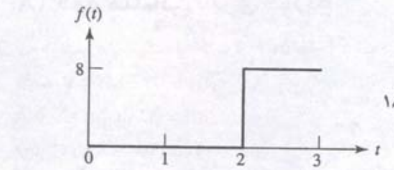
شکل ۳۰-۱۸

۱۹. تابع متناوب y(t) دارای تقارن فرد و طیف دامنه شکل ۳۱-۱۸ است. اگ[ر] همه a_n، b_nها غیرمنفی باشند، (الف) سری فوریه را برای y(t) معی[ن] کنید، (ب) مقدار مؤثر y(t) را به دست آورید. مقدار y(0.2 ms) را تعیی[ن] نمایید.



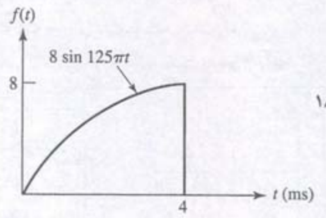
شکل ۳۱-۱۸

۲۰. برای موج f(t) در فاصله 0 < t < 3 در شکل ۳۲-۱۸ تابع جدید g(t) که برابر f(t) در فاصله 0 < t < 3 است، رسم کنید ولی (الف) T = 6 دارای تقارن زوج باشد، (ب) T = 6 و تقارن فرد و نیم موج دارد، (ج) T = 12 و تقارن فرد و نیم موج دارد، (د) T = 12 و دارای تقارن فر نیم موج باشد، (ه) در هر مورد a_5 و b_5 را بیابید.



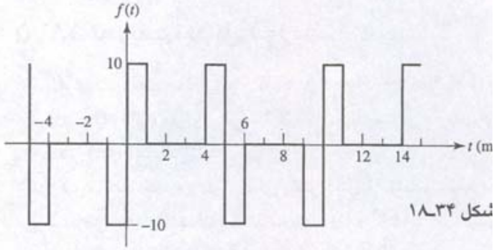
شکل ۳۲-۱۸

۲۱. موج شکل ۳۳-۱۸ هر 4 ms یک بار تکرار می‌شود. (الف) مؤلفه dc یعن a_0 را پیدا کنید، (ب) مقادیر a_1 و b_1 را معین نمایید. (ج) تابعی م $f_x(t)$ با دوره 4 ms با f(t) برابر است ولی پریود آن 8 ms بوده و تقار زوج دارد. آن را مشخص کنید. (د) a_1 و b_1 را برای $f_x(t)$ به دس[ت] آورید.



شکل ۳۳-۱۸

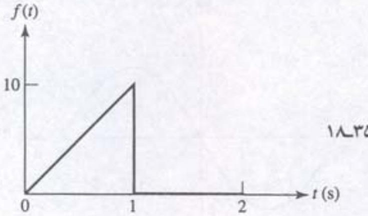
۲۲. از تقارن‌های موجود در شکل ۳۴-۱۸ حداکثر استفاده را کرده مقادیر عددی a_0، a_n و b_n را برای $(1 \le n \le 10)$ بیابید.



شکل ۳۴-۱۸

۲۳. تابع f(t) دارای دو تقارن فرد و نیم موج است. پریود 8 ms می‌باشد. همچنین می‌دانیم که $f(t) = 10^3 t$ در $0 < t < 1$ ms است و f(t)=0 در $1 < t < 2$ms می‌باشد. مقادیر b_n را برای $1 \le n \le 5$ به دست آورید.

۲۴. بخشی از f(t) در شکل ۳۵-۱۸ دیده می‌شود. f(t) را در فاصله 0 < t < 8 s نشان دهید، به شرطی که f(t) دارای (الف) تقارن فرد و T = 4 s باشد، (ب) تقارن زوج و T = 4 s باشد، (ج) تقارن فرد و نیم موج و T = 8 s، (د) تقارن زوج و نیم موج و T = 8 s.

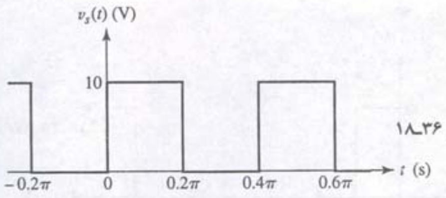


شکل ۳۵-۱۸

۳-۱۸ پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب

۲۵. موج شکل ۸-۱۸(الف) را با شکل ۳۶-۱۸ تعویض کنید و تحلیل مثال ۲-۱۸ را تکرار کنید تا یک عبارت برای (الف) $i_f(t)$، (ب) $i(t)$ به دست آورید.

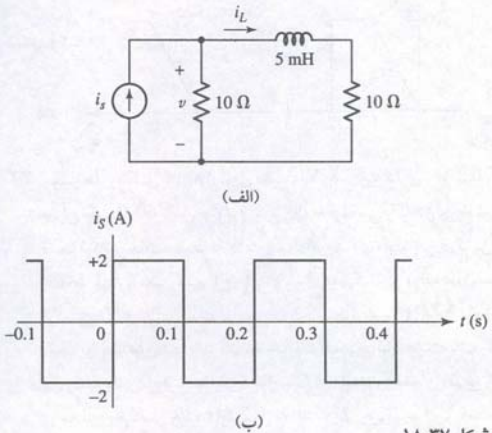
۲۶. موج $v(t)$ در شکل ۳۶-۱۸ به مدار شکل ۸-۱۸(ب) اعمال شده است. از روش‌های استاندارد برای محاسبه تحلیل گذرا $i(t)$ در t برابر (الف) 0.2 πs، (ب) 0.4 πs، (ج) 0.6 πs استفاده کنید.



شکل ۳۶-۱۸

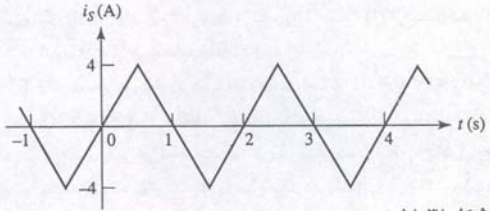
۲۷. یک منبع ولتاژ ایده‌آل v_s، یک کلید باز، یک مقاومت 2 Ω و یک خازن 2 F به طور سری به هم وصل می‌باشند. ولتاژ منبع در شکل ۳۶-۱۸ دیده می‌شود. کلید در t = 0 بسته شده و ولتاژ خازن پاسخ موردنظر است. (الف) در حوزه فرکانس، هارمونیک nام کار کند تا پاسخ واداشته به صورت سری فوریه مثلثاتی به دست آید. (ب) فرم تابعی پاسخ طبیعی را به دست آورید. (ج) پاسخ کامل را به دست آورید.

۲۸. مدار شکل ۳۷-۱۸ (الف) به یک موج مانند شکل ۳۷-۱۸ (ب) متصل است. ولتاژ حالت ماندگار v(t) را به دست آورید.



شکل ۳۷-۱۸

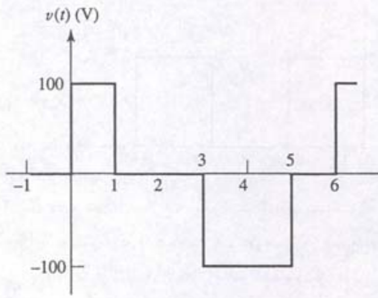
۲۹. مدار شکل ۳۷-۱۸ (الف) به یک موج مانند شکل ۳۸-۱۸ وصل است. مطلوبست جریان $i_L(t)$ ماندگار.



شکل ۳۸-۱۸

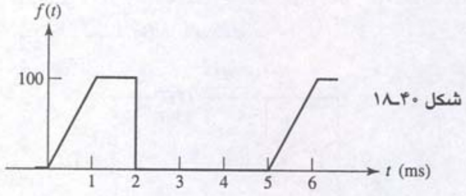
۴-۱۸ فرم مختلط سری فوریه

۳۰. فرض کنید در موج متناوب شکل ۳۹-۱۸، T = 6 ms باشد. c_3، c_{-3}، $|c_3|$، a_3، b_3 و $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ را بیابید.



شکل ۳۹ـ۱۸

۳۱. (الف) سری فوریه مختلط را برای موج متناوب در شکل ۴۰-۱۸ پیدا کنید. (ب) به c_n مقادیر عددی را بدهید، $n = 0, \pm1, \pm2$.



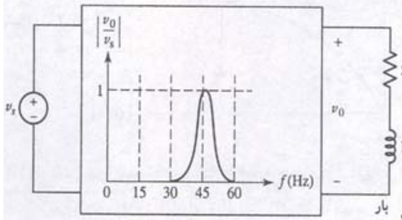
شکل ۴۰ـ۱۸

۳۲. پالس‌های شکل ۱۱-۱۸ دارای دامنه 8 V، دوره کاری 0.2 μs و میزان تکرار 6000 پالس در ثانیه است. (الف) فرکانسی را که در آن پوش طیف فرکانس دامنه صفر دارد، به دست آورید. (ب) جدایی فرکانس خطوط طیف را معین کنید. (ج) $|c_n|$ را برای نزدیک‌ترین مؤلفه طیف به فرکانس 20 kHz به دست آورید. (د) نزدیک‌ترین به 2 MHz را به دست آورید. (ه) پهنای باند نامی یک تقویت‌کننده چه باید داشته باشد تا این رشته پالس با دقت منظمی انتقال یابد. (و) تعداد مؤلفه‌های طیفی را در محدوده فرکانس $2 < \omega < 2.2$ Mrad/s بیان کنید. (ی) دامنه c_{227} را حساب کنید و فرکانس آن را بیان نمایید.

۳۳. شکل موج ولتاژی دارای پریود T = 5 ms و مقادیر ضرایب مختلط است: $c_0 = 1$، $c_1 = 0.2 - j0.2$، $c_2 = 0.5 + j0.25$، $c_3 = -1 - j2$ و $c_n = 0$ با $|n| \geq 4$. (الف) $v(t)$ را پیدا کنید. (ب) $v(1\text{ ms})$ را محاسبه نمایید.

۳۴. یک رشته پالس دارای پریود 5μs، دامنه واحد در $-0.6<t<-0.4$ μs و $0.4 < t < 0.6$ μs و در بقیه زمان‌های دوره دارای دامنه صفر است. این سری پالس می‌تواند عدد دهدهی 3 را نشان دهد که به فرم دودویی به وسیله یک کامپیوتر دیجیتال ارسال می‌گردد. (الف) c_n را پیدا کنید. (ب) c_4 را محاسبه کنید. (ج) c_0 را ارزیابی نمایید. (د) $|c_n|_{max}$ را به دست آورید. (ه) N را طوری معین کنید که $|c_n| \leq 0.1\,|c_n|_{max}$ در ازای همه مقادیر $n > N$ (و) چه پهنای باندی برای انتقال این بخش از طیف لازم است؟

۳۵. ولتاژ پریودیک $v_s(t) = 40$ V برای $0 < t < \frac{1}{96}$ و 0 V برای $\frac{1}{96} < t < \frac{1}{16}$ s می‌باشد. مطلوب است (الف) c_3 و (ب) توان تحویلی به مقاومت بار در شکل ۴۱-۱۸ را به دست آورید.



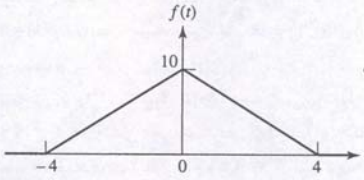
شکل ۴۱ـ۱۸

۱۸-۵ تعریف تبدیل فوریه

۳۶. با فرض تابع زمانی $f(t) = 5[u(t+3) + u(t+2) - u(t-2) - u(t-3)]$ (الف) f(t) را رسم کنید. (ب) از تعریف تبدیل فوریه برای یافتن $F(j\omega)$ استفاده کنید.

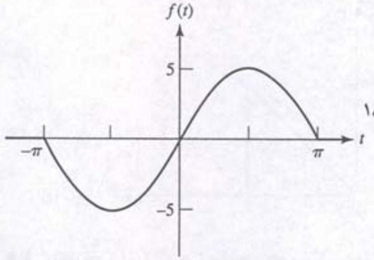
۳۷. از تعریف معادلات تبدیل فوریه برای یافتن $F(j\omega)$ استفاده نمایید به شرطی که f(t) برابر باشد با (الف) $e^{-at}\,u(t)$، $a > 0$ (ب) $e^{-a(t-t_0)}\,u(t-t_0)$، $a > 0$ (ج) $t\,e^{-at}\,u(t)$، $a > 0$.

۳۸. تبدیل فوریه را برای پالس مثلثی شکل ۴۲-۱۸ به کار ببرید.



شکل ۴۲ـ۱۸

۳۹. تبدیل فوریه را برای پالس سینوسی شکل ۴۳-۱۸ به کار ببرید.



شکل ۴۳ـ۱۸

۴۰. فرض کنید $f(t) = (8\cos t)[u(t+0.5\pi) - u(t-0.5\pi)]$ باشد. $F(j\omega)$ را برای ω (الف) 0، (ب) 0.8 و (ج) 3.1 محاسبه نمایید.

۴۱. از معادلات تعریف عکس تبدیل فوریه برای یافتن f(t) استفاده کنید. آنگاه آن را در t=0.8 برای $F(j\omega)$ (الف) $4[u(\omega+2) - u(\omega-2)]$ (ب) $4e^{-2|\omega|}$، (ج) $(4\cos\pi\omega)[u(\omega+0.5) - u(\omega-0.5)]$ محاسبه نمایید.

۱۸-۶ بعضی از خواص تبدیل فوریه

۴۲. با فرض $v(t) = 20e^{1.5t}\,u(-t-2)$ V، مطلوب است (الف) $F_v(j0)$، (ب) $A_v(2)$، (ج) $B_v(2)$، (د) $|F(j2)|$ و (ه) $\phi(2)$.

۴۳. فرض کنید $i(t)$ جریان متغیر با زمان در مقاومت 4 Ω باشد. اگر اندازه تبدیل فوریه $i(t)$ برابر $|I(j\omega)| = (3\cos 10\omega)\,[u(\omega + 0.05\pi) - u(\omega - 0.05\pi)]$ A/(rad/s) باشد. مطلوب است (الف) انرژی کل موجود در سیگنال (ب) فرکانس ω_x، به نحوی که نصف کل انرژی در محدوده $|\omega| < \omega_x$ باشد.

۴۴. فرض کنید $f(t) = 10e^{-4t}\,u(t)$ باشد، مطلوب است (الف) انرژی 1 Ω ارائه شده به وسیله سیگنال. (ب) $|F(j\omega)|$ (ج) چگالی انرژی در $\omega = 0$ و $\omega = 4$ rad/s.

۴۵. اگر $v(t) = 8e^{-2|t|}$ V باشد، مطلوب است (الف) انرژی 1 Ω مربوط به این سیگنال. (ب) $|F_v(j\omega)|$ (ج) محدوده فرکانس $|\omega| < \omega_1$ که در آن 90 درصد انرژی 1 Ω قرار دارد.

۱۸-۷ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده

۴۶. از تعریف تبدیل فوریه برای اثبات نتایج زیر استفاده کنید، که در آن $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ (الف) $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\mathcal{F}\{f(t)\}$، (ب) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$ (ج) $\mathcal{F}\{f(kt)\} = (1/|k|)\,F(j\omega/k)$ (د) $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$ و (ه) $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j\,d[F(j\omega)]\,/\,d\omega$.

۴۷. مطلوب است $\mathcal{F}\{f(t)\}$ به شرطی که f(t) با روابط زیر داده شده باشد. (الف) $4[\mathrm{sgn}(t)]\,\delta(t-1)$، (ب) $4[\mathrm{sgn}(t-1)]\,\delta(t)$ و (ج) $4[\sin(10t - 30^\circ)]$.

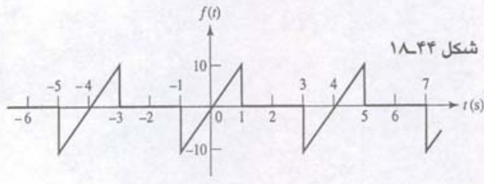
۴۸. مطلوب است $F(j\omega)$ به شرطی که f(t) برابر باشد با (الف) $A\cos(\omega_0 t+\phi)$، (ب) $3\mathrm{sgn}(t-2) - 2\delta(t) - u(t-1)$ و (ج) $(\sinh kt)\,u(t)$.

۴۹. f(t) را در t = 5 به دست آورید به شرطی که $F(j\omega)$ برابر باشد با (الف) $3u(\omega+3) - 3u(\omega-1)$، (ب) $3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1)$ و (ج) $2\delta(\omega) + 3u(-3-\omega) - 3u(\omega-1)$.

۵۰. f(t) را به دست آورید به شرطی که $F(j\omega)$ برابر باشد با: (الف) $3/(1+j\omega) + 3/j\omega + 3 + 3\delta(\omega-1)$، (ب) $(5\sin 4\omega)/\omega$ و (ج) $6(3+j\omega)\,/\,[(3+j\omega)^2+4]$.

۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی

۵۱. تبدیل فوریه تابع زمانی متناوب شکل ۴۴-۱۸ را پیدا کنید.



شکل ۴۴ـ۱۸

۵۲. تابع متناوب f(t) در پریود $0 < t < 4$ ms با تابع $f(t) = 10u(t) - 6u(t-0.001) - 4u(t-0.003)$ تعریف شده است. $F(j\omega)$ را بیابید.

۵۳. اگر $F(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} [1/(|n|!+1)]\,\delta(\omega - 20n)$ باشد، مقدار f(0.05) را به دست آورید.

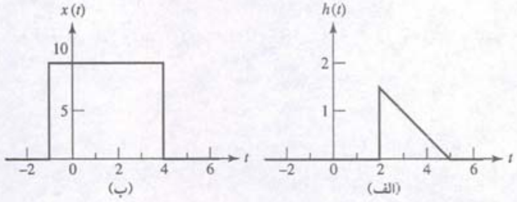
۵۴. اگر ورودی $x(t) = 5[u(t) - u(t-1)]$ باشد با کانولوشن خروجی y(t) را پیدا کنید: به شرطی که h(t) برابر باشد با (الف) 2u(t)، (ب) 2u(t - 1) و (ج) 2u(t - 2).

۵۵. فرض کنید $h(t) = 2[u(t-1) - u(t-2)]$ و $x(t) = 5[u(t) - u(t-2)]$ باشد، y(t) را در زمان‌های t = -0.4, 0.4, 1.4, 2.4, 3.4, 4.4 با کمک کانولوشن به دست آورید.

۱۸-۹ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس

۵۶. پاسخ ضربه یک سیستم خطی برابر است با $h(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$. اگر ورودی x(t) = u(t) باشد، خروجی را برای $t > 0$ به دست آورید.

۵۷. پاسخ ضربه واحد ورودی به یک سیستم خطی در شکل ۴۵-۱۸ نشان داده شده است. (الف) یک عبارت انتگرالی برای خروجی به دست آورید که در فاصله $4 < t < 6$ معتبر بوده و هیچ تابع یگانه‌ای به کار نرفته باشد. (ب) خروجی را در t = 5 محاسبه نمایید.



شکل ۴۵ـ۱۸

۵۸. با فرض سیگنال ورودی $x(t) = 5e^{-(t-2)}\,u(t-2)$ و پاسخ ضربه $h(t) = (4t-16)[(u(t-4) - u(t-7)]$، مقدار سیگنال خروجی را در (الف) t = 5، (ب) t = 8 و (ج) t = 10 به دست آورید.

۵۹. وقتی یک $\delta(t)$ به یک سیستم خطی اعمال می‌شود، خروجی در $0 < t < \pi$ برابر sin t و در بقیه زمان‌ها صفر است. اکنون اگر ورودی $e^{-t}\,u(t)$ اعمال شود، مقدار عددی خروجی را در زمان‌های داده شده مشخص کنید. (الف) 1، (ب) 2.5 و (ج) 4.

۶۰. فرض کنید $x(t) = 0.8(t-1)[u(t-1) - u(t-3)]$ و $h(t) = 0.2\,(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$ باشد. y(t) را برای (الف) t = 3.8 و (ب) t = 4.8 به دست آورید.

۶۱. یک سیگنال $x(t) = 10e^{-2t}\,u(t)$ به یک سیستم خطی که پاسخ ضربه‌اش $h(t) = 10e^{-2t}\,u(t)$ می‌باشد، اعمال شده است. خروجی y(t) را پیدا کنید.

۶۲. یک تابع ضربه به یک سیستم خطی اعمال شده و خروجی $h(t) = 5e^{-4t}\,u(t)$ V به دست آمده است. چند درصد از انرژی 1 Ω

در این پاسخ (الف) در فاصله زمانی $0.1 < t < 0.8$ s رخ می‌دهد؟ در باند فرکانس $-2 < \omega < 2$ rad قرار دارد؟

۶۳. اگر $F(j\omega) = 2 / [(1 + j\omega)(2 + j\omega)]$ باشد، مطلوب است (الف) انرژی 1 Ω موجود در سیگنال و (ب) مقدار حداکثر f(t).

۶۴. مطلوب است $\mathcal{F}^{-1}|F(j\omega)|$ به شرطی که $F(j\omega)$ برابر باشد با:

(الف) $1/[(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$

(ب) $(1 + j\omega) / [(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$

(ج) $(1 + j\omega)^2 / [(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$

(د) $(1 + j\omega)^3 / [(j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)]$

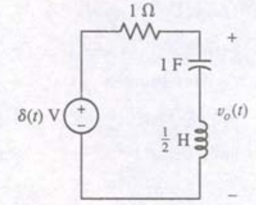
۶۵. بیایید شبکه‌ای درست کنیم که در آن $h(t) = 2e^{-t}u(t)$ باشد. (الف) $H(j\omega) = V_o(j\omega) / V_i(j\omega)$ (ب) با بررسی h(t) یا H(jω) توجه کنید که سیستم دارای یک عنصر ذخیره انرژی است. با انتخاب دلخواه مدار RC با $R = 1\,\Omega$ و $C = 1F$ جهت تهیه ثابت زمانی لازم، فرم مدار را برای تولید $\frac{1}{2}h(t)$ یا $\frac{1}{2}H(j\omega)$ معین کنید. (ج) یک تقویت کننده ولتاژ به طور متوالی با شبکه قرار دهید تا ضریب مناسبی تهیه نمایید. بهره تقویت کننده چند است؟

۱۸-۱۰ اهمیت فیزیکی تابع سیستم

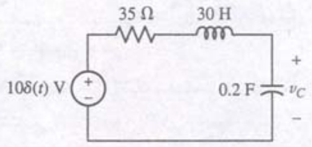
۶۶. در مدار شکل ۴۶-۱۸، $v_o(t)$ را پیدا کنید.

۶۷. در شکل ۴۷-۱۸، $v_C(t)$ را بیابید.

۶۸. فرض کنید $f(t) = 5e^{-2t}u(t)$ و $g(t) = 4e^{-3t}u(t)$ باشد، (الف) در حوزه زمان $f(t) * g(t)$ را به دست آورید. (ب) $f(t) * g(t)$ را با ضرب در حوزه فرکانس به دست آورید.



شکل ۱۸ـ۴۶



شکل ۱۸ـ۴۷

۶۹. منبع ولتاژ شکل ۱۸.۲۲ با $v_i(t) = 12\,\mathrm{sgn}(t)$ تکرار شده است. $v_0(t)$ را حساب کنید که ولتاژ دو سر القاگر است. آن را با تکنیک‌های فوریه انجام دهید.

۷۰. یک سیستم خاصی پاسخ ضربه $h(t) = 2e^{-t}\cos 4t$ را دارد. خروجی را برای ورودی‌های زیر به دست آورید: (الف) 2، (ب) $2\delta(t - 1)$ و (ج) $2u(t + 0.25) - 2u(t - 0.25)$.

پیوست ۱

مقدمه‌ای بر توپولوژی شبکه

پس از کار بر روی مدارهای بسیار، کم‌کم آشکار می‌شود که همه مدارهای ملاحظه شده حداقل به لحاظ آرایش قطعات وجوه مشترکی دارند. با این آگاهی، ممکن است تصویر خلاصه‌تری از مدارها را ایجاد کنیم که به آن **توپولوژی شبکه** می‌گوییم. این پیوست مقدمه‌ای است بر چند مفهوم اصلی توپولوژی شبکه که پیاده‌سازی آن به خواننده واگذار می‌شود.

پ ۱-۱ درخت‌ها و تحلیل گرهی کلی

اکنون به مقطعی رسیده‌ایم تا تحلیل گرهی را عمومیت بخشیده و آن را خوب بشناسیم. تحلیل گرهی به هر مداری اعمال می‌شود ولی قول نمی‌دهیم که بتوانیم گروه زیادی از مسائل مداری را حل کنیم. با این وجود امیدواریم روش تحلیل گرهی کلی را برای هر مسئله خاصی انتخاب کرده و معادلات کمتری تولید و کار کمتری انجام دهیم.

ابتدا لیست تعاریف خود را در رابطه با توپولوژی شبکه گسترش می‌دهیم. کار را با تعریف خود کلمه **توپولوژی** به عنوان شاخه‌ای از هندسه آغاز می‌کنیم و در آن خواصی از شکل هندسی مورد توجه قرار می‌گیرد که در اثر تابیده شدن، خم شدن، تا شدن، انبساط، انقباض و گره خوردن تغییر نمی‌کنند، با این تصور که قسمتی از شکل بریده نشود و یا به آن اضافه نگردد. یک کره با یک هرم یکی است، درست مثل مربعی که با یک دایره یکسان می‌باشد. در مدارهای الکتریکی ما با عنصر خاص موجود در مدار کاری نداریم بلکه به آرایش انشعابات و گره‌ها توجه می‌کنیم. درواقع ماهیت عنصر را حذف و رسم مدار را با یک خط نشان می‌دهیم. نمودار حال را **گراف خطی** و یا خلاصه‌تر گراف می‌خوانیم. مداری همراه با گراف در شکل (پ ۱-۱) مشاهده می‌شود. توجه کنید که همه گره‌ها، با نقطه پررنگی روی گراف مشخص شده‌اند. چون خواص توپولوژیکی مدار یا گراف در حین تغییر شکل تغییر نمی‌کنند، سه گراف موجود در شکل (پ ۲-۱) از لحاظ توپولوژیکی با مدار شکل (پ ۱-۱) یکی هستند.

اصطلاحات توپولوژیکی که از قبل می‌دانیم و از آن‌ها استفاده کرده‌ایم، عبارتند از:

گره: نقطه‌ای که دو یا چند عنصر در آن به هم وصل می‌شوند.

مسیر: مجموعه‌ای از عناصر که به ترتیب از آن‌ها بدون تکرار گرهی عبور شود.

شاخه: یک مسیر تک را گویند که حاوی یک عنصر ساده بوده و هر گره را به گرهی دیگر وصل کند.

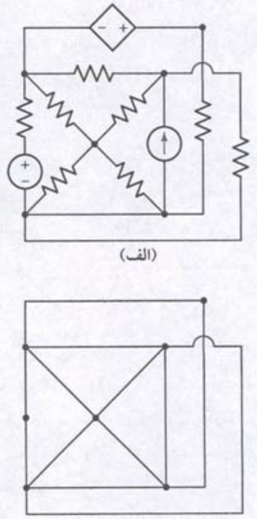
حلقه: یک مسیر بسته است.

...ک حلقه: حلقه‌ای که حاوی هیچ حلقه دیگری در خود نباشد.

مدار مسطح: مداری که می‌توان آن را روی یک صفحه مسطح رسم کرد به نحوی که هیچ انشعاب یا شاخه‌ای از زیر یا روی شاخه دیگر عبور نکند.

مدار غیرمسطح: هر مداری که مسطح نباشد.

گراف‌های شکل (پ ۱-۱) هر کدام دارای 12 شاخه و 7 گره هستند.



(الف)

(ب)

شکل پ ۱-۱ (الف) یک مدار مفروض. (ب) گراف خطی این مدار.

اکنون سه خاصیت جدید یک گراف خطی باید تعریف شوند. یک **درخت**، یک **همدرخت** و یک **رابط**. درخت را به‌عنوان مجموعه‌ای از شاخه‌ها تعریف می‌کنیم که در آن هیچ حلقه‌ای وجود ندارد ولی هر گره را به گره دیگر وصل می‌کند. معمولاً برای یک شبکه انواع درخت‌های متفاوت را می‌توان کشید و تعداد آن با پیچیدگی شبکه به سرعت افزایش می‌یابد. گراف ساده شکل (پ ۳ـ۱ (الف)) هشت درخت دارد که چهار درخت آن با خطوط **پررنگ** در شکل (پ ۳ـ۱ (ب)، (ج)، (د) و (ه) نشان داده شده‌اند.

در شکل (پ ۴ـ۱ (الف)) یک گراف پیچیده‌تر نشان داده شده است. شکل (پ ۴ـ۱(ب)) یک درخت ممکن را نمایش می‌دهد و شکل‌های (پ ۴ـ۱(ج)) و (د) مجموعه‌ای از شاخه‌ها را که درخت نیستند، نشان می‌دهند زیرا در تعریف صدق نمی‌کنند.

پس از شناخت درخت، شاخه‌هایی که بخشی از درخت نیستند، همدرخت یا مکمل درخت نامیده می‌شوند. شاخه‌های **نقطه‌چین‌شده** در شکل (پ ۳ـ۱ (ب)) تا (ه) همدرخت‌های متناظر با متعلق به درخت‌های پررنگ‌تر می‌باشند.

به محض این‌که ساختار یک درخت یا همدرخت را فهمیدیم، فهم رابط ساده خواهد بود. واضح است که هر شاخه خاص بسته به درخت انتخابی ممکن است رابط باشد یا نباشد. تعداد رابط‌ها در یک گراف به راحتی به تعداد شاخه‌ها و گره‌ها مرتبط می‌شود. اگر گراف N گره داشته باشد آنگاه دقیقاً (N - 1) شاخه برای ساخت درخت آن لازم است زیرا اولین شاخه انتخابی دو گره را به هم وصل می‌نماید و شاخه دیگر هر کدام یک گره اضافه می‌نمایند. بنابراین با B شاخه تعداد رابط باید

$$L = B - (N - 1)$$

یا

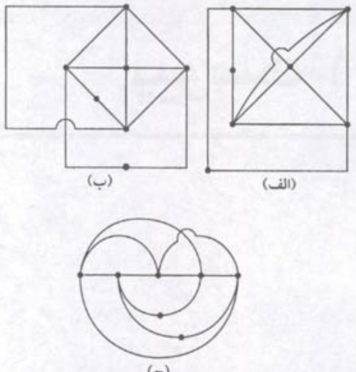
$$L = B - N + 1 \qquad (1)$$

در همدرخت تعداد L شاخه و در درخت N - 1 شاخه وجود دارد.

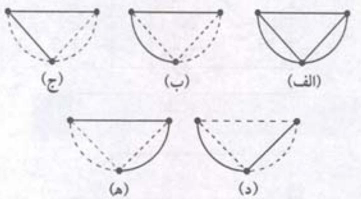
در هر یک از گراف‌هایی که در شکل (پ ۳ـ۱) نشان داده شده است، می‌بینیم که $5-3+1 =$ است و در گراف (پ ۴ـ۱ (ب))، $1 + 5 - 10 = 6$ می‌باشد. یک شبکه ممکن است از چند بخش جدا از هم تشکیل شده باشد و معادله (۱) را می‌توان با جایگزینی عدد 1+ به S+ کلی‌تر کرد، که S تعداد بخش‌های جدا از هم است. با این وجود می‌توان دو بخش جدا از هم را با یک سیم هادی به هم وصل نمود، تا بدین‌ترتیب از دو گره، یک گره تشکیل گردد. از این اتصال هیچ جریانی عبور نخواهد کرد. از این فرآیند می‌توان هر تعداد بخش جدا از هم را به هم وصل نمود و لذا با این کار حتی اگر توجه خود را به مدارهای $S = 1$ معطوف کنیم، عمومیت کار را از دست نخواهیم داد.

اکنون آماده‌ایم روشی را مورد بحث قرار دهیم که در آن یک مجموعه معادلات گرهی مستقل و کافی نوشته شوند. با این روش می‌توان رشته‌های مختلفی از معادلات را بنویسیم که همه آن‌ها معتبر باشند. البته با این روش تمام معادلات ممکن به دست نمی‌آید. بگذارید ابتدا روش را توضیح دهیم و آن را با سه مثال تشریح کنیم و سپس ببینیم دلیل مستقل و کافی بودن معادلات چیست. با فرض داشتن شبکه باید:

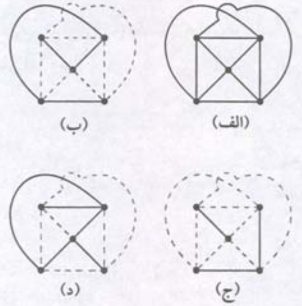
۱. یک گراف رسم کنید و درخت را شناسایی نمایید.
۲. همه منابع ولتاژ را در درخت مستقر کنید.
۳. همه مدارهای جریان را در همدرخت قرار دهید.
۴. همه شاخه‌های ولتاژ کنترل کننده (کنترلی) را برای منابع وابسته کنترل شده با ولتاژ حتی‌الامکان در درخت قرار دهید.
۵. همه شاخه‌های جریان کنترل‌کننده (کنترلی) را برای منابع وابسته کنترل شده با جریان حتی‌الامکان در همدرخت قرار دهید.



شکل پ ۲ـ۱ (الف)، (ب) و (ج) گراف‌های خطی دیگری برای مدار شکل پ ۱ـ۱ هستند.



شکل پ ۳ـ۱ (الف) گراف خطی یک شبکه سه‌گرهی. (ب)، (ج)، (د) و (ه) چهار گراف از هشت گراف مختلف برای این گراف با خطوط پررنگ مشخص شده‌اند.



شکل پ ۴ـ۱ (الف) یک گراف خطی. (ب) یک درخت ممکن. (ج) و (د) درخت نیستند زیرا تعریف درخت در موردشان صدق نمی‌کند.

چهار گام آخر به طور مؤثرتر ولتاژها را با درخت و جریان‌ها را با همدرخت مرتبط می‌سازد.

حال یک متغیر ولتاژ (با جفت علامت مثبت و منفی) را به دو سر هر (N - 1) شاخه در درخت تخصیص می‌دهیم. به شاخه‌ای که حاوی منبع ولتاژ است (مستقل یا وابسته) منبع ولتاژ و به شاخه‌ای که حاوی ولتاژ کنترل شده است، باید ولتاژ کنترل نسبت داده شود. بنابراین تعداد متغیرهای جدیدی که معرفی می‌شود، برابر است با تعداد شاخه‌ها در (N - 1) درخت، منهای تعداد منابع ولتاژ در درخت، منهای تعداد ولتاژهای کنترلی که می‌توان در درخت مستقر نمود. پس در مثال (پ ۳ـ۱) تعداد متغیرهای جدید صفر خواهد بود.

با این مجموعه متغیرها، اکنون می‌باید مجموعه معادلاتی را بنویسیم که در تعیین این متغیرها کافی باشند. معادلات به کمک KCL نوشته می‌شوند. با منابع ولتاژ به همان ترتیبی که در تحلیل گرهی دیدیم، برخورد می‌شود. هر منبع ولتاژ و دو گره در پایانه‌هایش را می‌توان به صورت یک ابرگره یا بخشی از ابرگره تصور کرد. پس قانون جریان کیرشهف به همه به جز یک گره و ابرگره‌ها اعمال می‌شود. مجموع همه جریان‌های شاخه‌هایی را که به هر گره وصل است، مساوی صفر قرار می‌دهیم. هر جریان برحسب متغیرهای ولتاژی که تخصیص دادیم بیان می‌شود. به‌عنوان مرجع یک گره را رها می‌کنیم. بالاخره در حالتی که منابع وابسته کنترل شده با جریان وجود دارند، باید برای هر جریان کنترلی که آن را با متغیر ولتاژ مربوط می‌سازد، معادله‌ای بنویسیم. این کارها هیچ تفاوتی با روش به‌کار رفته قبلی در تحلیل گرهی ندارد.

بیایید روش را روی مدار شکل (پ ۵ـ۱ (الف)) آزمایش کنیم. این مدار چهار گره و پنج شاخه دارد. گراف آن در شکل (پ ۵ـ۱ (ب)) ملاحظه می‌شود.

مثال پ ۱ـ۱

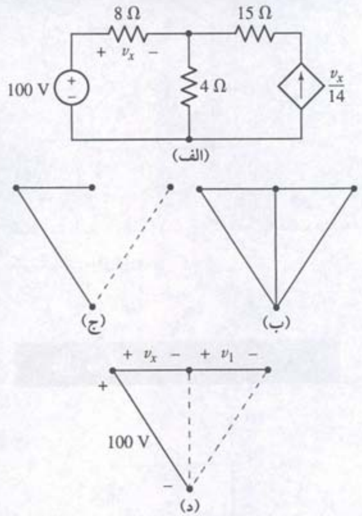
مقدار v_x را در شکل (پ ۵ـ۱(الف)) بیابید.

طبق گام‌های ۲ و ۳ در روش رسم درخت، منبع ولتاژ را در درخت و منبع جریان را در همدرخت قرار می‌دهیم. در گام ۴ می‌بینیم که شاخه v_x نیز می‌تواند در درخت واقع شود، زیرا هیچ حلقه‌ای که تعریف درخت را نقض کند، ندارد. حال با این صفحه به دو شاخه درخت و یک رابط طبق شکل (پ ۵ـ۱(ج)) رسیده‌ایم و ملاحظه می‌کنید که هنوز یک درخت کم داریم زیرا گره سمت راست به هیچ گرهی با مسیری از طریق شاخه‌ها وصل نشده است. تنها راه تکمیل درخت در شکل (پ ۵ـ۱(د)) دیده می‌شود. منبع ولتاژ 100 V، ولتاژ کنترل v_x و متغیر ولتاژ جدید v_1 طبق شکل به شاخه‌های سه درخت تخصیص یافته‌اند.

بنابراین دو مجهول داریم v_x و v_1 و لازم است دو معادله برحسب آن‌ها به دست آوریم. چهار گره وجود دارد، ولی وجود منبع ولتاژ موجب می‌شود که دوتای آن‌ها یک ابرگره را تشکیل دهند. قانون جریان کیرشهف را در هر یک از دو گره از سه گره یا ابرگره باقیمانده می‌توان اعمال کرد. بیایید ابتدا به گره راست بپردازیم. جریانی که به چپ می‌رود، $-v_1 / 15$ است ضمن این‌که جریان رو به پایین $-v_x / 14$ می‌باشد. پس اولین معادله چنین است:

$$-\frac{v_1}{15} - \frac{-v_x}{14} = 0$$

گره وسطی در بالا ساده‌تر از ابرگره به نظر می‌رسد و بنابراین ما جریان به چپ $(-v_x / 8)$، جریان به راست $(v_1 / 15)$ و جریان روبه‌پایین از $4\ \Omega$ را برابر صفر قرار می‌دهیم. آخرین جریان از تقسیم ولتاژ دو سر مقاومت بر $4\ \Omega$ حاصل می‌گردد ولی ولتاژی روی این رابط مشخص نشده است. با این وجود وقتی درختی طبق تعریف برپا می‌شود، مسیری در آن از هر گره به گره دیگر وجود دارد. پس، چون به هر شاخه در درخت ولتاژی تخصیص یافته است،



شکل پ ۵ـ۱ (الف) مدار به‌کاررفته برای تحلیل گرهی کلی. (ب) گراف مدار مفروض. (ج) منبع ولتاژ و ولتاژ کنترلی در درخت قرار گرفته‌اند، درحالی‌که منبع جریان در همدرخت واقع است. (د) درخت تکمیل و ولتاژ در دو سر هر شاخه از درخت تخصیص‌یافته است.

می‌توان ولتاژ دو سر هر رابط را برحسب ولتاژ شاخه‌های درخت بیان کرد. پس این جریان روبه‌پایین برابر $(-v_x + 100)/4$ بوده و دومین معادله را به صورت زیر خواهیم داشت.

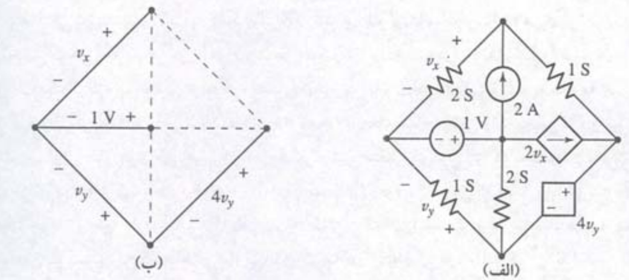
$$-\frac{v_s}{8} + \frac{v_1}{15} + \frac{-v_x + 100}{4} = 0$$

حل همزمان این دو معادله نتیجه می‌دهد:

$$v_1 = -60\text{ V} \qquad v_x = 56\text{ V}$$

مثال پ ۲ـ۱

مقادیر v_x و v_y را در مدار شکل (پ ۶ـ۱ (الف)) به دست آورید.



شکل پ ۶ـ۱ (الف) مداری با 5 گره. (ب) درخت طوری انتخاب شده که هر دو منبع ولتاژ و هر دو ولتاژ کنترلی شاخه‌های درخت‌اند.

درخت را طوری ترسیم می‌کنیم که هر دو منبع ولتاژ و هر دو ولتاژ کنترلی به صورت ولتاژهای درخت ـ شاخه درآیند و متغیرها نیز به آن‌ها تخصیص یابند. این چهار شاخه یک درخت را تشکیل می‌دهند، شکل (پ ۶ـ۱ (ب)) و ولتاژهای شاخه درخت v_x، 1 V، v_y و $4v_y$ طبق شکل انتخاب می‌گردند.

هر دو منبع ولتاژ، ابرگرهی را می‌سازد، پس KCL را دوبار اعمال می‌نماییم. یک‌بار برای گره بالایی

$$2v_x + 1(v_x - v_y - 4v_y) = 2$$

و یک بار هم به ابرگره متشکل از گره سمت راست، گره پایینی و منبع ولتاژ وابسته.

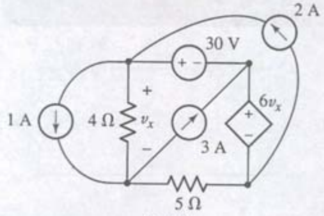
$$1v_y + 2(v_y - 1) + 1(4v_y + v_y - v_x) = 2v_x$$

به جای این‌که از چهار معادله تکنیک قبل استفاده کنیم، فقط دو معادله داریم و به راحتی می‌توان نشان داد که

$$v_x = \frac{26}{9}\text{ V} \qquad و \qquad v_y = \frac{4}{3}\text{ V}$$

مثال پ ۳ـ۱

مقدار v_x را در مدار شکل (پ ۷ـ۱(الف)) به دست آورید.

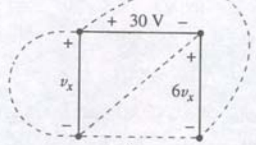


شکل پ ۷ـ۱ (الف) مداری که فقط به یک معادله کلی گرهی نیاز دارد.

دو منبع ولتاژ و ولتاژ کنترلی یک درخت سه‌شاخه را طبق شکل (پ ۷ـ۱) ایجاد می‌کنند. چون دو گره بالایی و گره پایین سمت راست در ایجاد یک ابرگره مرتبط می‌شوند، فقط یک بار معادله KCL را می‌نویسیم. با انتخاب گره پایین سمت چپ داریم:

$$-1 - \frac{v_x}{4} + 3 + \frac{-v_x + 30 + 6v_x}{5} = 0$$

و از آن نتیجه می‌شود $v_x = -\frac{32}{3}$ V. علی‌رغم پیچیدگی ظاهری این مدار، استفاده از تحلیل گرهی کلی به حل ساده‌ای منجر شد.



شکل پ ۷ـ۱ (ب) درخت و ولتاژهای شاخه درخت به‌کاررفته.

به‌کارگیری جریان‌های تک‌حلقه‌ای یا ولتاژهای گره ـ مرجع، به معادلات و کار زیادتری نیاز دارد. ما در بخش زیر طریقه یافتن بهترین تحلیل را مورد بحث قرار می‌دهیم.

اگر بخواهیم هر ولتاژ، جریان یا توانی را در مثال قبل بدانیم، یک گام اضافی، پاسخ لازم را برای ما فراهم می‌آورد. مثلاً توان حاصل از منبع 3A برابر است با

$$3(-30 - \frac{32}{3}) = -122\text{ W}$$

اکنون اجازه دهید در مورد کفایت مجموعه معادلات شاخه درخت و مستقل بودن معادلات گره، بحث و نتیجه‌گیری کنیم. اگر ولتاژهای شاخه درخت کافی باشند، پس ولتاژ هر شاخه در هر درخت یا همدرخت باید از اطلاعات مربوط به مقادیر همه ولتاژهای شاخه درخت قابل محاسبه باشد. مطمئناً در شاخه‌های درخت چنین هم هست. برای شاخه‌های رابط می‌دانیم که هر رابط بین دو گره واقع است و بنا به تعریف و درخت باید این دو گره را به هم وصل کند. پس ولتاژ هر رابط را می‌توان از روی ولتاژ شاخه‌های درخت به دست آورد.

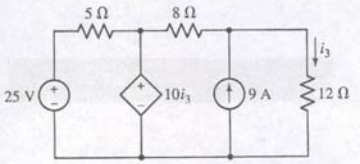
پس از معلوم شدن ولتاژ دو سر هر شاخه در مدار، آنگاه جریان شاخه‌ها را به این صورت پیدا می‌کنیم. اگر شاخه، منبع جریانی باشد که جریان آن معلوم است، اگر مقاومت باشد جریان آن از قانون اهم به دست می‌آید و اگر منبع ولتاژ باشد با KCL و جریان‌های به دست آمده می‌توان جریان آن را پیدا کرد. بنابراین تمام ولتاژها و جریان‌ها به دست می‌آید و کافی است ولتاژ شاخه‌های درخت مشخص شود.

برای این‌که استقلال معادلات را نشان دهیم، اجازه دهید فرض کنیم که در شبکه فقط منابع جریان مستقل وجود دارد. همان‌طور که قبلاً گفته شد، منابع ولتاژ مستقل در مدار معادلات کمتری را سبب می‌شوند، در حالی که منابع وابسته تعداد معادلات بیشتری را تولید می‌کنند. اگر فقط منابع جریان مستقل وجود داشته باشد، دقیقاً (N - 1) معادله گرهی برحسب (N - 1) ولتاژ شاخه درخت وجود دارد. برای این‌که نشان دهیم که این معادلات مستقل‌اند، کاربرد KCL را برای (N - 1) گره متفاوت مجسم نمایید. هر بار که معادله KCL را بنویسیم، یک شاخه درخت جدید وارد می‌شود و آن گره را به دیگر گره‌های درخت وصل می‌کند. چون آن عنصر از مدار در هیچ یک از معادلات قبلی ظاهر نشده است، یک معادله مستقل به دست آمده است. این مطلب برای هر یک از (N - 1) گره صحیح است و از این رو ما (N - 1) معادله مستقل از هم داریم.

تمرین

پ ۱ـ۱ (الف) برای مدار شکل (پ ۸ـ۱) چند درخت می‌توان ساخت که هر پنج پیشنهاد ترسیم درخت لیست شده قبلی را دنبال کند؟ (ب) یک درخت مناسب رسم کنید، دو معادله برای دو مجهول بنویسید و i_3 را پیداکنید. (ج) منبع وابسته چه توانی تولید می‌کند؟

جواب: 1 ، 7.2 A و 547 W.



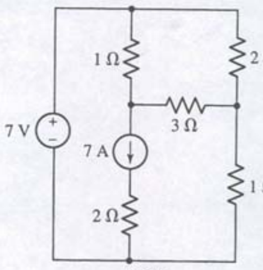
شکل پ ۸ـ۱

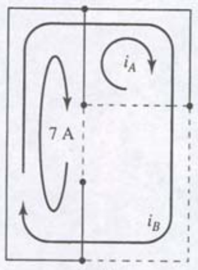
پ ۲ـ۱ تحلیل حلقوی

اکنون استفاده از درخت را در یافتن مجموعه مناسبی از معادلات حلقه ملاحظه می‌کنیم. از بعضی لحاظ این روش دوگان معادلات گره است. دوبار متذکر می‌شویم که هر چند می‌توان تعیین کرد که هر مجموعه معادلاتی که بنویسیم کافی و مستقل می‌باشند، ولی نباید انتظار داشت که روش مستقیماً منجر به هر مجموعه معادله مناسبی گردد.

مجدداً با رسم درخت آغاز می‌کنیم و از همان مجموعه قوانین تحلیل گرهی کلی استفاده می‌نماییم. هدف برای تحلیل گرهی یا حلقه‌ای استقرار ولتاژها در درخت و جریان‌ها در همدرخت است. این قانون برای منابع لازم‌الاجرا و برای کمیت‌های کنترلی مطلوب است.

در هر صورت اکنون به جای تخصیص ولتاژ به هر شاخه در درخت، یک جریان (البته همراه با جهت پیکان مرجع) به هر عنصر در همدرخت یا در هر رابط نسبت می‌دهیم. اگر 10





پ ۹ـ۱ (الف) یک مدار ساده. (ب) یک درخت طوری انتخاب می‌شود که منبع جریان در یک هم‌درخت و منبع ولتاژ در یک شاخه درخت باشد.

رابط وجود داشته باشد، دقیقاً 10 جریان خواهیم داشت. اگر رابط منبع جریان باشد، آن را به‌عنوان جریان رابط می‌گیریم. توجه کنید که هر جریان رابط را می‌توان یک جریان حلقه هم تصور کرد، زیرا هر رابط بین دو گره قرار دارد و این دو گره باید از طریق مسیری در درخت به هم وصل شده باشد. پس به هر رابط، حلقه خاصی نسبت می‌دهیم که از آن رابط و یک مسیر واحد در درخت تشکیل شده باشد. واضح است که جریان تخصیص یافته می‌تواند یک جریان حلقه یا یک جریان رابط تصور شود. هنگام تعریف جریان، انتساب جریان‌ها به رابط‌ها مناسب‌تر است. تفسیر جریان به عنوان جریان حلقه هنگام نوشتن معادلات راحت‌تر است زیرا ما قانون KVL را حول هر حلقه می‌نویسیم.

بیایید تعریف جریان‌های رابط را با ملاحظه مدار شکل (پ ۹ـ۱ (الف)) بررسی کنیم. مدار انتخابی یکی از چند نمونه‌ای است که ممکن است در آن منبع ولتاژ در یک شاخه درخت و منبع جریان در یک رابط باشد. ابتدا رابط حاوی منبع جریان را بررسی می‌نماییم. حلقه مربوط به این رابط تک‌حلقه سمت چپ است و بنابراین ما جریان رابط خود را حول این تک حلقه در نظر می‌گیریم (شکل (پ ۹ـ۱ (ب)). انتخاب مسجلی برای این نماد جریان رابط "7A" است. توجه کنید که هیچ جریان دیگری نمی‌تواند از این رابط خاص عبور کند و بنابراین مقدار آن باید دقیقاً همان جریان متعلق به منبع جریان، یعنی 7A باشد.

سپس توجه خود را به رابط متعلق به مقاومت 3 Ω معطوف می‌کنیم. حلقه مربوط به آن تک حلقه سمت راست بالا است، و این جریان حلقه با i_A در شکل الف ـ ۱ـ۹ (ب) دیده می‌شود. آخرین رابط متعلق به مقاومت 1 Ω پایینی بوده و تنها مسیر بین پایانه‌های آن در درخت، محیط مدار است. این جریان حلقوی را i_B می‌نامیم و پیکان آن که مسیر و جهت مرجع را نشان می‌دهد، نیز در شکل (پ ۹ـ۱ (ب)) دیده می‌شود، این یک جریان تک حلقه نیست.

توجه کنید که هر رابط تنها یک جریان در خود دارد ولی از هر شاخه درخت ممکن است از 1 تا تعداد کل جریان‌های رابط‌ها بگذرد. استفاده از پیکان‌های طولانی و بسته، برای حلقه‌ها به ما کمک می‌کنند تا جهت جریان‌های حلقه‌ها و نیز شاخه درختی که در آن جاری هستند و بالاخره جهات مرجع را مشخص کنیم. حول هر یک از این این حلقه‌ها باید یک معادله KVL نوشت. متغیرهای به کار رفته همان جریان‌های رابط تخصیص یافته هستند. چون نمی‌توانیم ولتاژ دو سر یک منبع جریان را برحسب جریان منبع بنویسیم و چون قبلاً جریان منبع را به‌عنوان جریان رابط به کار برده‌ایم، هر حلقه حاوی منبع جریان را حذف می‌کنیم.

مثال پ ۴ـ۱

برای مثال شکل (پ ۹ـ۱) ، مقادیر i_A و i_B را بیابید.

ابتدا حلقه i_A را در جهت ساعت‌گرد از گوشه چپ پایین طی می‌کنیم. جریانی که در جهت حرکت ما در مقاومت 1 Ω جاری است $(i_A - 7)$، در مقاومت 2 Ω برای $(i_A + i_B)$ و در رابط فقط i_B است. پس

$$1(i_A - 7) + 2(i_A + i_B) + 3i_A = 0$$

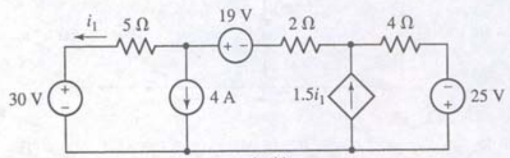
برای رابط ، i_B، حرکتی در جهت ساعت از گوشه چپ پایین نتیجه می‌دهد.

$$-7 + 2(i_A + i_B) + 1i_B = 0$$

حرکت در حلقه متعلق به رابط ، 7A لزومی ندارد. با حل معادلات فوق دوباره $i_A = 0.5\ A$ و $i_B = 2A$ است. می‌بینیم که حل با یک معادله کمتر نسبت به قبل حاصل می‌گردد.

مثال پ ۵ـ۱

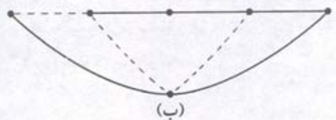
i_1 را در مدار شکل (پ ۱۰ـ۱(الف)) به دست آورید.

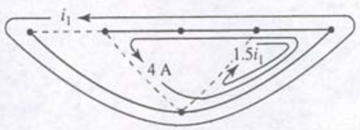


ین مدار از شش گره تشکیل شده و بنابراین باید پنج شاخه داشته باشد. چون در شبکه هشت عنصر وجود دارد، سه رابط در هم‌درخت است. اگر سه منبع ولتاژ را در درخت و دو منبع جریان و جریان کنترلی را در هم‌درخت قرار دهیم، درخت شکل (پ ۱۰ـ۱(ب)) حاصل خواهد شد. منبع جریان 4A حلقه‌ای مانند شکل (پ ۱۰ـ۱(ج)) خواهد داشت. منبع وابسته جریان حلقه $1.5i_1$ را حول تک حلقه سمت راست ایجاد می‌کند و جریان کنترلی i_1 بقیه جریان حلقه را حول محیط مدار به دست می‌دهد. توجه کنید که هر سه جریان از مقاومت 4 Ω عبور می‌کنند. در این‌جا یک کمیت مجهول داریم، که i_1 است و پس از چشم‌پوشی از حلقه‌ای که به سیله دو منبع جریان تعریف شده KVL را حول مدار بیرونی اجرا می‌کنیم.

$$-30 + 5(-i_1) + 19 + 2(-i_1 - 4) + 4(-i_1 - 4 + 1.5i_1) - 25 = 0$$

ر کنار سه منبع ولتاژ، سه مقاومت هم در این حلقه وجود دارد. مقاومت 5 Ω یک جریان حلقه ر خود دارد، چون مقاومت نیز یک رابط است. مقاومت 2 Ω دو جریان حلقه، و مقاومت 4 Ω حاوی سه جریان می‌باشد. اگر بخواهیم از خطاهای احتمالی ناشی از حذف جریان‌ها پرهیز کنیم، باید مجموعه جریان حلقه‌ها با دقت ترسیم شوند. در هر صورت معادله قبل تضمین شده ست و نتیجه می‌شود $i = -12\ A$.

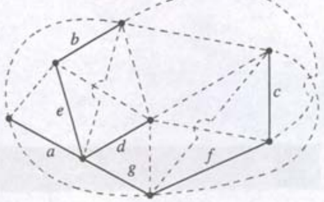




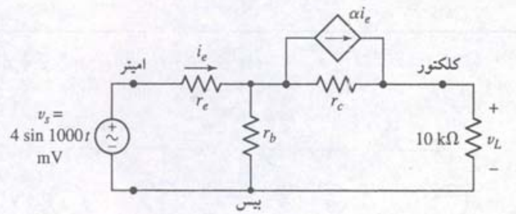
شکل پ ۱۰ـ۱ (الف) مداری که در آن i_1 با یک معادله و استفاده از تحلیل گرهی کلی به‌دست‌می‌آید. (ب) تنها درختی که قواعد بخش پ ۱ـ۱ در آن صدق می‌کند. (ج) جریان‌های سه هم‌درخت همراه با حلقه نشان داده شده‌اند.

چگونه می‌توان کفایت را نشان داد؟ بیایید یک درخت را مجسم کنیم. این درخت فاقد حلقه است و بنابراین حداقل دو گره دارد که به هر یک فقط یک شاخه درخت متصل است. جریان در هر یک از این دو شاخه به راحتی با جریان‌های رابط حاصل از اعمال KCL مشخص ی‌گردد. اگر نقاط دیگری هم باشند که به آن فقط یک شاخه درخت متصل باشد، این جریان‌های شاخه درخت هم بلافاصله به دست می‌آیند. پس درخت شکل (پ ۱۱ـ۱) جریان ر شاخه‌ها a، b، c و d می‌باشند. حال در امتداد شاخه‌های درخت جلو می‌رویم و جریان‌های و f را در شاخه‌های درخت می‌یابیم. فرآیند را تا یافتن همه جریان‌ها در انشعابات می‌توان دامه داد. پس جریان‌های رابط برای یافتن همه جریان‌ها در شاخه‌ها کافی‌اند. نگاه بر وضعیتی که در آن یک درخت ناصحیح ترسیم شده و حاوی حلقه است، مفید می‌باشد. حتی اگر همه جریان رابط‌ها صفر باشند، ممکن است جریانی در این "حلقه درخت" وجود داشته باشد. از ین رو جریان‌های رابط نمی‌توانند این جریان را معین کنند و مجموعه کافی را هم نشان خواهند داد. بنا به تعریف چنین درختی غیرممکن است.

برای ارائه مستقل بودن، نباید فرض کنیم که تنها منابع موجود در شبکه منابع ولتاژ مستقل اشند. همان طور که قبلاً ملاحظه شد، منابع جریان مستقل در مدار معادلات کمتری تولید ی‌کنند، در حالی که منابع جریان وابسته مسبب تعداد بیشتری معادله هستند. اگر فقط منابع لتاژ مستقل وجود داشته باشند. آنگاه دقیقاً $(B - N + 1)$ معادله حلقه برحسب



شکل پ ۱۱ـ۱ مثالی از درخت برای نشان‌دادن کافی‌بودن جریان‌های حلقوی.



شکل پ ۱۲ـ۱ یک منبع ولتاژ سینوسی و یک مقاومت بار به مدار معادل T یک ترانزیستور وصل است. اتصال مشترک ورودی و خروجی در پایانه بیس ترانزیستور می‌باشد و این آرایش را بیس مشترک می‌خوانند.

(B - N + 1) جریان رابط وجود خواهد داشت. برای این‌که نشان دهیم این (B - N + 1) معادلات حلقه مستقل می‌باشند، فقط لازم است نشان دهیم که هر کدام یک KVL را حول یک حلقه نمایش می‌دهند و حاوی رابطی هستند که در دیگر معادلات وجود ندارد. ما می‌توانیم یک مقاومت متفاوت R_1، R_2، ... R_{B-N+1} را در هر یک از این رابط‌ها مجسم کنیم، آن‌گاه مسلم خواهد شد که هیچ یک از معادلات نمی‌تواند از معادلات دیگر به دست آید، زیرا هر یک ضریبی دارد که در دیگر معادلات نیست.

از این رو جریان رابط‌ها برای به دست آوردن حل کامل کفایت می‌کنند و مجموعه معادلات حلقه‌ای که ما برای یافتن جریان‌های رابط به کار می‌بریم، مجموعه‌ای مستقل می‌باشند.

با نگاهی که بر تحلیل کلی گرهی و حلقه‌ای نمودیم، اکنون به مزایا و معایب هر روش می‌پردازیم تا به این ترتیب بتوانیم انتخاب مدّبرانه‌ای برای یورش بر روی یک مسئله به عمل آوریم. به طور کلی روش گرهی به (N - 1) معادله نیاز دارد، ولی در ازای هر منبع ولتاژ وابسته یا مستقل در شاخه درخت تعداد آن یکی کاهش می‌باشد و اگر منبع از نوع ولتاژ کنترل شده ولتاژ یک رابط و یا جریان کنترل شده باشد این تعداد یکی افزایش می‌یابد.

روش حلقه در اصل (B - N + 1) معادله به وجود می‌آورد. با این وجود هر منبع جریان مستقل یا وابسته در یک رابط این تعداد را 1 واحد کم می‌کند، در حالی که هر منبع وابسته از نوع جریان کنترل شده با یک جریان شاخه درخت یا ولتاژ کنترل شده تعداد را یکی اضافه می‌نماید.

به عنوان ختم کلامی در این بحث، بگذارید مدل مدار معادل T را برای یک ترانزیستور در شکل (پ ۱۲ـ۱) بررسی می‌کنیم، که به یک منبع سینوسی 45 sin 1000t mV و یک مقاومت بار 10 kΩ وصل شده است.

مثال پ ۶ـ۱

در مدار شکل (پ ۱۲ـ۱)، جریان ورودی امیتر i_e و ولتاژ بار v_L را پیدا کنید. فرض کنید مقادیر مقاومت $r_e = 50\Omega$ مقاومت بیس $r_b = 500\ \Omega$، مقاومت کلکتور $r_c = 20\ k\Omega$ و نسبت انتقال جریان مستقیم (پیشرو) بیس مشترک $\alpha = 0.99$ باشد.

گرچه جزئیات حل مسئله در تمرین‌های زیر خواسته شده است ولی فعلاً می‌توان دید که تحلیل این مدار ممکن است با ترسیم درختی که سه معادله گرهی کلی (N - 1 - 1 + 1) یا دو معادله حلقه‌ای (B - N + 1 - 1) دارد، انجام شود و نیز می‌توان دقت کرد که سه معادله لازم برحسب ولتاژهای گره - مرجع یا معادلات تک‌حلقه می‌باشد. این‌که چه روشی را اختیار کنید تفاوتی نمی‌کند، نتایج زیر برای این مسئله خاص به دست آمده است:

$$i_e = 18.42 \sin 1000t\ \mu A$$

$$v_L = 122.6 \sin 1000t\ mV$$

و به این ترتیب می‌بینیم که مدار ترانزیستور بهره ولتاژی (v_L / v_S) برابر با 30.6، بهره جریانی $0.666 = (v_L/10{,}000 i_e)$ و بهره توانی برابر با حاصل‌ضرب آن دو $20.4 = 30.6(0.666)$ را دارا است. می‌توان با کار در آرایش امیتر مشترک بهره‌های بالاتری را هم داشت.

تمرین

پ ۲ـ۱ یک درخت مناسب رسم کنید و از تحلیل حلقه کلی برای یافتن i_{10} در مدار (الف) شکل (پ ۱۳ـ۱(الف)) با نوشتن فقط یک معادله که برحسب i_{10} و (ب) شکل (پ ۱۳ـ۱(ب)) با نوشتن فقط دو معادله که در آن i_{10} و i_3 متغیرند، استفاده کنید.

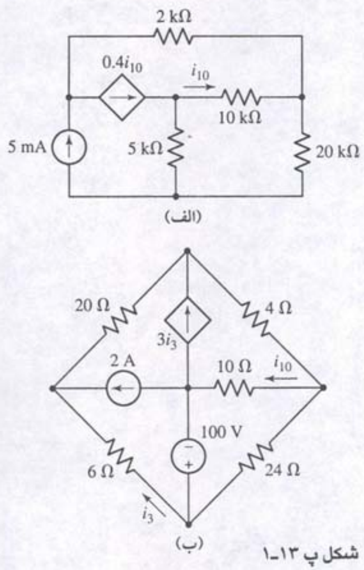
پ ۳ـ۱ برای مدار معادل تقویت کننده ترانزیستوری در شکل (پ ۱۲ـ۱) فرض کنید $r_e = 50\ \Omega$، $r_b = 500\ \Omega$، $r_c = 20\ k\Omega$ و $\alpha = 0.99$ باشد. با استفاده از ترسیم مناسب یک درخت و استفاده از موارد زیر مقدار i_b و v_L را پیدا کنید. (الف) دو معادله حلقه (ب) سه معادله گرهی با یک گره مرجع مشترک برای ولتاژ (ج) سه معادله گرهی بدون گره مشترک.

پ ۴ـ۱ مدارهای معادل تونن و نورتن از نظر بار با 10 kΩ در شکل (پ ۱۲ـ۱) را با (الف) مقدار v_L مدار باز (ب) با جریان اتصال کوتاه روبه پایین (ج) مقاومت معادل تونن معین کنید. همه مقادیر در تمرین (پ ۳ـ۱) داده شده است.

جواب: پ ۲ـ۱: 4.69 A، -4.00 mA

جواب: پ ۳ـ۱: 122.6 sin 1000t mV، 18.42 sin 1000t μA

جواب: پ ۴ـ۱: 2.05 kΩ ; 72.5 sin 1000t μA، 147.6 sin 1000t mV



شکل پ ۱۳ـ۱

پیوست ۲

حل معادلات همزمان

سیستم معادلات ساده زیر را ملاحظه کنید.

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \quad (۱)$$
$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \quad (۲)$$
$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \quad (۳)$$

ین مجموعه معادلات را می‌توان با حذف سیستماتیک متغیرها حل کـرد. با این وجود، چنین روشی طولانی است و اگر به طور سیستماتیک عمل نکنیم، در معادلات همزمان بیشتر هرگز به جواب خواهیم رسید. خوشبختانه انتخاب‌های بسیار زیادی در اختیار ما رار دارند که بعضی از آن‌ها را در این پیوست ملاحظه خواهیم کرد.

ماشین حساب علمی

ساید سرراست‌ترین روش هنگامی باشد که با سیستم معادلاتی مانند عادله (۱) الی (۳) سروکار داریم و در آن‌ها ضرایب عددی وجود ارند و ما نیز برای مجهولات مقادیر خاصی را می‌خواهیم (برخلاف وابط جبری). برای این کار کافی است از یک ماشین حساب علمی که ر بازار یافت می‌شود، استفاده کنیم. مثلاً در ماشین حساب TI-8 Texas Instruments به این ویژگی با فشار [SIMULT] [2nd] دست می‌یابیم. آنچه نمایش داده می‌شود، مطابق یر است:

```
SIMULT
Number =
```

ه ما باکلیدهای [ENTER] [3] به آن واکنش نشان می‌دهیم. آنگاه اشین حساب چنین نمایش می‌دهد.

```
a1, 1x1 ... a1, 3 × 3 = b1
a1, 1 =
a1, 2 =
a1, 3 =
b1 =
```

به این معنی است که می‌توانیم داده‌های عددی را برای معادله (۱) رد کنیم. توجه کنید که قبل از آغاز چنین عملی، باید سیستم معادلات به طور مرتب بنویسیم تا از اشتباه در ضرایب خودداری شود. با شته کلیدهای زیر پاسخ می‌دهیم:

[7] [ENTER] [(−)] [3] [ENTER] [(−)] [4] [ENTER]
[(−)] [11] [ENTER]

آنگاه با دومین معادله خود مواجه می‌شویم.

پس از ورود اطلاعات هر سه معادله، کلید [▣] را می‌فشاریم تا فرمان حل مجهولات x1، x2 و x3 داده شود (که همان v_1، v_2 و v_3 است). پس ماشین‌حساب مقادیر زیر را نشان می‌دهد:

```
x1 = 1.000
x2 = 2.000
x3 = 3.000
```

باید توجه کرد که هر ماشین روش ورود اطلاعات خاص خود را برای حل معادلات همزمان دارد. بنابراین نباید کتابچه‌های راهنما یا دستورالعمل‌های آن را دور انداخت.

ماتریس‌ها

روش قدرتمند دیگری در حل مسائل همزمان بر مفهوم ماتریس مبتنی است. معادلات (۱)، (۲) و (۳) را دوباره در نظر بگیرید. آرایه ضرایب ثابت دسته معادلات قبل که به صورت زیر است را

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

ماتریس می‌خوانند. دلیل انتخاب حرف G این است که هر عنصر ماتریس یک هادی است. ماتریس به خودی خود هیچ ارزشی ندارد و صرفاً آرایه‌ای از عناصر است. ما برای نمایش یک ماتریس از حرف بزرگ استفاده می‌کنیم و آرایه را هم با کروشه می‌بندیم.

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد را ماتریس $m \times n$ (m ضربدر n) می‌خوانند. پس

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس (2×3) می‌باشد و ماتریس G در مثال ما یک ماتریس 3×3 است. یک ماتریس $(n \times n)$ یک ماتریس مربعی مرتبه n می‌باشد.

یک ماتریس (m × 1) را ماتریس ستونی یا بردار می‌نامند. پس:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس ستونی (2 × 1) از فیزور ولتاژ است و

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

یک بردار (2 × 1) فیزور جریان است یک ماتریس (1 × n) بردار سطری خوانند.

دو ماتریس (m × n) با هم برابرند، اگر عناصر متناظر آن‌ها برابر باشند. بنابراین اگر a_{jk} عنصری از A واقع بر سطر j و ستون k باشد، و b_{jk} عنصری از ماتریس B و در سطر j و ستون k باشد، آنگاه $A = B$ است. به شرطی که برای همه مقادیر $m \geq j \geq 1$ و $n \geq k \geq 1$ فقط و فقط $a_{jk} = b_{jk}$ باشد. پس اگر

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{bmatrix}$$

آنگاه $V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$ و $V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$ می‌باشد.

با جمع عناصر متناظر می‌توان دو ماتریس را با هم جمع کرد. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون ضرب ماتریسی AB را ملاحظه کنیم که A یک ماتریس (m × n) و B یک ماتریس (p × q) است. اگر $p = n$ باشد، ماتریس‌ها را **کانفورمال** یا **همسنگ** گویند و حاصل‌ضرب آن‌ها وجود دارد. یعنی ضرب ماتریس هنگامی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس اول و سطرهای ماتریس دوم برابر می‌باشد.

تعریف رسمی‌تر ضرب ماتریسی بیان می‌کند که ضرب ماتریس A (m × n) در ماتریس B (n × q) ماتریس B یک ماتریس (m × q) با عناصر c_{jk} و $m \geq j \geq 1$ و $q \geq k \geq 1$ می‌باشد که در آن

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \ldots + a_{jn}b_{nk}$$

یعنی برای یافتن عنصری در سطر دوم و ستون سوم یک حاصل‌ضرب، ما هر عنصری در ستون دوم A را در عنصر متناظرش در ستون سوم B ضرب می‌کنیم و نتیجه n ضرب را با یکدیگر جمع می‌کنند. مثلاً با ضرب ماتریس A (3 × 2) و ماتریس B (2 × 3) داریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

نتیجه نیز یک ماتریس 2 × 2 عنصری است.

به عنوان یک مثال عددی برای ضرب ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$6 = (3)(2) + (2)(-2) + (1)(4)$$
$$4 = (3)(3) + (2)(-1) + (1)(-3)$$

ضرب ماتریسی جابه‌جاپذیر نیست. مثلاً با فرض این‌که ماتریس C (3 × 2) و ماتریس D (2 × 1) مفروض باشند، واضح است که ضرب CD را ممکن است محاسبه کنیم ولی ضرب DC حتی تعریف هم نشده است.

به عنوان آخرین مثال فرض کنید:

$$t_A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

و

$$t_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

باشند و t_At_B و t_Bt_A تعریف شده باشند. با این وجود،

$$t_At_B = \begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

و

$$t_Bt_A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

تمرین

پ ۱-۲ با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ باشند، مطلوب است (الف) A + B، (ب) AB، (ج) BA، (د) AV + BC و (ه) $A^2 = AA$.

جواب: $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -8 & -18 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} V_1 - 3V_2 + 170 \\ 3V_1 + 5V_2 - 10 \end{bmatrix}$

عکس ماتریس

اگر ما سیستم معادلات خود را به صورت ماتریس بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

می‌توانیم بردار ولتاژ را با ضرب دو طرف معادله (۴) در عکس ماتریس G به دست آوریم:

$$G^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

در این روش از اتحاد $G^{-1}G = I$ استفاده می‌کنیم که در آن I

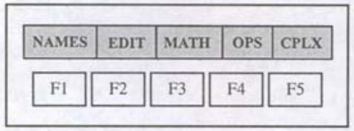
ماتریس واحد است. ماتریس واحد یک ماتریس مربعی است که همه عناصر آن صفر و فقط عناصر قطر اصلی 1 است. پس معادله (۵) چنین خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

زیرا ماتریس واحد ضرب‌در هر بردار برابر با خود بردار است. پس حل سیستم معادلات، تبدیل به موضوع به دست آوردن عکس ماتریس G می‌گردد. بسیاری از ماشین‌حساب‌های علمی امکان اجرای جبر ماتریسی را دارا هستند.



شکل پ ۱-۲ نمایش دستکاری ماتریسی یک *TI-86* با عملیات کلیدی مربوطه که در زیر هر قلم از منو نشان داده شده است.

به عنوان مثال دوباره با *TI - 86* رشته کلیدزنی [2nd] [MATRX] را انجام می‌دهیم و آن‌چه در شکل پ ۱-۲ ملاحظه می‌کنید را مشاهده خواهید کرد.

برای تولید یک ماتریس جدید به نام G، ⊡ را فشار می‌دهیم تا روی صفحه نمایش چنین ظاهر شود:

```
MATRX
Name =
```

پس [G] [ENTER] را می‌زنیم و می‌خوانیم:

```
MATRX : G        1      ×1
[0                       ]
```

سپس دوبار [3] [ENTER] را می‌زنیم تا G را به صورت ماتریس 3 × 3 تعریف کنیم. صفحه‌نمایش چنین تغییر می‌کند:

```
MATRX : G      3 × 3
[0     0     0]
[0     0     0]
[0     0     0]
1,       1 = 0
```

با تایپ زیر پاسخ می‌دهیم:

[7] [ENTER] [(−)] [3] [ENTER] [(−)] [4] [ENTER]

و آنقدر ادامه می‌دهیم تا هر ضریبی وارد شود، سپس [EXIT] را می‌فشاریم. آنگاه بردار جریان I را با احضار مجدد منو ماتریس ایجاد می‌کنیم و ماتریس I را با ابعاد 1 × 3 به وجود می‌آوریم. با ورود 11-، 3، 25 پیش می‌رویم. با تایپ [ENTER] [I] [ALPHA] یا [ALPHA] [G] [ENTER] داده‌ها را چک می‌کنیم. اکنون ماشین حساب آماده دستکاری آرایه‌ها برای حل سیستم معادلات است. فقط کافی است تایپ کنیم:

[ALPHA] [G] [x^{-1}] [I] [ENTER]

برای درک جزئیات مجدداً خواننده به راهنمای ماشین خاص خود ارجاع داده می‌شود.

دترمینان‌ها

گرچه ماتریس به تنهایی ارزشی ندارد، **دترمینان** یک ماتریس مربع ارزشمند است. دقیق‌تر بگوییم با دترمینان یک ماتریس یک مقدار است ولی ما با استفاده مشترک هر دوی آن‌ها را آرایه و مقدارش را دترمینان می‌نامیم. ما دترمینان را با Δ نشان می‌دهیم و زیرنویس مناسبی هم برای ارتباطش با ماتریس مربوطه به کار خواهیم برد. پس:

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

توجه کنید برای محصور کردن دترمینان از دو خط عمودی استفاده شده است.

مقدار هر دترمینان از بسط آن با کهادش به دست می‌آید. برای انجام آن، ما یک سطر j یا هر ستون k را انتخاب می‌کنیم هر عنصر در آن سطر یا ستون را در کهادش و در $(-1)^{j+k}$ ضرب می‌کنیم و سپس حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع می‌نماییم. کهاد سطر j و ستون k برابر است با دترمینانی که از حذف سطر j و ستون k به دست می‌آید و با Δ_{jk} نمایش داده می‌شود.

به عنوان مثال اجازه دهید تا دترمینان Δ_G را در روی ستون 3 بسط دهیم. ابتدا عدد (4-) را در بالای این ستون در $(-1)^{1+3} = 1$ و سپس درکهاد آن ضرب کنیم:

$$(-4)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

این‌کار را روی دو عنصر دیگر ستون سه تکرار و نتایج را با هم جمع می‌کنیم:

$$-4\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

هر کهاد حاوی فقط دو سطر و دو ستون است. این کهادها از مرتبه 2 هستند و مقدار آن‌ها به سادگی با بسط مجدد کهاد معین می‌شود که کاری آسان است. بنابراین، برای اولین دترمینان، بسط روی اولین ستون و ضرب (3-) در $(-1)^{1+1}$ و کهاد آن انجام می‌دهیم که فقط عنصر (2-) است و سپس (4-) را در $(-1)^{2+1}$ و در ۶ ضرب می‌کنیم. پس:

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - 4(-6) = 30$$

معمولاً بهتر است نتیجه دترمینان را به صورت "سمت چپ بالا ضربدر سمت راست پایین منهای سمت راست بالا ضربدر سمت چپ پایین" به خاطر بسپاریم. بالاخره:

$$\begin{aligned}\Delta_G &= -4[(-3)(-2)\ -6(-4)] \\ &\quad + 2[(7)(-2) - (-3)(-4)] \\ &\quad + 11[(7)(6) - (3)(-3)] \\ &= -4(30) + 2(-26) + 11(33) \\ &= 191\end{aligned}$$

به‌عنوان تمرین همین دترمینان را حول اولین سطر بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\Delta_G &= 7\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7(62) + 3(-41) - 4(30) \\ &= 191\end{aligned}$$

بسط به وسیله کهاد برای یک دترمینان با هر مرتبه‌ای قابل قبول است. با تکرار این قوانین برای محاسبه دترمینان به فرم کلی‌تر، با فرض ماتریس a

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

می‌توان Δ_a را با بسط برحسب کهادها حول هر سطر j به دست آورد.

$$\begin{aligned}\Delta_a &= a_{j1}(-1)^{j+1}\Delta_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{jN}(-1)^{j+N}\Delta_{jN} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{jn}(-1)^{j+n}\Delta_{jn}\end{aligned}$$

یا حول هر ستون k

$$\begin{aligned}\Delta_a &= a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}\Delta_{2k} + \cdots + a_{Nk}(-1)^{N+k}\Delta_{Nk} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(-1)^{n+k}\Delta_{nk}\end{aligned}$$

حاصل‌ضرب $(-1)^{j+k}$ در کهاد Δ_{jk} را **هم ضریب** عنصر سطر j و ستون k گویند و با C_{jk} نمایش می‌دهند. درواقع $(-1)^{j+k}$ ضربدر Δ_{jk} است. پس $C_{11} = \Delta_{11}$ ولی $C_{12} = -\Delta_{12}$ است. اکنون می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta_a = \sum_{n=1}^{N} a_{jn}C_{jn} = \sum_{n=1}^{N} a_{nk}C_{nk}$$

برای مثال، بیایید دترمینان مرتبه چهار زیر را بررسی کنیم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

می‌بینیم که

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(10+3) + 1(4+9) - 3(-2+15) = 26$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1(10+3) + 2(4+9) + 0 = 13$$

و $C_{11} = 26$ در صورتی که $C_{12} = -13$ است. به‌عنوان تمرین مقدار Δ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2C + (-1)C + (-2)C + 0 \\ &= 2(26) + (-1)(-13) + (-2)(3) + 0 = 59\end{aligned}$$

دستور کرامر

اکنون به دستور کرامر نگاه می‌کنیم که ما را قادر می‌سازد تا مقدار متغیرهای مجهول را به دست آوریم. این دستور در حل سیستم معادلاتی که ضرایب عددی آن‌ها هنوز مشخص نیست به کمک ماشین حساب مفید است. دوباره معادلات (۱)، (۲) و (۳) را ملاحظه می‌کنیم. دترمینان Δ_1 را چنین تعریف می‌کنیم که از جایگزینی اولین ستون Δ_G با سه ثابت در سمت راست سه معادله به دست می‌آید. پس

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

ما آن را حول اولین ستون بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -11\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -682 + 123 + 750 = 191\end{aligned}$$

آن‌گاه دستور کرامر چنین بیان می‌کند که

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1\ \text{V}$$

و

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2\ \text{V}$$

و بالاخره

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix} = \frac{1092 - 291 - 228}{191} = 3\ \text{V}$$

قاعده کرامر به یک سیستم N معادله خطی همزمان با N مجهول نیز قابل اعمال است. برای iامین متغیر v_i داریم:

$$v_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_G}$$

تمرین

پ ۲-۲ مطلوب است (الف) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$، (ب) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$، (ج) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

(د) مطلوب است i_2 به شرطی که $5i_1 - 2i_2 - i_3 = 100$، $-2i_1 + 6i_2 - 3i_3 - i_4 = 0$، $-i_1 - 3i_2 + 4i_3 - i_4 = 0$ و $-i_2 - i_3 = 0$.

جواب: 4 ، 33 ، 411- و 1.266.

پیوست ۳

اثبات قضیه تونن

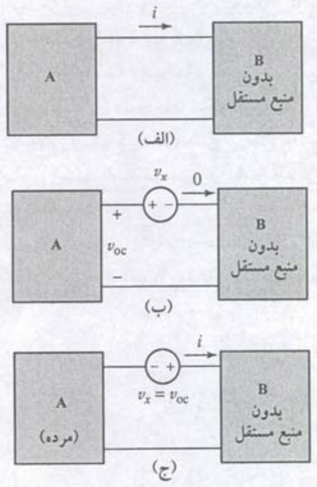
ما قضیه تونن را همان‌طور که در بخش ۴-۵ از فصل ۵ بیان نمودیم، اثبات خواهیم کرد. قضیه به منظور سهولت مراجعه دوباره در زیر بیان شده است.

> فرض کنید یک مدار خطی داشته باشیم، آن را به دو شبکه A و B تقسیم و با دو سیم به هم متصل کنید. ولتاژ v_{oc} را به‌عنوان ولتاژ مدار باز در دو سر پایانه‌های A وقتی که B قطع است، تعریف نمایید. آن‌گاه اگر همه منابع ولتاژ و جریان مستقل در A کشته شوند (صفر شوند) و یک منبع ولتاژ v_{oc} با قطبیت مناسب سری با **شبکه مرده A** گردد، همه جریان‌ها و ولتاژها در B بدون تغییر باقی می‌مانند.

ما اثبات را به این ترتیب نشان خواهیم داد که شبکه اصلی A و معادل تونن آن، هر دو جریان یکسانی را به داخل پایانه‌های شبکه B ارسال می‌کنند. اگر جریان‌ها یکسان باشند، آن‌گاه ولتاژها هم برابر خواهند بود. به بیان دیگر اگر جریان معینی که می‌توان آن را جریان منبع فرض کرد، به شبکه B اعمال کنیم، آن‌گاه منبع جریان و شبکه B مداری به وجود می‌آورند که دارای یک ولتاژ ورودی خاص به‌عنوان پاسخ است. بنابراین جریان، ولتاژ را تعیین می‌کند. به همین‌ترتیب اگر بخواهیم می‌توانیم نشان دهیم که ولتاژ پایانه در B بدون تغییر است، زیرا ولتاژ هم به طور انحصاری جریان را معین می‌سازد. اگر ولتاژ و جریان ورودی به B بدون تغییر باشند، آن‌گاه نتیجه می‌شود که جریان‌ها و ولتاژها در سرتاسر شبکه B بدون تغییرند.

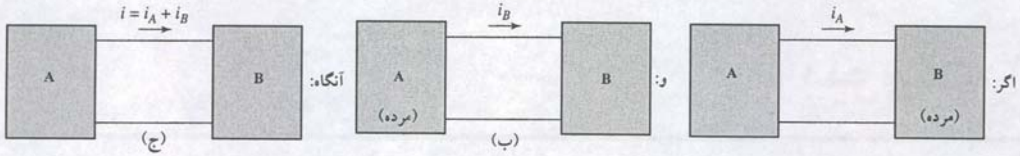
ابتدا باید قضیه را برای حالت شبکه غیرفعال B ثابت کنیم (یعنی بدون منابع مستقل). پس از آن با اصل تجمیع قضیه را گسترش داده و شبکه‌هایی با منابع مستقل در نظر می‌گیریم. هر شبکه می‌تواند منابع وابسته داشته باشد، مشروط بر این‌که متغیر کنترل کننده آن‌ها در همان شبکه باشد.

بنابراین جریان i که در سیم بالایی از شبکه A به شبکه B در شکل پ ۱-۳ (الف) جاری است، کلاً به وسیله منابع مستقل در شبکه A تولید می‌گردد. اکنون تصور کنید که یک منبع ولتاژ v_x را که به آن منبع تونن می‌گوییم، در سیمی که i در آن اندازه‌گیری می‌شود، طبق



شکل پ ۱-۳ یک شبکه خطی A و یک شبکه B که حاوی منابع مستقل نیست. کنترل برای منابع وابسته باید در همان بخش از شبکه ظاهر شود. (ب) منبع تونن واردشده تا $i = 0$ تنظیم شود. ولتاژی در دو سر شبکه B ظاهر نمی‌گردد و بنابراین $v_x = v_{oc}$ است. سپس منبع تونن جریان $-i$ و شبکه A جریان i را تولید می‌نمایند. (ج) منبع تونن معکوس‌شده و شبکه A کشته می‌شود، پس جریان i است.

شکل پ ۱-۳(ب) به آن اضافه کنیم و سپس اندازه و تغییرات زمانی v_x را طوری تنظیم نماییم که جریان به صفر برسد. بنا به تعریف، ولتاژ دو سر پایانه‌های شبکه A باید v_{oc} باشد. چون $i = 0$ است. شبکه B فاقد منابع مستقل است و جریانی هم وارد پایانه‌هایش نمی‌شود. بنابراین ولتاژی در دو سر پایانه‌های شبکه B وجود ندارد و بنا به قانون ولتاژ کیرشهف، ولتاژ منبع تونن v_{oc} است، یعنی $v_x = v_{oc}$. به‌علاوه چون منبع تونن و شبکه A متفقاً جریانی به B می‌فرستند و چون شبکه A خود جریان i را حمل می‌کند، اصل تجمیع لازم می‌دارد تا منبع تونن خود جریان $-i$ را به B بفرستد. بنابراین منبعی که به تنهایی در جهت



شکل پ ۲ـ۳ اصل تجمیع اجازه می‌دهد تا جریان i مجموع دو پاسخ جزئی باشد.

معکوس عمل می‌کند، طبق شکل پ ۱-۳(ج)، جریان i را در سیم بالایی تولید می‌نماید. با این وجود این وضعیت همان نتیجه‌گیری حاصل از قضیه تونن است: یعنی منبع تونن v_{oc} سری با شبکه غیرفعال A معادل با شبکه مفروض می‌باشد.

اکنون بیایید حالتی را بررسی کنیم که شبکه B از نوع فعال باشد. آنگاه جریان i را از شبکه A به شبکه B در سیم بالایی فرض می‌کنیم که از دو بخش i_A، i_B ساخته شده است. جریان i_A جریانی است که از شبکه A تولید می‌شود و i_B هم جریان شبکه B به تنهایی است. این که جریان را به دو بخش تقسیم کرده‌ایم، ناشی از اصل تجمیع برای این دو شبکه خطی است. پاسخ کامل و دو پاسخ جزئی با نمودار شکل پ ۲-۳ مشخص شده‌اند.

قبلاً جریان پاسخ جزئی i_A را ملاحظه کرده‌ایم. اگر شبکه B غیرفعال باشد، می‌دانیم که شبکه A را می‌توان با منبع تونن و شبکه مرده A جایگزین کرد. به بیان دیگر، از سه منبعی که باید به خاطر بسپاریم، یعنی منابع در شبکه A، در B و منبع تونن، پاسخ i_A وقتی A و B مرده‌اند و منبع تونن غیرفعال است، رخ می‌دهد. اکنون آماده اصل تجمیع هستیم. A را غیرفعال نگه می‌داریم ولی B را روشن و منبع تونن را خاموش می‌کنیم. بنا به تعریف، پاسخ جزئی i_B حاصل می‌گردد. با تجمیع نتایج، در ازای A کشته و منابع تونن و شبکه B فعال، پاسخ برابر است با $i_A + i_B$. این حاصل جمع، همان جریان اصلی i است و وضعیتی که در آن منبع تونن و شبکه B فعال ولی مرده است، همان مدار معادل تونن مطلوب است. پس شبکه فعال A را می‌توان با منبع تونن یعنی ولتاژ مدار باز که با شبکه A مرده سری است، بدون توجه به حالت شبکه B جایگزین کرد. شبکه B ممکن است فعال باشد یا نباشد.

پیوست ۴

آموزش PSpice

SPICE به معنی برنامه شبیه‌سازی با تأکید بر مدارهای مجتمع[1] است. این یک برنامه بسیار قوی با استاندارد صنعتی است و در سرتاسر جهان برای تحلیل انواع مدارها به کار می‌رود. SPICE ابتدا در اوایل دهه ۱۹۷۰ به وسیله دونالد اُ. پترسون[2] و همکارانش در دانشگاه کالیفرنیا در برکلی ساخته شد. جالب بود که پترسون توزیع مجانی دانش ایجادشده در آزمایشگاه‌های دانشگاه را انجام داد و راهی برخلاف کسب منافع مالی را پیش گرفت. در سال ۱۹۸۴، شرکت مایکروسیم[3]، نسخه PC آن را به نام PSpice تولید کرد، و طی آن واسط‌های گرافیکی را حول هسته SPICE ایجاد نمود. اکنون انواع مختلفی از SPICE ها به صورت تجاری موجودند، که با یکدیگر رقابت هم دارند.

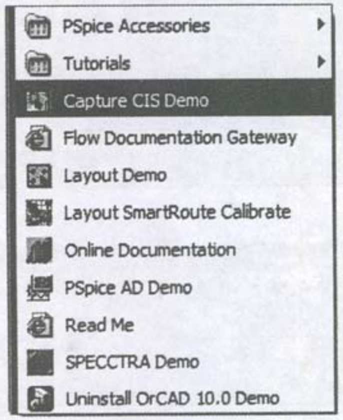
هدف از این پیوست این‌است‌که اصول تحلیل مدار به کمک کامپیوتر معرفی شود. توضیحات بیشتر در کتب اصلی و مرجع‌های لیست تحت عنوان "خواندنی‌های کمکی" آمده است. عناوین پیشرفته‌تر عبارتنداز: چگونه حساسیت یک متغیر خروجی به تغییرات در مقدار یک قطعه خاص را می‌توان معین کرد؛ چگونه می‌توان خروجی را در برابر انواع مقادیر منبع رسم کرد. تعیین خروجی ac به عنوان تابعی از فرکانس منبع؛ روش‌های تحلیل پارازیت و اعوجاج؛ مدل‌های قطعات غیرخطی؛ چگونه آثار دما را روی انواع مدار می‌توان مدل‌سازی نمود.

خرید مایکروسیم به وسیله OrCAD و به دنبال آن خرید OrCAD به وسیله Cadence منجر به چند تغییر در این بسته شبیه‌سازی مدار گردید. در زمان نوشتن این متن نسخه OrCAD 10.3 وارد بازار شده است و حدود US$1000 به فروش می‌رسد؛ نسخه قبلی یعنی OrCAD 10.3 Lite به صورت مجانی از سایت (www.cadence.com) قابل تهیه است. این ویرایش جدید جایگزین نسخه دانشجویی PSpice 9.1 شده و هر چند کمی متفاوت، خصوصاً برحسب اصلاح شماتیک، برای کاربران نسخه قبلی PSpice آشنا است.

مستنداتی که همراه نسخه نمایشی OrCAD 10.0 Lite می‌باشد چند قید را لیست کرده است که در مورد نسخه حرفه‌ای تجاری چنین نیست. مهم‌ترین آن‌ها عبارتست از اینکه می‌توان 60 قطعه یا کمتر را ذخیره کرده و شبیه‌سازی نمود. مدارهای بزرگ‌تر را می‌توان ترسیم و مشاهده کرد. ما قصد کار با ادیتور شماتیک OrCAD Capture را داریم زیرا ویرایش فعلی خیلی شبیه به ادیتور PSpice A/D Schematic Capture است. هر چند در حال حاضر Cadence هم PSpice A/D را در اختیار گذاشته است ولی کمتر پشتیبانی می‌شود.

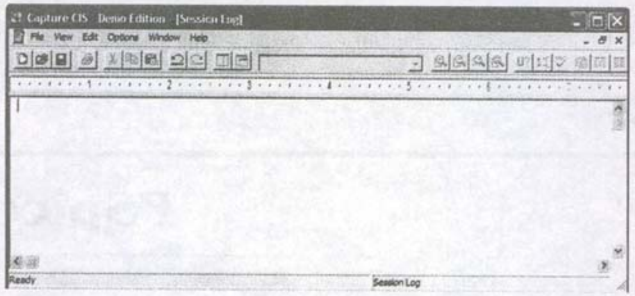
شروع می‌کنیم

تحلیل مدار به کمک کامپیوتر متشکل از سه مرحله جدا از هم است: (۱) ترسیم شماتیک؛ (۲) شبیه‌سازی مدار؛ و (۳) استخراج اطلاعات موردنظر از خروجی شبیه‌سازی. ادیتور شماتیک OrCAD Capture از طریق برنامه‌های ویندوز تحت منوی start آغاز می‌شود، که خیلی شبیه شکل پ ۱ـ۴ ظاهر می‌گردد. با انتخاب Capture CIS Demo، ادیتور شماتیک مطابق شکل پ ۲ـ۴ باز می‌شود.



شکل پ ۱ـ۴ منوی برنامه‌های OrCAD Demo.

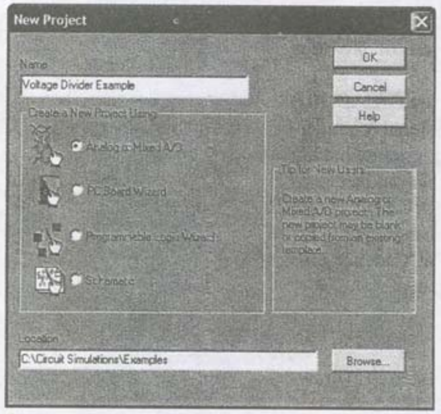
1. Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis
2. Donald O. Peterson 3. Microsim



شکل پ ۴-۲ پنجره Capture CIS Demo.

در زیر منوی File، ابتدا New و سپس Project را انتخاب کنید؛ آنگاه پنجره شکل پ ۴-۳ (الف) پدید می‌آید. پس از تهیه یک نام فایل شبیه‌سازی و یک مسیر دایرکتوری، پنجره شکل پ ۴-۳ (ب) دیده خواهد شد (به سادگی "blank project" را انتخاب نمایید) اینک با پنجره ادیتور شماتیک اصلی مطابق شکل ۴-۴ مواجه خواهیم بود.

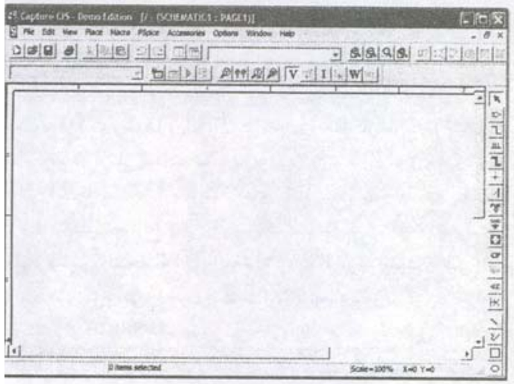
در این‌جا آماده ترسیم یک مدار هستیم، لذا اجازه بدهید یک مدار ساده تقسیم ولتاژ برای ایجاد امکان توضیح پیاده‌سازی کنیم. ما ابتدا قطعات لازم را روی صفحه قرار می‌دهیم و سپس آن‌ها را به هم وصل می‌نماییم.



(الف)

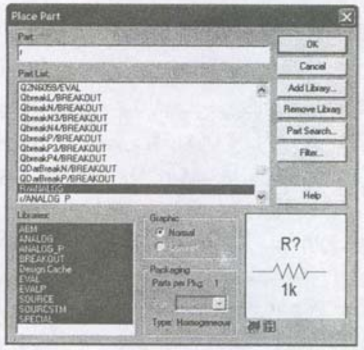
(ب)

شکل پ ۴-۳ (الف) پنجره New Project. (ب) پنجره Create PSpice Project.



شکل پ ۴-۴ صفحه شماتیک Main Capture CIS Demo.

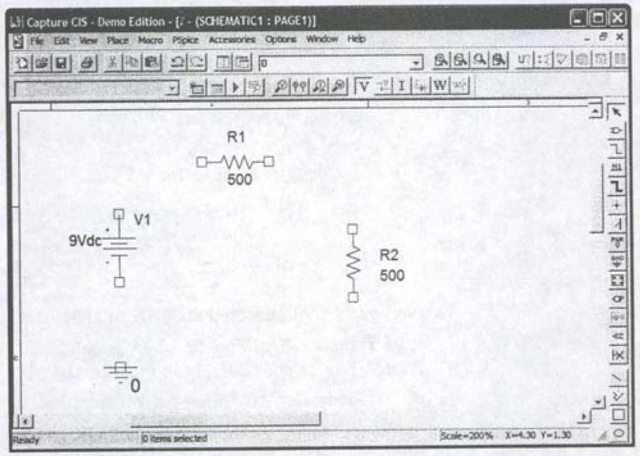
منوی Place را پایین می‌کشیم و Part را برمی‌گزینیم، در نتیجه پنجره شکل پ ۴-۵ مشاهده خواهد شد. با تایپ حرف کوچک "r"، روی OK کلیک می‌کنیم و اینک می‌توانیم یک مقاومت را در پنجره شماتیک با استفاده از ماوس حرکت دهیم. یک کلیک مقاومت (R_1) را در محل ماوس قرار می‌دهد. کلیک دوم مقاومت دوم را روی شماتیک قرار می‌دهد (R_2). یک کلیک راست و انتخاب End Mode استقرار



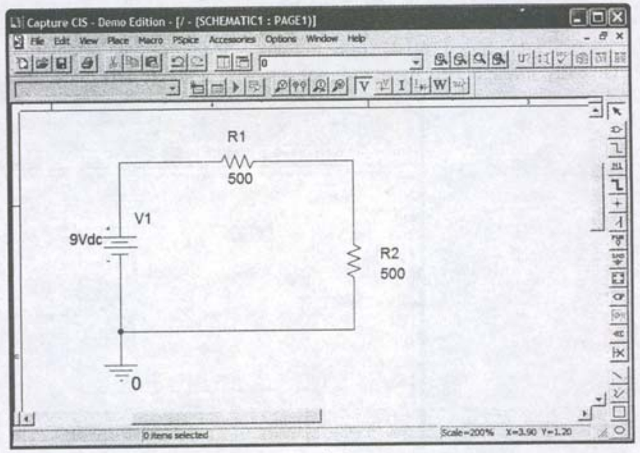
شکل پ ۴-۵ منوی استقرار قطعه.

مقاومت‌های بیشتر را کانسل می‌کند. مقاومت دوم جهت مناسبی ندارد، ولی به راحتی با یک کلیک می‌توان آن را دستکاری کرد، سپس Ctrl + R را تایپ کنید. اگر ما نام قطعه موردنظر را بدانیم، می‌توانیم از داخل کتابخانه به آن دست یابیم. اگر مقاومت‌های 1 kΩ مطلوب نباشند، مثلاً دو مقاومت 500 Ω انتخاب شده بودند ـ می‌توان با دو بار کلیک مقاومت مناسب را برگزینید.

البته هیچ مدار تقسیم ولتاژی بدون منبع ولتاژ کافی نیست. با دو بار کلیک روی پیش‌فرض 0 Vdc، مقدار 9 V را برای منبع انتخاب می‌نماییم. یک قطعه دیگر لازم است: SPICE یک مرجع (زمین) هم لازم دارد. با کلیک روی نماید GND در سمت راست پنجره شماتیک، 0/Source را برمی‌گزینیم. پیشرفت ما تا این لحظه در شکل ۴-۶ (الف) دیده می‌شود. آنچه باقی می‌ماند سیم‌کشی بین قطعات است. این کار با پایین‌آوردن منوی Place و انتخاب Wire صورت می‌گیرد. کلیدهای سمت چپ و راست ماوس هر سیم را کنترل می‌کنند (در این‌جا کمی آزمایش لازم است) سپس هر قطعه سیم ناخواسته را انتخاب نموده و با کلید Delete آن را حذف کنید. مدار نهایی ما در شکل ۴-۶ (ب) دیده می‌شود. ذکر این نکته ارزشمند است که بدانیم ادیتور به کاربر اجازه می‌دهد تا مقاومت اتصال کوتاه گردد که دیدنش وقتی از درون مقاومت باشد به سختی انجام می‌شود. معمولاً یک علامت اخطار در مکان نامناسب قبل از سیم‌کشی پدید می‌آید.



(الف)



(ب)

شکل پ ۴-۶ (الف) قطعات واقع روی صفحه. (ب) مدار کاملاً سیم‌کشی‌شده، آماده شبیه‌سازی.

قبل از شبیه‌سازی ما آن را با کلیک روی Save یا انتخاب Save از منوی File ذخیره می‌کنیم. از منوی PSpice ، ما یک New Simulation Profile را برمی‌گزینیم و در کادر محاوره ظاهر شده Voltage Divider را تایپ کنید. کادر محاوره Simulation Setting که ظاهر می‌شود اجازه می‌دهد تا انواع پارامترها را برای انواع شبیه‌سازی‌ها تنظیم کنیم، ولی برای مثال فعلی ما فقط OK لازم داریم. به محض پایین‌آوردن منوی PSpice ، ما Run را انتخاب می‌نماییم. نتیجه شبیه‌سازی در شکل پ ۴-۷ دیده می‌شود.

خوشبختانه شبیه‌سازی ما به نتیجه مورد انتظاری ختم می‌شود - یک منبع ولتاژ در دو سر مقاومت‌های مساوی. ما می‌توانیم انتخاب View Output File زیر منوی PSpice نتیجه شبیه‌سازی را ملاحظه نماییم. با اسکرول انتهای این فایل ما خطوط زیر را می‌بینیم:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(N00157)	9.0000	(N00166)	4.5000

که گره 157 مرجع مثبت منبع ولتاژ ما است و گره 166 اتصال بین دو مقاومت است. این اطلاعات در بالای فایل موجود است.

خواندنی‌های کمکی

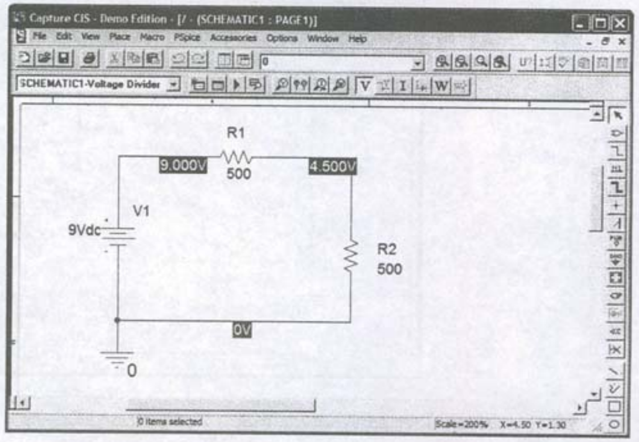
Two very good books devoted to SPICE and PSpice simulation are:

P. W. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1995.

R. W. Goody, *OrCAD PSpice for Windows Volume 1: DC and AC Circuits,* 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2001.

An interesting history of circuit simulators, as well as Donald Peterson's contributions to the field, can be found in

T. Perry, "Donald O. Peterson [electronic engineering biography]," *IEEE Spectrum* **35** (1998) 22–27.



شکل پ ۴-۷ نتایج شبیه‌سازی.

پیوست ۵

اعداد مختلط

این پیوست شامل بخش‌هایی است که تعریف یک عدد مختلط، عملیات حسابی اصلی برای اعداد مختلط، اتحاد اولر و فرم‌های نمایی و قطبی عدد مختلط را دربر می‌گیرد. ابتدا مفهوم یک عدد مختلط را معرفی می‌نماییم.

پ ۱-۵ عدد مختلط

فراگیری‌های اولیه ریاضی ما منحصر به اعداد حقیقی مانند 4، $-\frac{2}{7}$ و π بود. با این وجود، خیلی زود با معادلات جبری مانند $x = -3$ آشنا شدیم که با اعداد حقیقی تأیید نمی‌شد. چنین معادله‌ای فقط از طریق معرفی واحد موهومی یا عملگر موهومی که با نماد j نشان داده می‌شود، قابل حل است. با تعریف $j^2 = -1$ داریم: $j = \sqrt{-1}$، $j^3 = -j$، $j^4 = 1$ الی آخر. ضرب یک عدد حقیقی و یک عملگر موهومی را **عدد موهومی** می‌گوییم و جمع یک عدد حقیقی و یک عملگر موهومی **عدد مختلط** نامیده می‌شود. بنابراین عدد مثل $a + jb$ که در آن a و b اعداد حقیقی را یک عدد مختلط می‌خوانیم.

ریاضی دانان عملگر موهومی را با نماد i نشان می‌دهند ولی در مهندسی برق استفاده از j مرسوم است تا با سمبل جریان اشتباه نشود.

انتخاب کلماتی چون موهومی و مختلط مایه تأسف است. این کلمات در این‌جا و در مقالات ریاضی به‌عنوان تکنیکی برای مشخص کردن کلاسی از اعداد به کار رفته است. تفسیر موهومی به‌عنوان "بدون وابستگی به دنیای فیزیکی" یا مختلط به عنوان "پیچیده" نه موردپسند است نه صحیح.

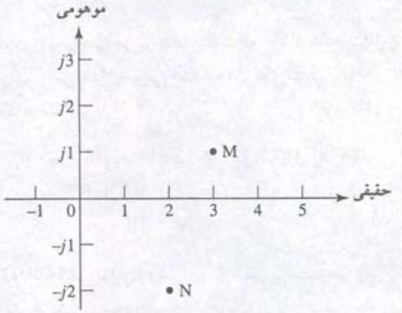
ما یک عدد مختلط را با یک نماد مثل $A = a + jb$ نشان می‌دهیم. برای نشان دادن ماهیت مختلط یک عدد آن را با حرف درشت مشخص می‌نماییم. هنگامی که به صورت دستی آن را می‌نویسیم یک خط افقی به نام خط بار روی حرف قرار می‌دهیم. عدد مختلط A که در بالا دیدیم، مؤلفه‌ای حقیقی یا بخش حقیقی a و مؤلفه‌ای موهومی یا بخش موهومی b را دارا است. آن را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد:

$$\mathrm{Re}\{A\} = a \qquad \mathrm{Im}\{A\} = b$$

مؤلفه موهومی A درواقع jb نیست بلکه b است. بنا به تعریف مؤلفه موهومی یک عدد حقیقی است. دقت کنید که همه اعداد حقیقی را می‌توان به صورت مختلط تصور کرد که در آن بخش‌های موهومی صفرند. بنابراین اعداد حقیقی در سیستم اعداد مختلط می‌گنجند و ما می‌توانیم آنها را به‌عنوان یک حالت خاص تصور کنیم. وقتی که عملیات حسابی اصلی را برای اعداد مختلط انجام می‌دهیم، باید انتظار داشته باشیم که اگر بخش موهومی صفر باشد، عملیات روی بخش حقیقی اعداد خواهد بود.

چون هر عدد مختلط با یک جفت عدد حقیقی مانند a و b کاملاً مثل مثال قبل مشخص می‌گردد، می‌توانیم با نمایش گرافیکی یک عدد مختلط روی محورهای مربعی یا کارتزین سیستم مختصات کمکی تصویری به دست آوریم. با تهیه محور حقیقی و موهومی طبق شکل (پ ۱-۵) یک سطح مختلط یا نمودار Argand ایجاد می‌کنیم که در آن هر عدد مختلطی به صورت یک نقطه نمایش داده می‌شود. اعداد مختلط $M = 3 + j1$ و $N = 2 - j2$ روی آن مشخص شده‌اند. درک این نکته که صفحه مختلط فقط یک کمک تصویری است، اهمیت دارد. این صفحه به هیچ وجه در عبارات ریاضی که به دنبال می‌آید، نقشی ندارد.

دو عدد مختلط را برابر گوییم اگر و فقط اگر بخش‌های حقیقی آن‌ها مساوی و بخش‌های موهومی آن‌ها با هم مساوی باشند. پس به صورت گرافیکی به هر نقطه در صفحه مختلط یک عدد مختلط نسبت



شکل پ ۱-۵ اعداد مختلط $M = 3 + j1$ و $N = 2 - 2j$ روی صفحه مختلط نشان داده شده‌اند.

داده می‌شود و برعکس برای هر عدد مختلط فقط یک نقطه متناظر وجود دارد. فرض کنید که دو عدد مختلط به ما داده شده باشد:

$$A = a + jb \qquad B = c + jd$$

پس اگر

$$A = B$$

لازم است که

$$a = c \qquad b = d$$

عدد مختلطی که به صورت مجموع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی بیان می‌شود گوییم به فرم مربعی یا کارتزین است. دیگر فرم‌های نمایش یک عدد مختلط به زودی خواهد آمد.

حال بگذارید اعمال اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد مختلط را بیان کنیم. مجموع دو عدد مختلط، یک عدد مختلط است که بخش حقیقی آن، جمع بخش حقیقی دو عدد مختلط و بخش موهومی آن نیز، جمع بخش‌های موهومی دو عدد مختلط است. پس:

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

مثلاً

$$(3 + j4) + (4 - j2) = 7 + j2$$

تفاضل دو عدد مختلط هم به طور مشابه معین می‌شود. مثلاً

$$(3 + j4) - (4 - j2) = -1 + j6$$

می‌توان جمع و تفریق اعداد مختلط را به طور گرافیکی روی صفحه مختلط به دست آورد. هر عدد مختلط به صورت یک بردار یا یک قطعه خط نمایش داده می‌شود و مجموع از تکمیل متوازی‌الاضلاع، طبق شکل (پ ۲–۵(الف)) به دست می‌آید. همچنین با روش انتقال سر به دم بردارها می‌توان آن را طبق شکل (پ ۲–۵(ب)) تعیین کرد. نمودار گرافیکی برای چک کردن حل عددی مفید است.

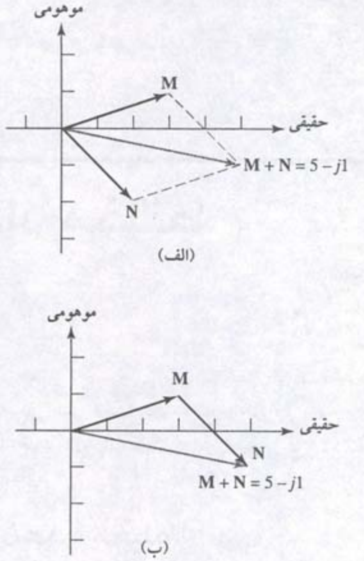
ضرب دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

نتیجه فوق را به راحتی می‌توان از ضرب دو جمله به دست آورد و در آن از قوانین جبر اعداد حقیقی استفاده نموده و سپس با $j^2 = -1$ نتیجه را ساده کرد. مثلاً:

$$\begin{aligned}(3 + j4)(4 - j2) &= 12 - j6 + j16 - 8j^2\\ &= 12 + j10 + 8\\ &= 20 + j10\end{aligned}$$

ضرب اعداد حقیقی با این روش آسان‌تر است، بخصوص اگر $j^2 = -1$ در عبارت جایگزین شود، اعمال از جایگزینی در فرمول‌های ضرب ساده‌تر خواهد شد.



شکل پ ۲–۵ (الف) جمع دو عدد مختلط $M = 3 + j1$ و $N = 2 - 2j$ با مساحت یک متوازی‌الاضلاع. (ب) مجموع همان دو عدد مختلط از اتصال سر به دم بردارها به دست می‌آیند.

قبل از تعریف عمل تقسیم اعداد مختلط باید مزدوج یک عدد مختلط را تعریف کنیم. مزدوج عدد مختلط $a + jb$ برابر $a - jb$ است و با A^* نشان داده می‌شود. پس مزدوج عدد مختلط به راحتی با تغییر علامت بخش موهومی آن به دست می‌آید، پس اگر

$$A = 5 + j3$$

باشد، آنگاه

$$A^* = 5 - j3$$

واضح است که مزدوج هر عبارت مختلط پیچیده را می‌توان با جایگزینی هر جمله مختلط در عبارت با مزدوجش به دست آورد و برای این کار کافی است j را در عبارت به $-j$ تبدیل کنیم.

تعریف جمع، تفریق و ضرب نشان می‌دهد که عبارات زیر معتبرند. مجموع یک عدد مختلط و یک مزدوج، یک عدد حقیقی است. تفاضل یک عدد مختلط و مزدوج آن یک عدد موهومی است و ضرب یک عدد مختلط و مزدوج آن هم عددی حقیقی می‌باشد. همچنین واضح است که اگر A^* مزدوج A باشد، آنگاه A مزدوج A^* است. به بیان دیگر $A = (A^*)^*$. یک عدد مختلط و مزدوج آن را **جفت اعداد مزدوج** مختلط گویند (در یک مسئله فیزیکی ناچاراً یک عدد مختلط همراه با مزدوجش ظاهر می‌شود).

اکنون خارج قسمت دو عدد مختلط را تعریف می‌کنیم:

$$\frac{A}{B} = \frac{(A)(B^*)}{(B)(B^*)}$$

و بنابراین

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا مخرج حقیقی شود، به این کار **گویا کردن مخرج** گوییم. مثلاً

$$\begin{aligned}\frac{3 + j4}{4 - j2} &= \frac{(3 + j4)(4 + j2)}{(4 - j2)(4 + j2)}\\ &= \frac{4 + j22}{16 + 4} = 0.2 + j1.1\end{aligned}$$

جمع یا تفریق دو عدد مختلط که هر یک به فرم مربعی بیان شوند، عملی ساده است. با این وجود ضرب و تقسیم دو عدد به فرم کارتزین فرآیندی طولانی است. این دو عمل آخر را وقتی اعداد مختلط به صورت نمایی یا قطبی داده شوند، راحت‌تر می‌توان انجام داد. این فرم‌ها در بخش‌های (الف ۳–۵) و (الف ۴–۵) معرفی شده‌اند.

تمرین

پ ۱–۵ فرض کنید $A = -4 + j5$، $B = 3 - j2$ و $C = -6 - j5$ باشد. مطلوب است (الف) $C - B$، (ب) $2A - 3B + 5C$، (ج) $j^5C^2(A + B)$ و (د) $B\,Re[A] + A\,Re[B]$.

پ ۲–۵ با مقادیر A و B و C تمرین قبل، مطلوب است (الف) $[(A - A^*)(B + B^*)^*]^*$، (ب) $(1/B)^* - (1/C)$ و (ج) $(B + C) / (2BC)$.

جواب پ ۱–۵: $-9 - j3$، $-47 - j9$، $27 - j191$ و $-24 + j23$.

جواب پ ۲–۵: $-j60$، $-0.329 + j0.236$ و $0.0662 + j0.1179$.

پ ۲–۵ اتحاد اولر

در فصل ۹، با توابع زمانی حاوی اعداد مختلط مواجه شدیم و مجبور شدیم از آن‌ها نسبت به متغیر حقیقی t مشتق و انتگرال بگیریم. از این توابع عیناً مثل روشی که در توابع حقیقی زمانی مشاهده شد، مشتق و انتگرال گرفته می‌شود. یعنی از ثابت‌های مختلط درست مثل ثابت‌های حقیقی مشتق و انتگرال می‌گیریم. اگر $f(t)$ یک تابع مختلط زمانی باشد، به نحوی که

$$f(t) = a \cos ct + jb \sin ct$$

آنگاه

$$\frac{df(t)}{dt} = -ac \sin ct + jbc \cos ct$$

و

$$\int f(t)\,dt = \frac{a}{c}\sin ct - j\frac{b}{c}\cos ct + C$$

که ثابت انتگرال‌گیری C در حالت کلی یک عدد مختلط است.

گاهی لازم است از یک تابع با متغیر مختلط نسبت به آن متغیر مشتق یا انتگرال بگیریم.

به طور کلی برای انجام موفقیت‌آمیز هر یک از این اعمال لازم است تا تابع شرایط معینی را ارضا نماید. روش‌های مشتق و انتگرال همه توابعی که این شرایط را ارضا کنند، درست مثل روش‌های به‌کارگیری مشتق و انتگرال روی متغیرهای حقیقی می‌باشند. لازم است در این‌جا به‌کارگیری یک رابطه اساسی مهم به نام **اتحاد اولر** را بیان کنیم. ما به دلیل کاربرد مفید فوق‌العاده اتحاد مذکور در نمایش اعداد مختلط به فرم‌هایی به جز مربعی آن را اثبات می‌کنیم.

اثبات اتحاد فوق براساس بسط سری توان‌های $\cos\theta$، $\sin\theta$ و e^z است که در سال‌های قبل با آن‌ها آشنا شده‌اید.

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

یا

$$\cos\theta + j\sin\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

و

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

به همین ترتیب:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$

و نتیجه می‌گیریم که:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (۱)$$

یا اگر $z = -j\theta$ فرض شود، داریم:

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \qquad (۲)$$

با جمع و تفریق معادلات (۱) و (۲) دو عبارت حاصل می‌شود که ما بدون اثبات از آن‌ها از پاسخ طبیعی زیر میرای مدارهای RLC سری و موازی استفاده کردیم.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \qquad (۳)$$

$$\sin\theta = -j\frac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \qquad (۴)$$

تمرین

پ ۳–۵ برای موارد زیر از معادلات (۱) تا (۴) استفاده کنید. (الف) e^{-j1}، (ب) e^{1-j1}، (ج) $\cos(-j1)$ و (د) $\sin(-j1)$.

پ ۴–۵ در $t = 0.5$ مطلوب است؛ (الف) $(d/dt)(3\cos 2t - j2\sin 2t)$ و (ب) $\int_0^t(3\cos 2t - j2\sin 2t)dt$. در $s = 1 + j2$ مطلوب است، (ج) $\int_s^\infty s^{-3}\,ds$ و (د) $(d/ds)[3/(s + 2)]$.

جواب پ ۳–۵: $0.540 - j0.841$، $1.469 - j2.29$ و $-j1.175$.

جواب پ ۴–۵: $-5.05 - j2.16$، $1.262 - j0.460$، $0.06 - j0.08$ و $-0.0888 + j0.213$.

پ ۳-۵ فرم نمایی

اکنون اتحاد اولر را می‌نویسیم

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

هر دو طرف را در عدد مثبت حقیقی C ضرب می‌کنیم.

$$Ce^{j\theta} = C\cos\theta + jC\sin\theta \qquad (5)$$

سمت راست معادله (۵) از جمع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی تشکیل شده است و به این ترتیب یک عدد موهومی را در مختصات مربعی نشان می‌دهد. اجازه دهید این عدد مختلط را A بنامیم که $A = a + jb$ است. از تساوی بخش‌های حقیقی داریم:

$$a = C\cos\theta \qquad (6)$$

و بخش‌های موهومی

$$b = C\sin\theta \qquad (7)$$

دو رابطه (۶) و (۷) را به توان 2 رسانده با هم جمع می‌کنیم.

$$a^2 + b^2 = C^2$$

یا

$$C = +\sqrt{a^2+b^2} \qquad (8)$$

و از تقسیم معادله (۷) بر معادله (۶) داریم:

$$\frac{b}{a} = \tan\theta$$

یا

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad (9)$$

رابطه بین معادلات (۸) و (۹) را به دست می‌آوریم تا C و θ را برحسب a و b معین کنیم. مثلاً اگر $A = 4 + j2$ باشد. آنگاه a برابر 4 و b برابر 2 است و به این ترتیب C و θ برابرند با:

$$C = \sqrt{4^2+2^2} = 4.47$$
$$\theta = \tan^{-1}\tfrac{2}{4} = 26.6°$$

به کمک این مقادیر می‌توان A را به دست آورد:

$$A = 4.47\cos 26.6° + j4.47\sin 26.6°$$

ولی این مشابه سمت چپ معادله (۵) است:

$$A = Ce^{j\theta} = 4.47\,e^{j26.6°}$$

عدد مختلطی که به این فرم نمایش داده شود، را **فرم نمایی** می‌خوانیم. ضریب مثبت حقیقی C را دامنه یا اندازه و مقدار حقیقی θ را در نما، زاویه یا آرگومان گویند. یک ریاضی‌دان معمولاً θ را برحسب رادیان بیان می‌کند و چنین می‌نویسد:

$$A = 4.47\,e^{j0.464}$$

ولی مهندسین معمولاً با درجه کار می‌کنند. استفاده از نماد درجه (°) در نما از اشتباه جلوگیری می‌کند.

دوباره تکرار می‌کنیم که اگر عدد مختلطی داشته باشیم که در فرم مربعی داده شده باشد:

$$A = a + jb$$

و بخواهیم آن را به صورت نمایی زیر بنویسیم:

$$A = Ce^{j\theta}$$

می‌توان C و θ را با معادلات (۸) و (۹) به دست آوریم. اگر عدد مختلطی به صورت نمایی داده شده باشد، آنگاه می‌توان a و b را از معادلات (۶) و (۷) به دست آورد.

وقتی که A به فرم مقادیر عددی داده شده باشد، می‌توان تبدیل از فرم نمایی (یا قطبی) به مربعی را با اعمال موجود در ماشین‌های حساب به دست آورد.

در تعیین زاویه θ با رابطه آرک تانژانت معادله (۹) یک سئوال مطرح است. این تابع چند مقداری است و از همه مقادیر ممکن باید زاویه مناسبی انتخاب شود، یکی از روش‌های انتخاب این است‌که سینوس و کسینوس علامت‌های مناسبی داشته باشند تا مقادیر لازم a و b را از معادلات (۶) و (۷) تولید کند. مثلاً اجازه دهید رابطه زیر را به فرم نمایی درآوریم.

$$V = 4 - j3$$

دامنه برابر است با

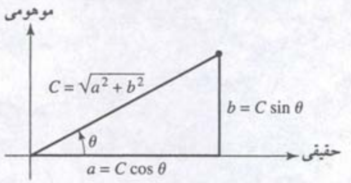
$$C = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

و زاویه برابر است با

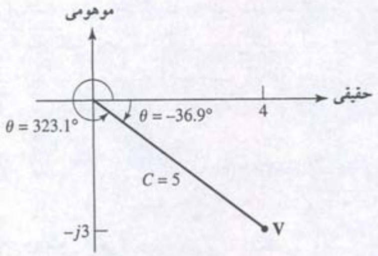
$$\theta = \tan^{-1}\frac{-3}{4} \qquad (10)$$

مقدار θ باید طوری انتخاب شود که $\cos\theta$ مثبت و $\sin\theta$ منفی باشد، زیرا $5\cos\theta = 4$ و مقدار سینوس منفی گردد. چون $5\sin\theta = -3$. بنابراین $\theta = -36.9°$، $323.1°$، $-396.9°$ و الی آخر است.

هر یک از این زوایا صحیح است و ما معمولاً ساده‌ترین که در این‌جا $-36.9°$ است را انتخاب می‌نماییم. باید توجه کرد که حل‌هایی چون $\theta = 143.1°$ صحیح نیستند، زیرا $\cos\theta$ منفی و $\sin\theta$ برای آن مثبت می‌باشد. با نمایش گرافیکی عدد مختلط در صفحه مختلط روش ساده‌تری برای انتخاب زاویه صحیح حاصل می‌گردد.



شکل پ ۳-۵ یک عدد مختلط ممکن است با یک نقطه در صفحه و ب... انتخاب صحیح بخش‌های حقیقی و موهومی نمایش داده شود. فر... نمایش می‌تواند مربعی و یا با انتخاب دامنه و زاویه به فرم نمایی باشد



شکل پ ۴-۵ عدد موهومی $V = 4 - j3 = 5e^{-j36.9°}$ در صفحه مختلط نشان داده شده است.

اجازه دهید ابتدا یک عدد مختلط به فرم مربعی $A = a + jb$ را انتخاب کنیم که در ربع اول صفحه مختصات مطابق شکل (پ ۳-۵) قرار دارد. اگر خطی از مبدأ به نقطه مربوط به عدد مختلط رسم کنیم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌توانیم ایجاد نماییم که وتر شامل دامنه نمایش نمایی عدد مختلط است. به بیان دیگر $C = \sqrt{a^2+b^2}$ است. به‌علاوه زاویه غیر ساعت‌گردی که خط با محور مثبت حقیقی می‌سازد، همان زاویه θ در نمایش نمایی است، زیرا $a = C\cos\theta$ و $b = C\sin\theta$.

اکنون اگر فرم مربعی عدد مختلط را داشته باشیم، که در ربع دیگری مثل $V = 4 - j3$ واقع شده باشد که در شکل پ-۴-۵ هم ترسیم شده واضح است که زاویه صحیح از لحاظ گرافیکی $-36.9°$ یا $323.1°$ می‌باشد. نمودار اکثراً تجسم می‌شود و نیازی به ترسیم آن ندارد.

اگر فرم مربعی عدد مختلط بخش حقیقی منفی داشته باشد، اغلب ساده‌تر است با عدد مختلط منفی کار شود و از زوایای بزرگتر از 90° اجتناب گردد. مثلاً برای

$$I = -5 + j2$$

چنین می‌نویسیم

$$I = -(5 - j2)$$

سپس (5 - j2) را به نمایی تبدیل می‌کنیم:

$$I = -Ce^{j\theta}$$

که

$$C = \sqrt{29} = 5.39 \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{-2}{5} = -21.8°$$

... بنابراین داریم:

$$I = -5.39e^{-j21.8°}$$

... افزایش یا کاهش زاویه به اندازه 180° می‌توان علامت منفی را از عدد مختلط حذف کرد. این کار در نمودار صفحه مختلط نشان داده شده است. پس نتیجه را می‌توان به فرم نمایی زیر نشان داد.

$$I = 5.39e^{j158.2°} \qquad \text{یا} \qquad I = 5.39e^{-j201.8°}$$

...وجه داشته باشید که استفاده از یک ماشین حساب الکترونیک با مد... عکس تانژانت همیشه زاویه‌ای کمتر از 90° را نتیجه می‌دهد. پس هر دو $\tan^{-1}[(-3)/4]$ و $\tan^{-1}[3/(-4)]$ به زاویه $-36.9°$ مرتبط‌اند. با این وجود ماشین حساب‌هایی که امکان تبدیل مربعی به قطبی را دارند همیشه زاویه صحیح را ارائه می‌نمایند.

آخرین اظهارنظر در مورد نمایش نمایی یک عدد مختلط را هم ارائه می‌کنیم. دو عدد مختلطی که هر دو به فرم نمایی نوشته شده‌اند، به شرطی برابرند که فقط و فقط اندازه‌های آن‌ها مساوی و زوایای آن‌ها معادل باشد. زوایای معادل آن‌هایی هستند که با ضرایبی از 360° با هم تفاوت دارند. مثلاً اگر $A = Ce^{j\theta}$ و $B = De^{j\phi}$ باشند. آنگاه اگر $A = B$ باشد، لازم است $C = D$ و $\theta = \phi \pm (360°)n$ باشد که در آن $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ می‌باشد.

تمرین

پ ۵-۵ هر یک از اعداد زیر را به فرم نمایی نشان دهید. زاویه بین $-180° \le \theta \le 180°$ باشد. (الف) $-18.5 - j26.1$، (ب) $17.9 - j12.2$ و (ج) $-21.6 + j31.2$.

پ ۶-۵ هر یک از اعداد مختلط زیر را به فرم مربعی درآورید. (الف) $61.2e^{-j111.1}$، (ب) $-36.2e^{j108°}$ و (ج) $5e^{-j2.5}$.

جواب پ ۵-۵: $32.0e^{-j125.3°}$، $21.7e^{-j34.3°}$ و $37.9^{j124.7°}$.

جواب پ ۶-۵: $-22.0 - j57.1$، $11.19 - j34.4$ و $-4.01 - j2.99$.

پ ۴-۵ فرم قطبی

سومین (و آخرین) فرمی که یک عدد مختلط را با آن نشان می‌دهیم، اساساً با مختصر تفاوتی مشابه فرم نمایی است. ما علامت زاویه (∠) را با ترکیب e^{j} جایگزین می‌کنیم. بنابراین نمایش نمایی یک عدد مختلط A:

$$A = Ce^{j\theta}$$

گاهی جمع‌وجورتر نوشته می‌شود، یعنی:

$$A = C\angle\theta$$

اکنون گوییم عدد مختلط به **فرم قطبی** است. این نام نقطه‌ای در صفحه مختلط را با استفاده از مختصات قطبی بیان می‌کند.

واضح است که تبدیل از مختصات مربعی به قطبی و برعکس اساساً مشابه مربعی و نمایی است. بین C و θ، a و b روابط یکسانی برقرار است.

پس عدد مختلط

$$A = -2 + j5$$

در مختصات نمایی چنین است:

$$A = 5.39e^{j111.8°}$$

و در مختصات قطبی چنین خواهد بود:

$$A = 5.39\angle 111.8°$$

برای تشخیص کاربرد فرم‌های نمایی یا قطبی بیایید ضرب و تقسیم دو عدد مختلط را که به فرم نمایی یا قطبی است، در نظر بگیریم:

$$A = 5 \angle 53.1^\circ \quad \text{و} \quad B = 15 \angle -36.9^\circ$$

فرم نمایی آن‌ها چنین است:

$$A = 5e^{j53.1^\circ} \quad \text{و} \quad B = 15e^{-j36.9^\circ}$$

این روابط اجازه می‌دهند تا حاصل‌ضرب اعداد مختلط را به فرم نمایی که دامنه‌اش ضرب دامنه‌ها و زاویه‌اش جمع جبری زوایا است، بنویسیم. طبق قواعد معمول ضرب دو کمیت نمایی داریم:

$$(A)(B) = (5)(15)e^{j(53.1^\circ - 36.9^\circ)}$$

یا

$$AB = 75e^{j16.2^\circ} = 75 \angle 16.2^\circ$$

با تعریف فرم قطبی واضح است که

$$\frac{A}{B} = 0.333 \angle 90^\circ$$

جمع و تفریق اعداد مختلط با روش مربعی ساده‌تر به دست می‌آیند و اگر جمع و تفریق دو عدد مختلط به فرم نمایی یا قطبی باشند، باید آن‌ها را به اعداد مختلط مربعی تبدیل کرد. عکس این مطلب برای ضرب و تقسیم صحت دارد. دو عدد اگر در مختصات مربعی داده شده باشند، باید به فرم قطبی درآیند. مگر این‌که اعداد مقادیر کوچک صحیحی باشند، مثلاً اگر بخواهیم $(j1 + 2)(j3 - 1)$ را در هم ضرب کنیم، بهتر است آن‌ها را به همان شکل در هم ضرب نماییم. اگر بتوانیم اعداد را ذهنی حساب کنیم، آنگاه تبدیل فرم قطبی وقت تلف کردن است.

اکنون با سه روش مختلف که در آن اعداد مختلف می‌توانند بیان شوند یا به سرعت از یکی به دیگری تبدیل شوند، آشنا هستیم. ظاهراً ارتباط بین این سه فرم بسیار زیاد است، رابطه طولانی زیر انواع ارتباطات میان آن‌ها را خلاصه می‌کند.

$$\mathbf{A} = a + jb = \mathrm{Re}[\mathbf{A}] + j\mathrm{Im}[\mathbf{A}] = Ce^{j\theta} = \sqrt{a^2+b^2}e^{j\tan^{-1}(b/a)}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \angle \tan^{-1}(b/a)$$

بسیاری از تبدیلات یک فرم به دیگری به کمک یک ماشین حساب به سرعت انجام می‌شود و بسیاری از آن‌ها قادرند معادلات خطی با اعداد مختلط را حل کنند.

می‌توان دریافت که اعداد مختلط یک مصنوع ریاضی مناسبی است که تحلیل وضعیت‌های فیزیکی حقیقی را ساده می‌نماید.

تمرین

پ ۷-۵ نتیجه هر یک از اعمال زیر را به فرم قطبی بیان کنید. از شش رقم استفاده نمایید.

(الف) $(0.3 \angle 41^\circ) / [(1 \angle -41^\circ) - 2]$،

(ب) $50 / (2.87 \angle 83.6^\circ + 5.16 \angle 63.2^\circ)$ و

(ج) $4 \angle 18^\circ - 6 \angle -75^\circ + 5 \angle 28^\circ$.

پ ۸-۵ Z را به فرم مربعی به دست آورید به شرطی که (الف) $Z + j2 = 3/Z$، (ب) $Z = 2\ln(2 - j3)$ و (ج) $\sin Z = 3$ باشد.

جواب پ ۷-۵: $4.69179 \angle -13.2183^\circ$، $4.69179 \angle -70.462.6^\circ$ و $6.31833 \angle 54.5969^\circ$ 11.5066.

جواب پ ۸-۵: $\pm 1.414 - j1$، $2.56 - j1.966$ و $1.571 \pm j1.763$.

پیوست ۶

آموزش مختصر متلب

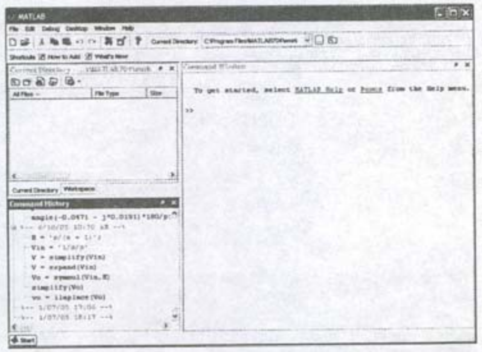
دف از این بخش، تهیه مقدمه کوتاهی بر مفاهیم‌اصلی لازم برای استفاده‌از ک بسته نرم‌افزاری قوی به نام متلب (MATLAB) است. استفاده‌از تلب بخش کاملاً اختیاری از مواد این کتاب است، اما با افزایش استفاده از آن ه‌عنوان یک ابزار رایج در همه زمینه‌های مهندسی برق، احساس کردیم، حوب است، فرصتی برای دانشجویان فراهم آید تا بعضی از ویژگی‌های این رم‌افزار مورد بررسی قرار گیرد و طی آن حل معادلات همزمان و دستکاری بارات جبری صورت پذیرد. در حال حاضر بسیاری از مؤسسات ویرایش کامل متلب را برای دانشجویان خود فراهم آورده‌اند، ولی بهنگام این نوشتار یرایش دانشجویی آن با قیمت بسیار کم توسط MathWorks با آدرس (http://www.mathworks.com/products/studentversion/) ر اختیار است. مثال‌هایی از متلب که در این کتاب ارائه شده‌اند، از یرایش Student Version 5.0 می‌باشد. خوانندگانی که علاقمندند ی‌توانند به کتاب‌فروشی‌های نزدیک خود برای کسب اطلاعات و حزئیات بیشتر مراجعه کنند.

شروع می‌کنیم

تلب معمولاً با کلیک روی نشانه برنامه آغاز می‌شود. نمونه دریچه زکردن در شکل (پ ۱-۶) مشاهده می‌شود. برنامه‌ها از فایل‌ها یا ستقیماً از فرمان‌های وارده در دریچه قابل اجرا هستند. متلب دارای ابع کمکی قابل توجهی است که هم برای مبتدیان و هم باتجربه مفید ست. برنامه‌های متلب خیلی شبیه به برنامه‌هایی است که در C نوشته ی‌شود ولی آشنایی با این زبان لزومی ندارد.

تغیرها و اعمال ریاضی

ه محض این‌که کاربر بداند که همه متغیرها ماتریسند، حتی تریس‌های 1×1، خیلی راحت‌تر موضوع را درک خواهد کرد. نام غیرها می‌تواند تا 19 کاراکتر طول داشته و این خود در ساخت نامه‌هایی که قابلیت خواندن دارند، بسیار خوب است، اولین کاراکتر ید یک حرف باشد، ولی بقیه آن‌ها می‌تواند حرف یا عدد باشند. از لامت underscore (_) نیز می‌توان استفاده کرد. نام متغیرها به سایز رف حساس است.



شکل پ ۱ـ۶ پنجرهٔ متلب.

در متلب متغیر از پیش تعریف شده است. نمونه‌هایی از این نوع عبارتنداز:

دقت ماشین	eps
کوچکترین عدد نقطه شناور مثبت که به وسیله کامپیوتر استفاده می‌شود	realmin
بزرگترین عدد نقطه شناور که به وسیله کامپیوتر دستکاری شود	realmax
بینهایت (به صورت 1/0 تعریف می‌شود)	inf
به معنی "یک عدد نیست" شامل وضعیتهایی چون %	NaN
$(3.14159...)\pi$	pi
هر دو در اصل $\sqrt{-1}$ هستند. کاربر می‌تواند مقدار دیگری به این متغیرها نسبت دهد	i , j

لیست کاملی از متغیرهایی که اخیراً معرفی شده‌اند با فرمان who قابل ملاحظه‌اند. متغیرها با استفاده از علامت مساوی (=) تخصیص می‌یابند. اگر عبارت با نقطه ویرگول (;) پایان یابد، آن‌گاه فرمان دیگری روی صفحه ظاهر می‌گردد. اگر عبارت فقط با کلید Enter (یا return) خاتمه پذیرد، آن‌گاه متغیر تکرار می‌شود. مثلاً

```
EDU >> input_voltage = 5 ;
EDU >> input_current = 1e - 3
input_current =
```

```
1.0000e - 003
EDU >>
```

تعریف اعداد مختلط در متلب ساده است. مثلاً:

```
EDU >> s = 9 + j * 5 ;
```

متغیری با مقدار 5 * j + 9 را تعریف می‌کند.

ماتریس‌هایی به جز 1×1 با کروشه تعریف می‌شوند. مثلاً ما ماتریس $t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ را در متلب به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

```
EDU >> t = [2 -1 ; 3 0] ;
```

توجه کنید که عناصر ماتریس هر بار سطری وارد می‌شوند، عناصر سطر با فاصله از هم جدا می‌شوند و ستون‌ها هم با نقطه ویرگول (;) از یکدیگر جدا می‌گردند. عملیات ریاضی مشابهی برای ماتریس‌ها وجود دارد. مثلاً می‌توان t + t را ملاحظه کرد.

```
EDU >> t + t
ans =
    4 - 6
    6   0
```

اعمال ریاضی شامل این مواردند

تقسیم بر چپ	\	توان	^
جمع	+	ضرب	*
تفریق	-	تقسیم معمولی (از راست)	/

ترتیب عملیات نیز مهم است. بالاترین اولویت با توان است، بعد ضرب و تقسیم و بالاخره جمع و تفریق.

```
EDU >> x = 1 + 5 * 3
x =
16
```

مفهوم تقسیم از چپ ابتدا ممکن است عجیب به نظر برسد ولی در جبر ماتریسی مهم است. مثلاً

```
EDU >> 1/5
ans =
0.2000
EDU >> I \ 5          EDU >> 5 \ 1
  ans =                 ans =
  5                     0.2000
```

در موقع لزوم، پرانتز کمک شایانی می‌نماید.

خواندنی‌های کمکی

There are a large number of excellent MATLAB references available, with new titles appearing regularly. Two worth looking at are:

D. C. Hanselman and B. L. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 2005.

W. J. Palm III, *Introduction to MATLAB 7 for Engineers*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2005.

بعضی از توابع مفید

فضای موردنیاز مانع لیست کردن همه توابع در متلب می‌شود. بعضی از نمونه‌های اصلی عبارتند از:

abs(x)	|x|	log10(x)	$\log_{10}$ x		
exp(x)	e^x	sin(x)	sin x	asin(x)	$\sin^{-1}$ x
sqrt(x)	$\sqrt{x}$	cos(x)	cos x	acos(x)	$\cos^{-1}$x
log(x)	ln x	tan(x)	tan x	atan(x)	$\tan^{-1}$x

توابع مفید در دستکاری متغیرهای مختلط عبارتند از:

real(s)	Re{s}
imag(s)	Im{s}
abs(s)	$\sqrt{a^2 + b^2}$, where $s \equiv a + jb$
angle(s)	$\tan^{-1}(b/a)$, where $s \equiv a + jb$
conj(s)	مزدوج مختلط s

فرمان بسیار مفید دیگر، help است.

گاهی اوقات، مثل هنگام ترسیم منحنی، نیاز به یک بردار داریم. در این موارد، فرمان linspace(min, max, number of points) بسیار ارزشمند است:

```
EDU >> frequency = linspace(0, 10, 5)
frequency =
0  2.5000  5.0000  7.5000  10.0000
```

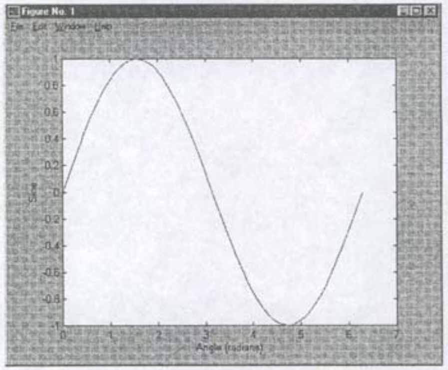
فرمان دیگر فرمان فوق logspace() است.

ترسیم منحنی

ترسیم منحنی با متلب خیلی ساده است. مثلاً شکل (پ ۲-۶) نتیجه اجرای برنامه متلب زیر را نشان می‌دهد.

```
EDU >> x = linspace(0, 2 * pi, 100) ;
EDU >> y = sin(x) ;
EDU >> plot(x, y) ;
EDU >> xlabel('Angle (radians)') ;
EDU >> ylabel('Sine') ;
```

نمونه‌ای از منحنی که به وسیله متلب تولید شده است، متغیر x به صورت برداری با 100 عنصر تعریف شده است. متغیر y به طور خودکار به صورت یک بردار با همان طول ایجاد گشته است.



شکل پ ۲-۶ نمونه‌ای از منحنی که به وسیله متلب تولید شده است. متغیر x به صورت برداری با 100 عنصر تعریف شده است. متغیر y به‌طور خودکار به صورت یک بردار با همان طول ایجاد گشته است.

پیوست ۷

قضایای اضافی در تبدیل لاپلاس

در این پیوست علاوه بر آن‌چه که در فصل ۱۴ دیدیم، چند قضیه تبدیل لاپلاس را که در موارد پیشرفته به کار می‌روند، معرفی خواهیم کرد.

تبدیل توابع زمانی متناوب

قضیه جابه‌جایی زمانی در یافتن تبدیل توابع زمانی متناوب بسیار جالب است. فرض کنید که $f(t)$ با دوره متناوب یا پریود T برای مقادیر مثبت t مفروض باشد. رفتار t در $t < 0$ تأثیری بر تبدیل لاپلاس ندارد، (یک طرفه یا یک سویه است). پس $f(t)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$f(t) = f(t - nT) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

اگر اکنون یک تابع زمانی جدید تعریف کنیم که فقط در اولین پریود از $f(t)$ غیر صفر باشد،

$$f_1(t) = [u(t) - u(t - T)]f(t)$$

آن‌گاه $f(t)$ اصلی را با مجموع بینهایت تابع $f_1(t)$، که هر یک با ضریب صحیحی از T تأخیر دارند، می‌توان نشان داد. یعنی :

$$\begin{aligned} f(t) &= [u(t) - u(t - T)]f(t) + [u(t - T) - u(t - 2T)]f(t) \\ &\quad + [u(t - 2T) - u(t - 3T)]f(t) + \ldots \\ &= f_1(t) + f_1(t - T) + f_1(t - 2T) + \ldots \end{aligned}$$

یا

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t - nT)$$

تبدیل لاپلاس این مجموع، مجموع تبدیلات است.

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_1(t - nT)\}$$

با قضیه جابه‌جایی زمانی خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$$

که در آن

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \int_{0^-}^{T} e^{-st} f(t)\, dt$$

که $F_1(s)$ تابعی از n نیست و از جمع می‌تواند خارج شود. پس $F(s)$ چنین خواهد شد:

$$F(s) = F_1(s)[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots]$$

وقتی قضیه **بسط دو جمله‌ای** را به عبارت داخل کروشه اعمال کنیم، رابطه ساده $1 / (1 - e^{-Ts})$ حاصل می‌گردد. پس نتیجه می‌گیریم که تابع متناوب $f_1(t)$ با پریود T، تبدیل لاپلاس زیر را دارد:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \tag{۱}$$

که

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{[u(t) - u(t - T)]f(t)\} \tag{۲}$$

که تبدیل اولین پریود تابع زمانی $f(t)$ است.

برای تشریح کاربرد این قضیه تبدیل توابع متناوب، بیایید آن را به رشته پالس آشنای مربعی اعمال کنیم شکل (پ ۱–۷). می‌توانیم این تابع را به صورت تحلیلی زیر بیان کنیم:

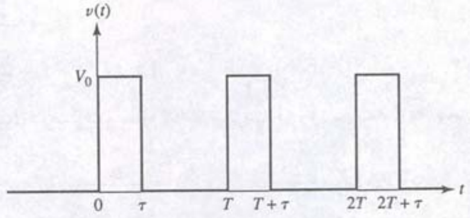
$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_0[u(t - nT) - u(t - nT - \tau)] \qquad t > 0$$

تابع $V_1(s)$ برابر رابطه زیر است:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = V_0 \int_{0^-}^{\tau} e^{-st}\, dt = \frac{V_0}{\mathbf{s}}(1 - e^{-s\tau})$$

اکنون برای به دست آوردن تبدیل مطلوب، آن را بر $(1 - e^{-sT})$ تقسیم می‌کنیم:

$$V(s) = \frac{V_0}{s}\,\frac{(1 - e^{-s\tau})}{(1 - e^{-sT})} \tag{۳}$$

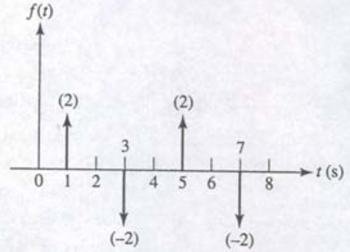


شکل پ ۱–۷ رشته متناوب پالس‌های مربعی که برای آن $F(s) = (V_0/s)(1 - e^{-s\tau})/(1 - e^{-sT})$ است.

ملاحظه می‌کنید که چگونه چند قضیه در تبدیل معادله (۳) به کار رفته‌اند. ضریب $(1 - e^{-sT})$ در مخرج برای تناوبی بودن تابع است. e^{-sT} در صورت، ناشی از تأخیر زمانی موج مربعی منفی است که پالس را صفر می‌کند و ضریب V_0 / s هم تبدیل پله موجود در $v(t)$ می‌باشد.

مثال پ ۱-۷

تابع متناوب شکل (پ ۲-۷) را تبدیل کنید.



شکل پ ۲-۷ تابع متناوب مبتنی بر توابع ضربه واحد.

کار را با نوشتن معادله‌ای که f(t) را توصیف کند، آغاز می‌کنیم. این تابع متشکل از توابع ضربه مثبت و منفی متناوب می‌باشد.

$$f(t) = 2\delta(t - 1) - 2\delta(t - 3) + 2\delta(t - 5) - 2\delta(t - 7) + \dots$$

با تعریف تابع جدید f_1 و پریود $T = 4$ s داریم:

$$f_1(t) = 2[\delta(t - 1) - \delta(t - 3)]$$

می‌توانیم با عمل تناوب زمانی که در جدول ۲-۱۴ آمده است، F(s) را پیدا کنید.

(۴) $$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} F_1(s)$$

که

$$F_1(s) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{4} f_1(t)e^{-st}\,dt$$

برای محاسبه این انتگرال چند روش وجود دارد. ساده‌ترین آن این‌است‌که مقدارش با افزایش حد بالا به سمت بینهایت، ثابت می‌ماند. این به ما اجازه می‌دهد تا از قضیه جابه‌جایی زمانی استفاده کنیم. پس:

(۵) $$F_1(s) = 2[e^{-s} - e^{-3s}]$$

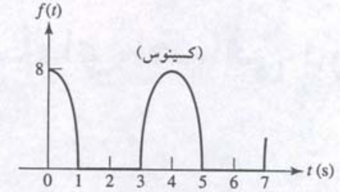
مثال با ضرب معادله (۵) در ضریب موجود در معادله (۴) پایان می‌یابد. پس:

$$F(s) = \frac{2}{1 - e^{-4s}}(e^{-s} - e^{-3s}) = \frac{2e^{-s}}{1 + e^{-2s}}$$

تمرین

پ ۱-۷ تبدیل لاپلاس تابع متناوب شکل (پ ۳-۷) را تعیین کنید.

جواب: $\frac{s + (\pi/2)e^{-s} + (\pi/2)e^{-3s} - se^{-4s}}{1 - e^{-4s}} \left(\frac{8}{s^2 + \pi^2/4}\right)$



شکل پ ۳-۷

جابه‌جایی فرکانس

قضیه جدید دیگر رابطه‌ای بین $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ و $F(s + a)$ را بیان می‌کند. تبدیل لاپلاس $e^{-at}f(t)$ را ملاحظه کنید:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}e^{-at}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}f(t)\,dt$$

با نگاهی دقیق به این نتیجه می‌رسیم که انتگرال سمت راست با آن‌چه برای F(s) تعریف کردیم، با یک استثناء برابر است: به جای s، عبارت $(s + a)$ وجود دارد. پس

(۶) $$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow F(s + a)$$

نتیجه می‌گیریم که جابه‌جایی s با $(s + a)$ در حوزه فرکانس با ضرب e^{-at} در حوزه زمان برابر است. این نتیجه را قضیه **جابه‌جایی فرکانس** می‌گویند. این قضیه را بلافاصله در محاسبه قضیه تابع نمایی کسینوسی میرای نمایی که به کرّات آن را به کار برده‌ایم، می‌توان مورد استفاده قرار داد.

با فرض معلوم بودن تابع کسینوسی داریم:

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

آنگاه تبدیل $e^{-at}\cos \omega_0 t$ باید $F(s + a)$ باشد.

(۷) $$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos \omega_0 t\} = F(s + a) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

تمرین

پ ۲-۷ مطلوب است $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(5t + 0.2\pi)\,u(t)\}$

جواب: $(0.588\,s + 4.05) / (s + 4s + 29)$

مشتق در حوزه فرکانس

اکنون بگذارید نتایج مشتق‌گیری F(s) را نسبت به s بررسی کنیم. نتیجه برابر است با

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} -te^{-st}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}[-tf(t)]\,dt$$

که درواقع تبدیل لاپلاس [-tf(t)] است. پس نتیجه می‌گیریم که مشتق نسبت به s در حوزه فرکانس برابر با ضریب t- در حوزه زمان است. یا

(۸) $$-f(t) \Leftrightarrow \frac{d}{ds}F(s)$$

اکنون تصور کنید که f(t) یک تابع شیب واحد tu(t) باشد، که تابع تبدیل آن $1/s^2$ خواهد شد. می‌توانیم از قضیه مشتق‌گیری نسبت به فرکانس اخیر برای تعیین عکس تبدیل $1/s^3$ استفاده کنیم.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{2}{s^3} \Leftrightarrow -t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = -t^2u(t)$$

و

(۹) $$\frac{t^2u(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{s^3}$$

با روش مشابهی داریم:

(۱۰) $$\frac{t^3}{3!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^4}$$

و به طور کلی

(۱۱) $$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(t) \quad \frac{1}{s^n}$$

تمرین

پ ۳-۷ مطلوب است $\mathcal{L}\{t\sin(5t + 0.2\pi)\,u(t)\}$

جواب: $(0.588\,s^2 + 8.09\,s - 14.69) / (s^2 + 25)^2$

انتگرال‌گیری در حوزه فرکانس

تأثیر انتگرال F(s) نسبت به s روی f(t) را می‌توان با تعریف زیر شروع کرد:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

با اجرای انتگرال روی فرکانس از s تا ∞

$$\int_s^{\infty} F(s)\,ds = \int_s^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt\right]ds$$

با تعویض ترتیب انتگرال داریم:

$$\int_s^{\infty} F(s)\,ds = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_s^{\infty} e^{-st}\,ds\right]f(t)\,dt$$

و انجام انتگرال داخلی داریم:

$$\int_s^{\infty} F(s)\,ds = \int_{0^-}^{\infty}\left[-\frac{1}{t}e^{-st}\right]_s^{\infty} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt$$

پس

(۱۲) $$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^{\infty} F(s)\,ds$$

مثلاً قبلاً دیدیم که

$$\sin \omega_0 t u(t) \quad \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin \omega_0 t u(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{\omega_0\,ds}{s^2 + \omega_0^2} = \tan^{-1}\frac{s}{\omega_0}\Big|_s^{\infty}$$

و خواهیم داشت:

(۱۳) $$\frac{\sin \omega_0 t u(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\omega_0}$$

تمرین

پ ۴-۷ مطلوب است $\mathcal{L}\{\sin^2 5tu(t) / t\}$

جواب: $\frac{1}{4}\ln[(s^2 + 100)/s^2]$

قضیه تغییر مقیاس زمانی

اکنون قضیه تغییر مقیاس زمانی تبدیل لاپلاس را با محاسبه تبدیل f(at) مطرح می‌کنیم. با این فرض که $\mathcal{L}\{f(t)\}$ معلوم باشد. روال خیلی ساده است:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s/a)\lambda}f(\lambda)\,d\lambda$$

که تغییر متغیر $at = \lambda$ به‌کار رفته است. آخرین انتگرال برابر است با $\frac{1}{a}$ ضرب‌در تبدیل لاپلاس f(t)، به جز این‌که s با s/a در قضیه جایگزین شده است. نتیجه می‌گیریم که

(۱۴) $$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

به‌عنوان مثالی ساده از به‌کارگیری این قضیه تغییر مقیاس زمانی تعیین یک موج کسینوسی 1 kHz را ملاحظه کنید. فرض می‌کنیم تبدیل موج کسینوسی 1 rad/s را می‌دانیم.

$$\cos tu(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1}$$

نتیجه چنین است:

$$\mathcal{L}\{\cos 2000\pi t u(t)\} = \frac{1}{2000\pi}\frac{s/2000\pi}{(s/2000\pi)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + (2000\pi)^2}$$

تمرین

پ ۵-۷ مطلوب است $\mathcal{L}\{\sin^2 5tu(t)\}$

جواب: $50 / [s(s^2 + 100)]$

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

absorbed power	توان جذب‌شده
active element	عنصر فعال
admittance	ادمیتانس
alternative current	جریان متناوب
apparent power	توان ظاهری
attenuator	تضعیف‌کننده
auxillary equation	معادله کمکی
average power	توان متوسط

B

bandpass filter	فیلتر میان‌گذر
bandstop filter	فیلتر میان‌نگذر
bandwidth	پهنای باند ـ عرض باند
bilateral circuit	مدار دوسویه
bode diagram	نمودار بُود
branch	انشعاب ـ شاخه

C

capacitance	ظرفیت
capacitor	خازن
cartical damped	میرای بحرانی
cascade	متوالی ـ پی‌درپی
characteristic equation	معادله مشخصه
charge	بار الکتریکی
chasis ground	زمین شاسی
circuit element	عنصر مداری
close loop gain	بهره حلقه بسته
common base	بیس مشترک
common collector	کلکتور مشترک
common emitter	امیتر مشترک
common mode rejection	حذف حالت مشترک
complementary solution	حل مکمل
complete response	پاسخ کامل
complex conjugate	مزدوج مختلط
complex foreing function	تابع تحریک مختلط
complex frequence	فرکانس مختلط
complex power	توان مختلط
conductance	هدایت ـ رسانایی
conductance matrix	ماتریس هدایت
conformal	همسنگ
constelation	برج ـ منظومه
convolution	کانولوشن
cotrecs	همدرخت
current divider	تقسیم‌کننده جریان
current source	منبع جریان
cyclic frequency	فرکانس دوره‌ای

D

delivered power	توان تحویلی
delta - wye comersion	تبدیل ستاره ـ مثلث
dependent source	منبع مستقل
dependent source	منبع وابسته
dialog box	جعبه محاوره
digital multimeter (DMM)	مولتی‌متر دیجیتال
direct current	جریان مستقیم
displacement current	جریان جابه‌جایی
dissipation power	توان مصرفی
dual	دوگان

E

earth ground	زمین
effective power	توان موثر
euler identily	اتحاد اولر
even function	تابع زوج
exponential damped sinusoidal function	تابع سینوسی میرایی نمایی
exponential function	تابع نمایی

F

fast furier transform	تبدیل فوریه سریع
forced response	پاسخ واداشته
forcing function	منبع یا تابع تحریک
frequency domain	حوزه فرکانس

frequency domain	حوزه فرکانس
frequency domain analysis	تحلیل حوزه فرکانس

G

gyrator	ژیراتور

H

half power frequency	فرکانس نصف توان
half wave symmetry	تقارن نیم‌موج
harmonic	هارمونیک
high-pass filter	فیلتر بالاگذر
horsepower	اسب بخار

I

ideal current source	منبع جریان ایده‌آل
ideal volttage source	منبع ولتاژ ایده‌آل
immittance	ایمیتانس
impedance	امپدانس
impulse	تابع ضربه
independent source	منبع مستقل
inductance	القاکنایی
inductor	القاگر
instantaneous power	توان لحظه‌ای
instantanesus power	توان لحظه‌ای
International system of units, SI	سیستم بین‌المللی آحاد
inverting op amp	تقویت‌کننده معکوس‌گر

K

krichhoff's current low	قانون جریان کیرشهف
krichhoff's voltage low	قانون ولتاژ کیرشهف

L

laplace transform	تبدیل لاپلاس
linear resistor	مقاومت خطی
linearity	خاصیت خطی
link	رابط
loop	حلقه
low-pass filter	فیلتر پایین‌گذر
lumped parameter	پارامترهای یکپارچه یا پارامترهای فشرده

M

magnetic field	میدان مغناطیسی
magnetic flux	شار مغناطیسی
make before break	وصل قبل از قطع
menu bar	میله منو
mesh	تک‌حلقه
mesh analysis	تحلیل تک‌حلقه‌ای
multiband filter	فیلترهای چندباندی
mutual indactance	القای متقابل
mutual inductance	القای متقابل

N

National bureau of standard	موسسه ملی استاندارد
natural response	پاسخ طبیعی
negative feedback	پسخورد منفی
neper frequence	فرکانس نپر
network	شبکه
node	گره
node analysis	تحلیل گرهی
node-pair	جفت گرهی
non inverting op amp	تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر
Norton's theorem	قضیه نورتن
notch filter	فیلتر حذف

O

odd and even symmetry	تقارن زوج ـ فرد
odd function	تابع فرد
offset	مابه‌التفاوت ـ تفاوت وضعیت
offset	آفست
Ohm's law	قانون اهم

P

open loop gain	بهره حلقه باز
operational amplifier (op amp)	تقویت‌کننده عملیاتی
oscillytory function	تابع نوسانی
overdamped	فوق میرا
parallel element	عناصر موازی
parseval theorem	قضیه پارسوال
particular solution	حل خاص
passband	باند عبور
passive element	عنصر غیرفعال
passive filter	فیلتر غیرفعال
path	مسیر
period	دوره تناوب ـ پریود
periodic	تناوبی ـ پریودیک
permeability	تراوایی
phase lag	پسفاز

phase lead	پیشفاز
phasor	فیزور
planer circuit	مدار صفحه‌ای یا مسطح
polarity	قطبیت ـ پلاریته
polyphase	چندفاز
positive feedback	پسخورد مثبت
power	توان
power factor	ضریب توان
power gain	بهره توان
power source	منبع توان
power transfer	انتقال توان
power triangle	مثلث توان
produced power	توان تولیدی

Q

quadrature power	توان عمودی یا ربعی
quality factor	ضریب کیفیت

R

radian frequency	فرکانس زاویه ی
rational function	تابع گویا
reactance	راکتانس
reactive power	توان راکتیو
real frequency	فرکانس حقیقی که همان فرکانس زاویه‌ای است
real power	توان واقعی
realizable	قابل ساخت ـ تشخیص پذیر
reciprocity theorem	قضیه تقابل
rectifier	یکسوساز
reference	مرجع
resistance	مقاومت
resistive circuit analysis	تحلیل مدارهای مقاومتی
resistor	مقاومت
resonance	تشدید
resonance frequence	فرکانس تشدید
ripple	ریپل ـ تموّج

S

saturation	اشباع
scaling	تغییر مقیاس
schemetic caplure	رسم شماتیکی
self inductance	خودالقا
series element	عناصر سری
settling	زمان نشست
sifling property	خاصیت غربالی
signal ground	زمین سیگنال
single pole double throw switch	کلید تک‌پل دو حالته
single-phase three-wine	تک‌فاز سه‌سیم
singularity	یکتا ـ یگانه
source transformation	تبدیل منبع
stability factor	ضریب یا فاکتور پایداری
steady state response	پاسخ حالت ماندگار
step-down transformer	ترانس کاهنده
step-up transformer	ترانس افزاینده
stopband	باند توقف ـ باند قطع
suceptance	سوسپتانس
supermesh	اَبَرتک‌حلقه
supernode	اَبَرگره
superposition	تجمیع
supplied power	توان تولیدی
switching	قطع و وصل کلید ـ کلیدزنی

T

Thevenin's theorem	قضیه تونن
time constant	ثابت زمانی
time domain	حوزه زمان
time domain analysis	تحلیل حوزه زمان
transfer function	تابع تبدیل
transformer	ترانس
transient response	پاسخ‌گذرا
two port network	شبکه دودهانه
two port	دودهانه

U

under damped	زیرمیرا
unit-ramp function	تابع شیب واحد
unit-step function	تابع پله واحد

V

vaccm tube	لامپ خلاء
voltage	ولتاژ
voltage divider	تقسیم‌کننده ولتاژ
voltage follower	دنبالگر ولتاژ
voltage source	منبع ولتاژ

W

wien-bridge oscillator	نوسان‌ساز وین ـ بریج

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

آفست	offset
اَبَرتک‌حلقه	supermesh
اَبَرگره	supernode
اتحاد اولر	euler identily
ادمیتانس	admittance
اسب بخار	horsepower
اشباع	saturation
القاکنایی	inductance
القاگر	inductor
القای متقابل	mutual indactance
القای متقابل	mutual inductance
امپدانس	impedance
امیتر مشترک	common emitter
انتقال توان	power transfer
انشعاب ـ شاخه	branch
ایمیتانس	immittance

ب

بار الکتریکی	charge
باند توقف ـ باند قطع	stopband
باند عبور	passband
برج ـ منظومه	constelation
بهره توان	power gain
بهره حلقه باز	open loop gain
بهره حلقه بسته	close loop gain
بیس مشترک	common base

پ

پارامترهای یکپارچه یا پارامترهای فشرده	lumped parameter
پاسخ حالت ماندگار	steady state response
پاسخ طبیعی	natural response
پاسخ کامل	complete response
پاسخ گذرا	transient response
پاسخ واداشته	forced response
پسخورد مثبت	positive feedback
پسخورد منفی	negative feedback
پسفاز	phase lag
پهنای باند ـ عرض باند	bandwidth
پیشفاز	phase lead

ت

تابع پله واحد	unit-step function
تابع تبدیل	transfer function
تابع تحریک مختلط	complex foreing function
تابع زوج	even function
تابع سینوسی میرایی نمایی	exponential damped sinusoidal function
تابع شیب واحد	unit-ramp function
تابع ضربه	impulse
تابع فرد	odd function
تابع گویا	rational function
تابع نمایی	exponential function
تابع نوسانی	oscillytory function
تبدیل ستاره ـ مثلث	delta - wye comersion
تبدیل فوریه سریع	fast furier transform
تبدیل لاپلاس	laplace transform
تبدیل منبع	source transformation
تجمیع	superposition
تحلیل تک‌حلقه‌ای	mesh analysis
تحلیل حوزه زمان	time domain analysis
تحلیل حوزه فرکانس	frequency domain analysis
تحلیل گرهی	node analysis
تحلیل مدارهای مقاومتی	resistive circuit analysis
ترانس	transformer
ترانس افزاینده	step-up transformer
ترانس کاهنده	step-down transformer
تراوایی	permeability
تشدید	resonance
تضعیف‌کننده	attenuator
تغییر مقیاس	scaling
تقارن زوج ـ فرد	odd and even symmetry
تقارن نیم‌موج	half wave symmetry
تقسیم‌کننده جریان	current divider

تقسیم‌کننده ولتاژ	voltage divider
تقویت‌کننده عملیاتی	operational amplifier (op amp)
تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر	non inverting op amp
تقویت‌کننده معکوس‌گر	inverting op amp
تک‌حلقه	mesh
تک‌فاز سه‌سیم	single-phase three-wine
تناوبی - پریودیک	periodic
توان	power
توان تحویلی	delivered power
توان تولیدی	produced power
توان تولیدی	supplied power
توان جذب‌شده	absorbed power
توان رآکتیو	reactive power
توان ظاهری	apparent power
توان عمودی یا ربعی	quadrature power
توان لحظه‌ای	instantaneous power
توان لحظه‌ای	instantanesus power
توان متوسط	average power
توان مختلط	complex power
توان مصرفی	dissipation power
توان موثر	effective power
توان واقعی	real power

ث

ثابت زمانی	time constant

ج

جریان جابه‌جایی	displacement current
جریان متناوب	alternative current
جریان مستقیم	direct current
جعبه محاوره	dialog box
جفت گرهی	node-pair

چ

چندفاز	polyphase

ح

حذف حالت مشترک	common mode rejection
حل خاص	particular solution
حلقه	loop
حل مکمل	complementary solution
حوزه زمان	time domain
حوزه فرکانس	frequency domain

خ

خازن	capacitor
خاصیت خطی	linearity
خاصیت غربالی	sifling property
خودالقا	self inductance

د

دنبالگر ولتاژ	voltage follower
دودهانه	two port
دوره تناوب - پریود	period
دوگان	dual

ر

رآکتانس	reactance
رابط	link
هدایت - رسانایی	conductance
رسم شماتیکی	schemetic caplure
ریپل - تموج	ripple

ز

زمان نشست	settling
زمین	earth ground
زمین سیگنال	signal ground
زمین شاسی	chasis ground
زیرمیرا	under damped

ژ

ژیراتور	gyrator

س

سوسپتانس	suceptance
سیستم بین‌المللی آحاد	International system of units, SI

ش

شار مغناطیسی	magnetic flux
شبکه	network
شبکه دودهانه	two port network

ض

ضریب توان	power factor
ضریب کیفیت	quality factor
ضریب یا فاکتور پایداری	stability factor

ظ

ظرفیت	capacitance

ع

عناصر سری	series element
عناصر موازی	parallel element
عنصر غیرفعال	passive element
عنصر فعال	active element
عنصر مداری	circuit element

ف

فرکانس تشدید	resonance frequence
فرکانس حقیقی که همان فرکانس زاویه‌ای است	real frequency
فرکانس دوره‌ای	cyclic frequency
فرکانس زاویه‌ای	radian frequency
فرکانس مختلط	complex frequence
فرکانس نپر	neper frequence
فرکانس نصف توان	half power frequency
فوق میرا	overdamped
فیزور	phasor
فیلتر بالاگذر	high-pass filter
فیلتر پایین‌گذر	low-pass filter
فیلتر حذف	notch filter
فیلتر غیرفعال	passive filter
فیلتر میان‌گذر	bandpass filter
فیلتر میان‌نگذر	bandstop filter
فیلترهای چندباندی	multiband filter

ق

قابل ساخت - تشخیص‌پذیر	realizable
قانون اهم	Ohm's law
قانون جریان کیرشهف	krichhoff's current low
قانون ولتاژ کیرشهف	krichhoff's voltage low
قضیه پارسوال	parseval theorem
قضیه تقابل	reciprocity theorem
قضیه تونن	Thevenin's theorem
قضیه نورتن	Norton's theorem
قطبیت - پلاریته	polarity
قطع و وصل کلید - کلیدزنی	switching

ک

کانولوشن	convolution
کلکتور مشترک	common collector
کلید تک‌پل دو حالته	single pole double throw switch

گ

گره	node

ل

لامپ خلاء	vaccm tube

م

مابه‌التفاوت - تفاوت وضعیت	offset
ماتریس هدایت	conductance matrix
متوالی - پی‌درپی	cascade
مثلث توان	power triangle
مدار دوسویه	bilateral circuit
مدار صفحه‌ای یا مسطح	planer circuit
مرجع	reference
مزدوج مختلط	complex conjugate
مسیر	path
معادله کمکی	auxillary equation
معادله مشخصه	characteristic equation
مقاومت	resistance
مقاومت	resistor
مقاومت خطی	linear resistor
منبع توان	power source
منبع جریان	current source
منبع جریان ایده‌آل	ideal current source
منبع مستقل	dependent source
منبع مستقل	independent source
منبع وابسته	dependent source
منبع ولتاژ	voltage source
منبع ولتاژ ایده‌آل	ideal volttage source
منبع یا تابع تحریک	forcing function
موسسه ملی استاندارد	National bureau of standard
مولتی‌متر دیجیتال	digital mullimeter DMM
میدان مغناطیسی	magnetic field

میرای بحرانی	cartical damped
میله منو	menu bar

ن

نمودار بُود	bode diagram
نوسان‌ساز وین ـ بریج	wien-bridge oscillator

و

وصل قبل از قطع	make before break
ولتاژ	voltage

ه

هارمونیک	harmonic
همدرخت	cotrecs
همسنگ	conformal
یکتا ـ یگانه	singularity
یکسوفاز	rectifier